Tutorium Generale

Wirtschaftsmathematik

Einheit I

Die Inhalte der ersten beiden Einheiten sind zu 100% Wiederholungen von Grundlagen aus der Mittel- und Oberstufe.

Diese werden in keiner Klausur explizit abgefragt werden. Im Gegenteil: Sie werden als Selbstverständlichkeit vorausgesetzt.

Schwächen in den Grundlagen führen zu unnötigen Fehlern, die Zeit und Punkte kosten und Aufgaben eventuell sogar schwerer machen!

Wiederholungen

- Grundregeln
- Potenzen
- Brüche
- Prozente
- Logarithmen

I

Grundrechenarten

Wir starten mit den vier Grundrechenarten. Keine Sorge, es geht nicht ums Kopfrechnen, sondern um Rechenregeln, die wir später ständig und unbewusst anwenden werden:

Vorrang

Assoziativgesetz

Kommutativgesetz

Distributivgesetz

Addition

$$\underbrace{a + b}_{\text{Summanden}} = \underbrace{c}_{\text{Summe}}$$

Multiplikation

$$\underbrace{a \cdot b}_{\text{Faktoren}} = \underbrace{c}_{\text{Produkt}}$$

Subtraktion

$$a - b = c$$

Minuend Subtrahend Differenz

Division

$$a / b = c$$

Dividend Divisor Quotient

Vorrang

Gemäß "Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich" gibt es vier Stufen, die wir unterscheiden:

- Geklammerte Ausdrücke von innen nach außen
- Potenzen und Wurzeln von innen nach außen
- Multiplikation und Division
- Addition und Subtraktion

Innerhalb dieser Stufen liegt ein Gleichstand vor. Bei einem "Gleichstand" rechnen wir von links nach rechts.

Okay, es gibt noch eine Ausnahme für Potenzen von Potenzen, aber dazu später mehr.

Vorrang

$$1 + 2 \cdot 3^2 - (4 + \underbrace{(5 \cdot 6)}) / 2 - 1$$

$$= 1 + 2 \cdot 3^2 - \underbrace{(4 + 30)} / 2 - 1$$

$$= 1 + 2 \cdot \underbrace{3^2} - 34 / 2 - 1$$

$$= 1 + \underbrace{2 \cdot 9} - 34 / 2 - 1$$

$$= 1 + 18 - \underbrace{34 / 2} - 1$$

$$= 1 + 18 - 17 - 1 = 1$$

Assoziativgesetz

Addition und Multiplikation sind assoziativ.

Assoziativ bedeutet, dass bei mehrfacher Addition oder Multiplikation die Reihenfolge der Ausführung keine Rolle spielt.

Wir können Klammern setzen, versetzen oder weglassen, ohne dass sich das Ergebnis ändert.

Bei Subtraktion und Division ist dies nicht möglich.

Assoziativität

$$(1+2)+3 = 1+(2+3) = 6$$

$$(1\cdot 2)\cdot 3 = 1\cdot(2\cdot 3) = 6$$

$$(1-2)-3 = 1-(2-3)$$

$$(1/2)/3 = 1/(2/3)$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Kommutativgesetz

Addition und Multiplikation sind kommutativ.

Kommutativ bedeutet, dass sich das Ergebnis einer Addition oder Multiplikation nicht ändert, wenn ich die Elemente rechts und links vertausche.

Bei Subtraktion und Division ist dies nicht möglich.

Kommutativität

$$5 + 7 = 7 + 5 = 12$$

$$5 \cdot 7 = 7 \cdot 5 = 35$$

$$5 - 7 = 7 - 5$$

$$5 / 7 = 7 / 5$$

Distributivgesetz

Erzwingen wir den Vorrang von Addition oder Subtraktion durch eine Klammer, lernen wir das **Distributivgesetz** kennen!

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$a(b - c) = ab - ac$$

Distributivgesetz

$$\begin{aligned} & 5 \cdot (1 + 2 + 3) \\ = \; & 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \\ = \; & 5 + 10 + 15 \\ = \; & 30 \end{aligned}$$

Distributivgesetz

Werden zwei Klammern mit mehreren Summanden miteinander multipliziert, muss jeder Summand, der einen mit jedem Summanden der anderen Klammer multipliziert werden:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Distributivgesetz

$$\begin{aligned} &(1 + 2) \cdot (3 + 4) \\ &= 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ &= 3 + 4 + 6 + 8 \\ &= 21 \end{aligned}$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Distributivgesetz

Die binomischen Formeln sind nichts anderes als eine Konsequenz des Distributivgesetzes und der Potenzrechnung, die wir im Anschluss näher anschauen werden.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

Sie sparen Zeit beim Ausklammern.

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Auslassung

Auslassung: Der Operator für die Multiplikation kann in vielen Fällen weggelassen werden. Zwei häufige Szenarien, die wir auch in den binomischen Formeln finden:

Auslassung bei Faktoren vor einer Klammer:

$$a \cdot (b + c) = a(b + c)$$

Auslassung zwischen zwei Faktoren:

$$a \cdot b = ab$$

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich!

$$-(a+b)\,/\,0.5 - 2a + 2b = (-a-b)/0{,}5 - 2a + 2b$$
$$= -2a - 2b - 2a + 2b$$
$$= -4a$$

$$-(-a\cdot(b\,/\,c))c - (-4(4-8)) = -(-a\cdot(b/c))c - \underbrace{(-4(-4))}_{+16}$$
$$= -(-a\cdot(b/c))\cdot c - 16$$
$$= (a\cdot(b/c))\cdot c - 16$$
$$= \left(a\cdot\frac{b}{c}\right)c - 16$$
$$= a\cancel{c}\cdot\frac{b}{\cancel{c}} - 16$$

$$2c(a - 0.5(a+a/c-a)) = 2c\left(a - 0{,}5\cdot\frac{a}{c}\right)$$
$$= 2ac - a$$

Entferne alle überflüssigen Klammern!

$(1\cdot(2+3+5)) + (6/(1\cdot 2\cdot 3)) =$

$(1+(2-(3-4)+5)+6)\cdot(7x)^2 =$

Potenzen

Wenn der Exponent eine natürliche Zahl ist, wird die Basis a genau b mal "miteinander" multipliziert.

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$$

Bei einem Exponenten von 1 ist das Ergebnis die Basis. Wir können den Exponenten dann einfach weglassen.

$$7^1 = 7$$

Aber was ist, wenn der Exponent keine natürliche Zahl ist? Wir unterscheiden drei Fälle!

$${\underbrace{a}_{\text{Basis}}}^{\overbrace{b}^{\text{Exponent}}} = \underbrace{c}_{\text{Potenzwert}}$$

Potenzen

Bei einem Exponenten von 0 ist das Ergebnis 1

$$a^0 = 1 \ \forall\, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Bei einem negativen Exponenten arbeiten wir mit Kehrwerten.

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b} \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = 0.125$$

Bei einem Bruch als Exponent arbeiten wir mit Wurzeln.

$$a^{1/b} = \sqrt[b]{a} \qquad 625^{1/4} = \sqrt[4]{625} = 5$$

Potenzen

$$\overset{\text{Exponent}}{}\ \underbrace{a}_{\text{Basis}}{}^{b} = \underbrace{c}_{\text{Potenzwert}}$$

Exponenten $b \in \mathbb{N}$: Multipliziere Basis b mal

Exponent $b = 1 : a^1 = a$

Exponent $b = 0 : a^0 = 1 \ \forall\, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Negativer Exponent $b < 0 : a^{-b} = 1/a^b$

Bruch als Exponent $1/b : a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$

Potenzen

Darüber hinaus gibt es die fünf rechts gezeigten Regeln. Eine für Potenzen von Potenzen.

$$(4^8)^{0.25} = 4^{8\cdot 0.25} = 4^2 = 16$$

Zwei für Produkte/Quotienten von Potenzen mit gleicher Basis.

$$4^{0.5} \cdot 4^{1.5} = 4^{0.5+1.5} = 4^2 = 16$$

Zwei für Produkte/Quotienten von Potenzen mit gleichem Exponent.

$$2^2 \cdot 5^2 = 10^2 = 100$$

Regeln für Potenzen

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$a^b / a^c = a^{b-c}$$

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

$$a^c / b^c = (a / b)^c$$

$$(a^b)^c = a^{b\cdot c}$$

Vereinfache die folgenden Potenzen so weit wie möglich!

$$\frac{1}{x}\cdot\sqrt[2]{x}\cdot x+\sqrt[2]{x} = \underbrace{x^{-1}\cdot x^{1/2}\cdot x}+x^{1/2}$$
$$= x^{-1+1/2+1}+x^{1/2}$$
$$= x^{0{,}5}+x^{0{,}5} = 2x^{0{,}5}$$

$$\sqrt{x} = x^{0{,}5}$$

$$2^{2x}/4^{x}+(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})/(ab)^{0.25} = 2^{2x}/4^{x}+(a\cdot b)^{0{,}5}/(a\cdot b)^{0{,}25}$$

$a^{0{,}5}\cdot b^{0{,}5}$

$$= 2^{2x}/4^{x}+(ab)^{0{,}25}$$
$$= (2^{2})^{x}/4^{x}+(ab)^{0{,}25}$$
$$= 1+(ab)^{0{,}25}$$

$$(\sqrt{x})^{4} - 0.5x^{6}/x^{3} = x^{0{,}5\cdot 4}-0{,}5\,x^{6-3}$$
$$= x^{2}-0{,}5x^{3}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}\cdot\sqrt[8]{xy^{6}\cdot x^{6}y} = \left((xy)^{0{,}5}\right)^{0{,}25}\cdot(x^{7}y^{7})^{0{,}125}$$
$$= (xy)^{0{,}125}\cdot(x^{7}y^{7})^{0{,}125}$$
$$= (xy\cdot x^{7}y^{7})^{0{,}125} = (x^{8}y^{8})^{0{,}125}$$
$$= xy$$

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Bruchrechnen

Idee Wir schreiben die Operanden der Division nicht nebeneinander, sondern untereinander.

$$a\,/\,b = c \iff \frac{a}{b} = c$$

Vorrang Zähler und Nenner werden getrennt ausgewertet, erst danach wird die Division ausgeführt.

$$\frac{a+b}{c+d} = (a+b)\,/\,(c+d)$$

Dividend wird zum Zähler

$$a\,/\,b = c \qquad \frac{a}{b} = c$$

Divisor wird zum Nenner

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Bruchrechnen

Kürzen/Erweitern Wir multiplizieren Zähler und Nenner mit einem Faktor und beachten dabei das Distributivgesetz!

$$\frac{4x + 2y}{8} = \frac{4x + 2y}{8} \Big/ \frac{2}{2} = \frac{2x + y}{4}$$

Split/Merge Brüche mit gleichem Nenner die mit Addition oder Subtraktion verbunden sind, können zusammengefasst werden.

$$\frac{4x + 2y}{8} = \frac{4x}{8} + \frac{2y}{8}$$

Dividend wird zum Zähler

$$a \,/\, b = c \qquad \frac{a}{b} = c$$

Divisor wird zum Nenner

Bruchrechnen

Kehrbrüche Eine Division durch einen Bruch ist äquivalent zur Multiplikation mit dem Kehrbruch:

$$\frac{4x + 2y}{8} \,/\, \frac{x+y}{2} = \frac{4x + 2y}{8} \cdot \frac{2}{x+y}$$

Mehr Kehrbrüche Ein Exponent mit negativem Vorzeichen vertauscht Zähler und Nenner:

$$\frac{4x + 2y}{8} \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)^{-1} = \frac{4x + 2y}{8} \cdot \frac{2}{x+y}$$

Dividend wird zum Zähler

$$a \,/\, b = c \qquad \frac{a}{b} = c$$

Divisor wird zum Nenner

Vereinfache die folgenden Brüche so weit wie möglich!

$$\frac{\overset{/x}{16x^2} + \overset{/x}{4x}}{\underset{/x}{x^2}} \,/\, (4 + x^{-1}) = \frac{16x+4}{x} \cdot \frac{1}{4+x^{-1}} = \frac{16x+4}{4x+1} = \frac{4\cancel{(4x+1)}}{\cancel{4x+1}} = 4$$

$$\frac{3y + xy}{x} - \frac{3y^2x^{-1} + y^2}{y} = \frac{3y^2+xy^2}{xy} - \frac{3y^2+xy^2}{xy} = \frac{3y^2+xy^2-3y^2-xy^2}{xy} = \frac{0}{xy} = 0$$

$$\left(\frac{12x - 8xy}{4x^2}\right)^2\left(\frac{x}{3 - 2y}\right)^{-1} = \left(\frac{3-2y}{x}\right)^2 \frac{3-2y}{x} = \left(\frac{3-2y}{x}\right)^3$$

$$x\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}\right)^{-4} = x\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt[4]{x}}\right)^4 = x\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^4 \cdot \left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^4 = x\,\frac{1}{x}\cdot\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^4 = \left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^4$$

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Prozentrechnen

Prozent bedeutet übersetzt "von 100" und ist mathematisch nichts anderes als eine Abkürzung für den Bruch 1/100

$$\% = \frac{1}{100}$$

Beispiel Wie viel Alkohol ist in einem Halbe?

$$500\text{ml} \cdot 5.0\% = 500\text{ml} \cdot 5.0 \cdot \frac{1}{100} = 25\text{ml}$$

Alkoholgehalt Getränke

Mineralwasser	**0.0%**	Bockbier	**8.0%**
Apfelsaft	**0.2%**	Wein	**12.0%**
Radler	**2.5%**	Likör	**17.5%**
Normalbier	**5.0%**	Wodka	**40.0%**

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Prozentrechnen

Multiplikation Werden zwei Prozentwerte multipliziert, ergibt sich der Faktor 1/10000.

Beispiel: Alkoholgehalt von 200ml Mische, die aus 20% Wodka und 80% alkoholfreiem Getränken besteht:

$$200\text{ml} \cdot 20\% \cdot 40\%$$

$$= 200\text{ml} \cdot 20 \cdot \frac{1}{100} \cdot 40 \cdot \frac{1}{100} = 16\text{ml}$$

Alkoholgehalt Getränke

Mineralwasser	**0.0%**	Bockbier	**8.0%**
Apfelsaft	**0.2%**	Wein	**12.0%**
Radler	**2.5%**	Likör	**17.5%**
Normalbier	**5.0%**	Wodka	**40.0%**

Prozentrechnen

Differenzen von Prozentwerten können in Prozent oder Prozent-punkten angegeben werden.

Beispiel: Unterschied Alkoholgehalt Bier und Wodka

Prozentpunkte $40\% - 5\% = 35$ ppt.

Prozent $\dfrac{40\%}{5\%} - 1 = 700\%$

Alkoholgehalt Getränke

Mineralwasser	**0.0%**	Bockbier	**8.0%**
Apfelsaft	**0.2%**	Wein	**12.0%**
Radler	**2.5%**	Likör	**17.5%**
Normalbier	**5.0%**	Wodka	**40.0%**

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Prozentrechnen

Wachstumsraten von Werten werden im Allgemeinen mit der folgenden Formel berechnet.

$$\frac{\text{Neuer Wert}}{\text{Alter Wert}} - 1$$

Beispiel: Eine Brezel kostet 90ct statt 80ct. Um wie viel Prozent ist der Preis gestiegen?

$$\frac{90}{80} - 1 = 0.125 = 12.5\%$$

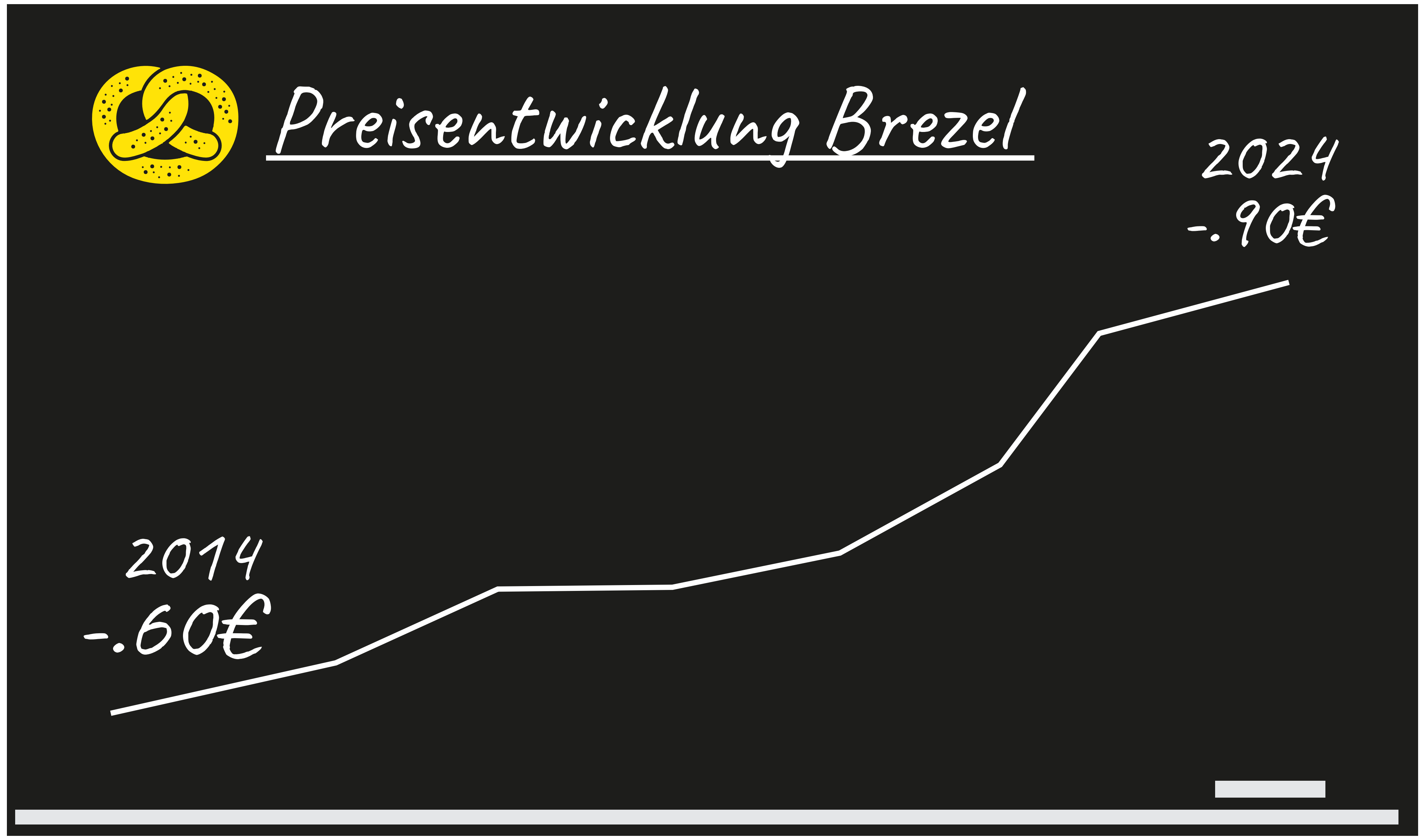
Prozentrechnen

Jährliche Wachstumsraten Um Wachstumsraten auf ein Jahr herunterzurechnen verwenden wir folgende Formel:

$$\left(\frac{\text{Neuer Wert}}{\text{Alter Wert}}\right)^{\frac{1}{\text{Jahre}}} - 1$$

Beispiel: Über 10 Jahre ist der Brezelpreis um insgesamt 50% gestiegen.

Auf das Jahr heruntergerechnet sind das nicht 5%!



DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

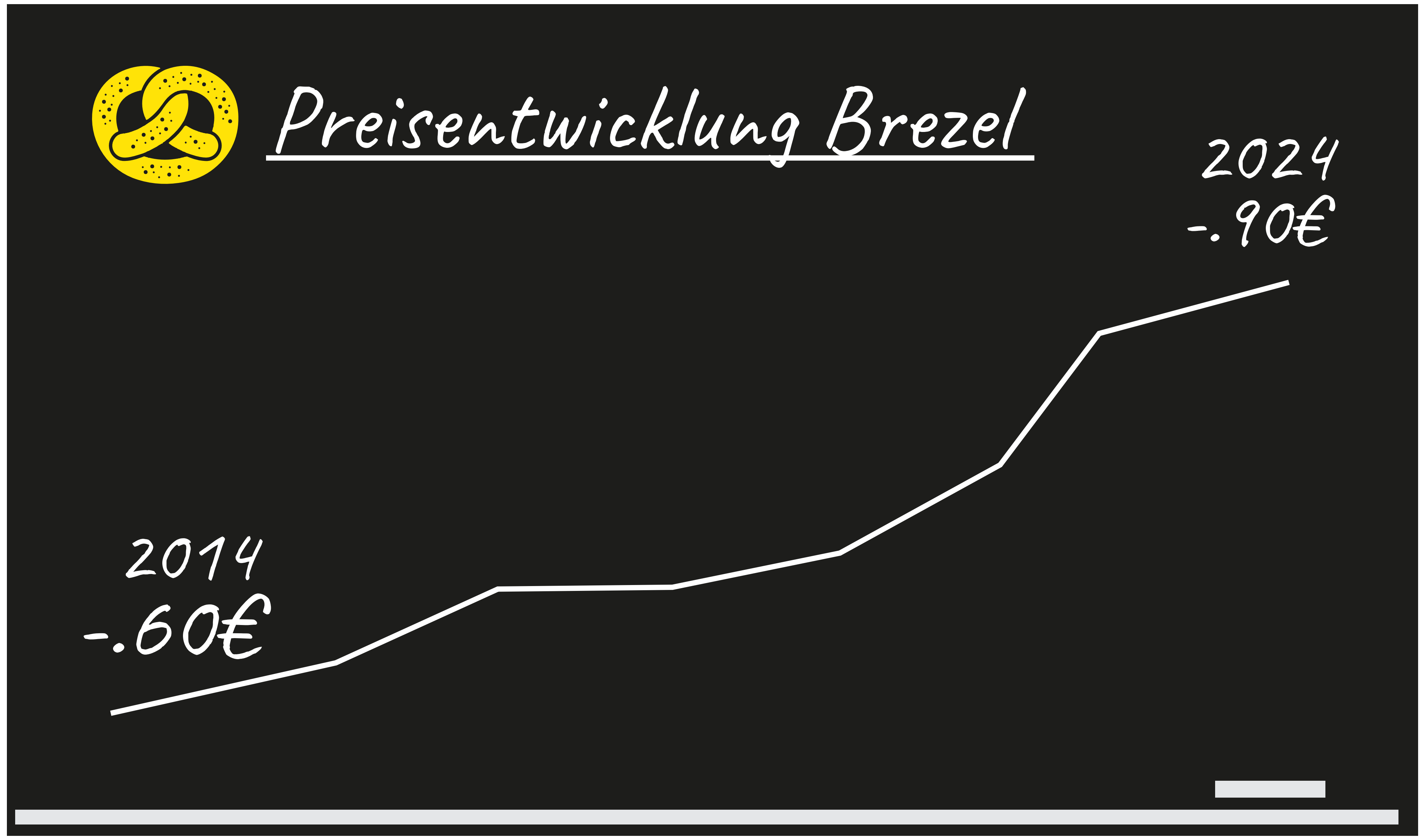
Prozentrechnen

Würden wir 5% Wachstum über 10 Jahre anwenden, erhalten wir deutlich mehr als 90ct.

$$60\text{ct} \cdot 1.05^{10} = 97.7\text{ct}$$

Die korrekte jährliche Wachstumsrate ist:

$$\left(\frac{90}{60}\right)^{\frac{1}{10}} - 1 = 4.138\%$$



Ein Limonadenhersteller verringert den Zuckergehalt von 1 Liter Limonade von 8.60% auf 5.16%. Gib die Änderung absolut, sowie in Prozent und in Prozentpunkten an!

Absolut

Vorher $8{,}6\% \cdot 1000 = 8{,}6\ g/l$

Nachher $5{,}16 \cdot 1000 = 5{,}16\ g/l$

Der Liter Limo enthält 3,44g weniger Zucker

Prozentpunkte

$5{,}16 - 8{,}6 = -3{,}44$ ppt.

Prozent

$(5{,}16/8{,}6) - 1 = -0{,}4 = -40\%$

Die Änderung kommt gut an. Innerhalb von drei Jahren steigert sich der jährliche Absatz von 85000 Hektoliter auf 115000 Hektoliter. Gib die jährliche Änderung und Gesamtänderung in Prozent an!

Gesamtänderung

$$\frac{115000}{85000} - 1 = 0{,}353 = 35{,}3\%$$

Jährliches Wachstum

$$\left(\frac{115000}{85000}\right)^{1/3} - 1 = 0{,}106 = 10{,}6\%$$

Nach 5 Jahren in einer Festgeldanlage mit Zinseszinseffekt hat sich ein Kapital von 10.000€ auf 16105.10€ vermehrt. Wie hoch war der jährliche Zinssatz? Nach wie viel Jahren würden wir 25.000€ erreichen?

$$10000 \cdot (1+i)^5 = 16105{,}10$$
$$\Leftrightarrow (1+i)^5 = 1{,}610510$$
$$\Leftrightarrow 1+i = (1{,}610510)^{1/5}$$
$$\Rightarrow i = 0{,}1 = 10\%$$

$$10000 \cdot 1{,}1^x = 25000$$
$$\Leftrightarrow 1{,}1^x = 2{,}5$$
$$\Rightarrow x = \log_{1{,}1}(2{,}5) = 9{,}$$

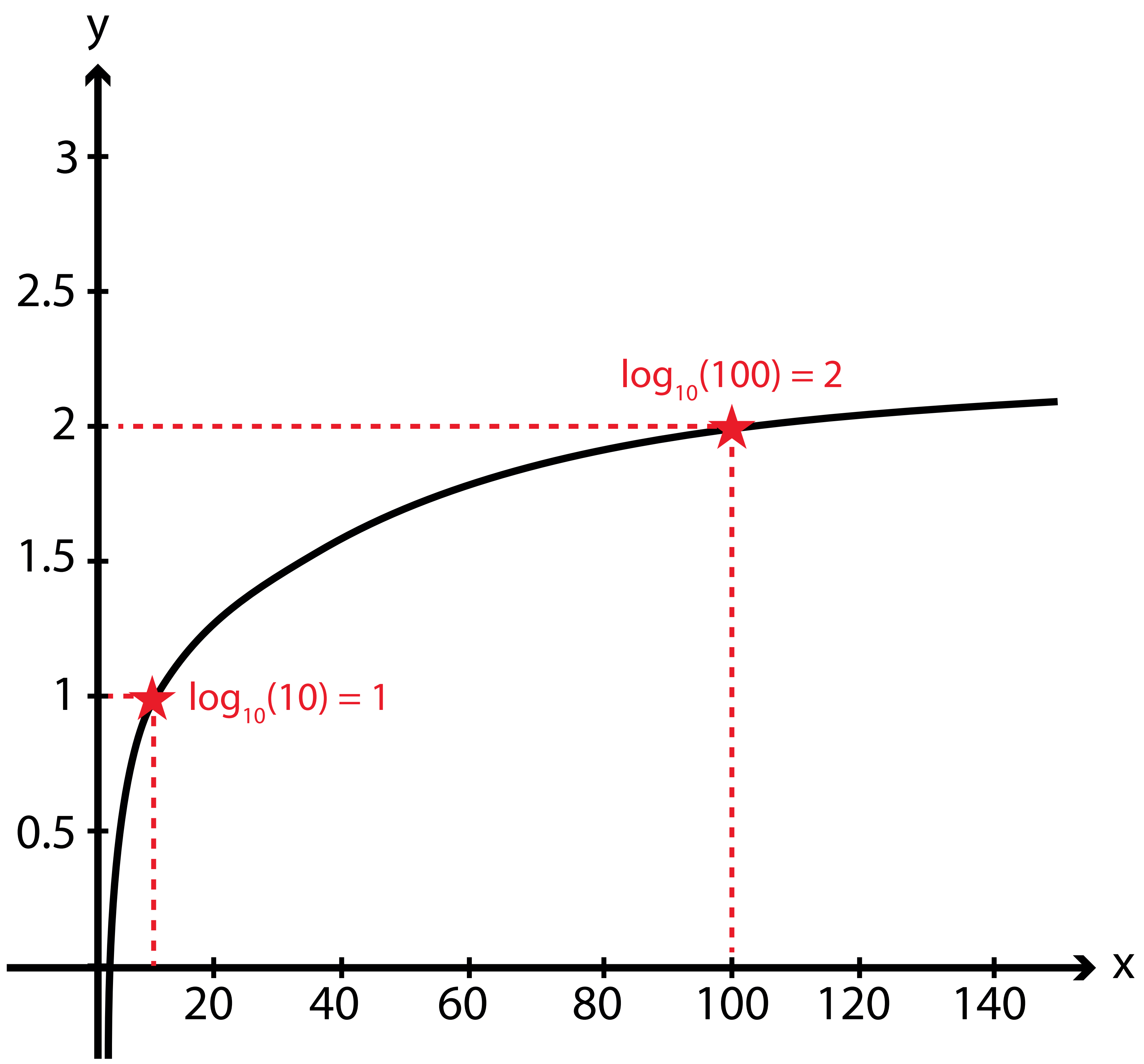
Logarithmus

Idee Lösung einer Potenzgleichung bei dem der Exponent gesucht wird, d. h.:

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a(c) = b$$

Basis Wird keine Basis angegeben, wird oft a=10 angenommen, aber nicht immer ...

$$10^b = c \Leftrightarrow \log(c) = b$$



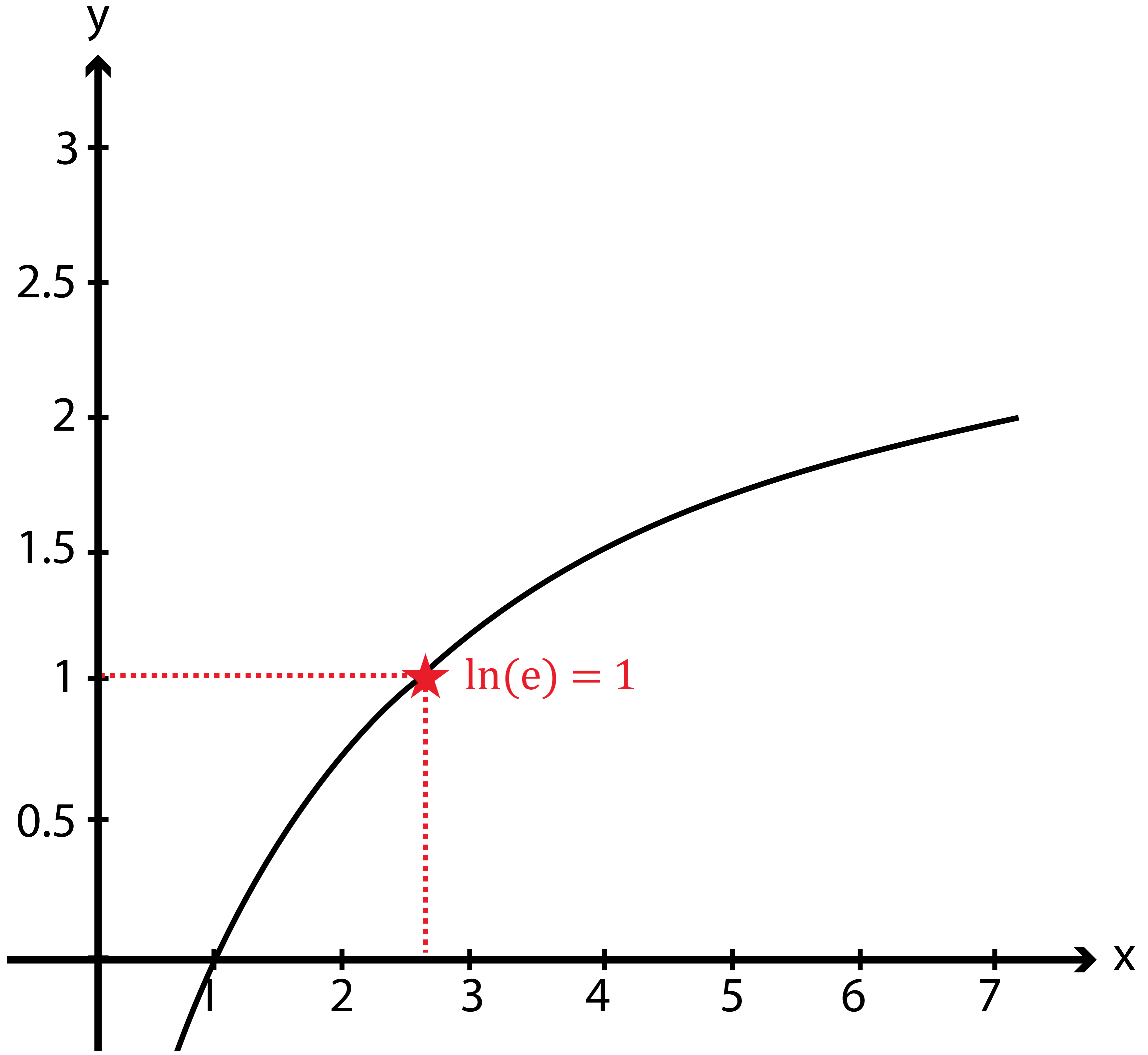
Logarithmus

Natürlicher Logarithmus Der Operator ln(...) ist die Abkürzung von "Logarithmus naturalis" und hat immer die Basis e.

$$e^b = c \Leftrightarrow \ln_e(c) = b$$

Eulersche Zahl Die Eulersche Zahl e ist eine nicht-rationale Zahl, die in der Analysis und der Statistik eine besondere Bedeutung haben wird.

$$e \approx 2.71828$$

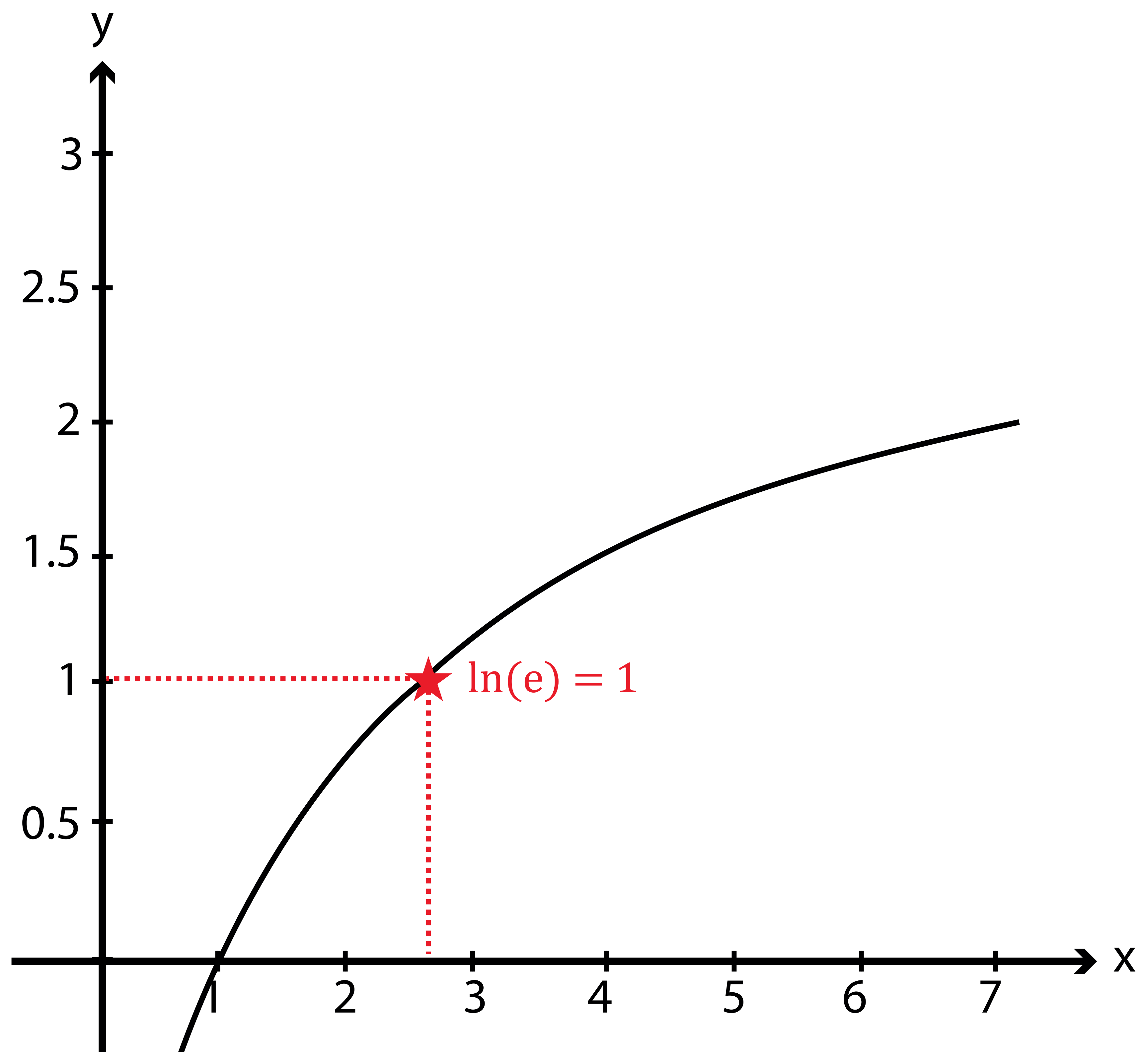


Logarithmus

Nullstelle Unabhängig von der Basis a hat der Logarithmus eine Nullstelle bei 1, da $a^0 = 1$

Basis einsetzen Setzen wir die Basis in den Logarithmus ein, ist das Ergebnis 1.

Negativer Bereich Unabhängig von der Basis a ist der Logarithmus weder für die 0 noch für den negativen Bereich definiert.



Logarithmus

Für Logarithmen aus Produkten gelten folgende Rechenregeln:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$
$$\log_a(b \,/\, c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

Für Logarithmen aus Potenzen gilt:

$$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$$

Logarithmen

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$
$$\log_a(b \,/\, c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$
$$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$$
$$\log_a(x) = \log_b(x) \,/\, \log_b(a)$$

Logarithmus

Um den Logarithmus einer Basis a auf eine andere Basis b umzurechnen verwenden wir:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Aus der Definition des Logarithmus folgt:

$$a^{\log_a(x)} = x \quad \text{insb.} \quad e^{\ln(x)} = x$$

Logarithmen

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$$

$$\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$$

Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich!

20^2

$2 \cdot \log_{10}(20) - \log(4) = \log_{10}(400) - \log(4)$

$= \log_{10}(400/4)$

$= \log_{10}(100) = 2$

$0.5 \log_{10}(400) - \log_5(20) \cdot \log_{10}(5)$

$= \log_{10}(\sqrt{400}) - \frac{\log_{10}(20)}{\cancel{\log_{10}(5)}} \cdot \cancel{\log_{10}(5)}$

$= \log_{10}(20) - \log_{10}(20) = 0$

$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5^{0.5}} = 5^{-0.5}$

$\log_{10}(\sqrt{10}) \cdot (\log_{10}(\frac{1}{\sqrt{5}}) + \log_{10}(2^{-0.5}))$

$= \log_{10}(10^{0,5}) \cdot (\log_{10}(5^{-0,5}) + \log_{10}(2^{-0,5}))$

$= 0,5 \log_{10}(10) \cdot (-0,5 \log_{10}(5) - 0,5 \log_{10}(2))$

$= 0,5 \cdot \log_{10}(10) \cdot (-0,5) \cdot (\log(5) - \log(2))$

$= -0,25 \cdot \log(2,5)$

$\ln(e^{2x}) + \ln(e^{x^2}) + \ln(\sqrt{e^x}) = 2x \ln(e^x) + x^2 \ln(e^x) + 0,5 \ln(e^x)$

$= 2x + x^2 + 0,5$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Einheit II

Die Inhalte der ersten beiden Einheiten sind zu 100% Wiederholungen von Grundlagen aus der Mittel- und Oberstufe.

Diese werden in keiner Klausur explizit abgefragt werden. Im Gegenteil: Sie werden als Selbstverständlichkeit vorausgesetzt.

Schwächen in den Grundlagen führen zu unnötigen Fehlern, die Zeit und Punkte kosten und Aufgaben eventuell sogar schwerer machen!

Wiederholungen

- Gleichungen umformen
- Lineare Gleichungen
- Quadratische Gleichungen
- Weitere Gleichungen
- Gleichungssysteme

II

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Gleichungen

Eine Gleichung besteht aus einem Gleichheitszeichen, das zwei Terme miteinander verbindet.

$$\text{Linker Term} = \text{Rechter Term}$$

Die Gleichung trifft folgende Aussage: Der Term links hat denselben Wert wie der Term rechts.

Im Prinzip ist die Aussage 1+2=3 eine Gleichung.

Aussagen

$$\ldots = \ldots \qquad \text{Gleichung}$$

$$\left.\begin{array}{l} \ldots < \ldots \\ \ldots > \ldots \\ \ldots \leq \ldots \\ \ldots \geq \ldots \\ \ldots \neq \ldots \end{array}\right\} \text{Ungleichungen}$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Gleichungen

Die Terme in unseren Gleichungen werden nicht nur Zahlen, sondern auch eine oder mehrere Variablen enthalten.

Steht auf einer Seite nur eine Variable, dann sagt uns die Gleichung, wie wir diese Größe berechnen können.

Beispiel Um das BIP zu berechnen, addieren wir Konsum, Investition, Staatsausgaben und Handelsbilanz.

$$Y = C + I + G + X$$

Gleichungen

$$W = KR + PR$$

$$Y = C + I + G + X$$

$$\pi = p(q)q - c(q)$$

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

$$p = \frac{\partial c}{\partial q}$$

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

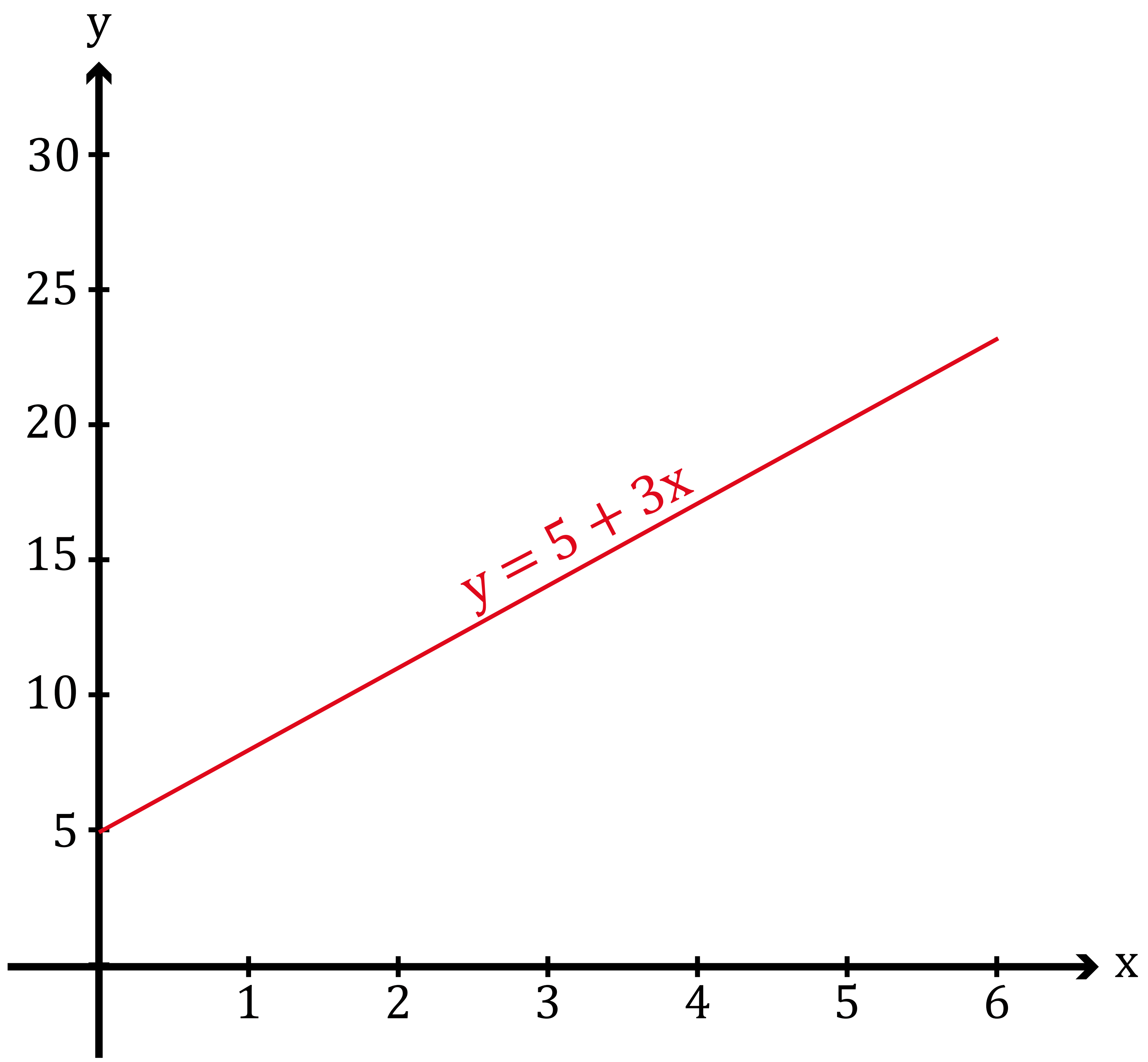
Gleichungen

Nicht immer liegen Gleichungen in der Form vor, dass wir das Ergebnis direkt berechnen können. Statt ...

$$y = 5 + 3x$$

... könnte uns zum Beispiel Folgendes erwarten:

$$2(y - x) = 10 + 4x$$



Äquivalenzumformungen

Basiswerkzeug zum Umformen und Lösen von Gleichungen sind Äquivalenzumformungen. Wir führend auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Rechnung aus!

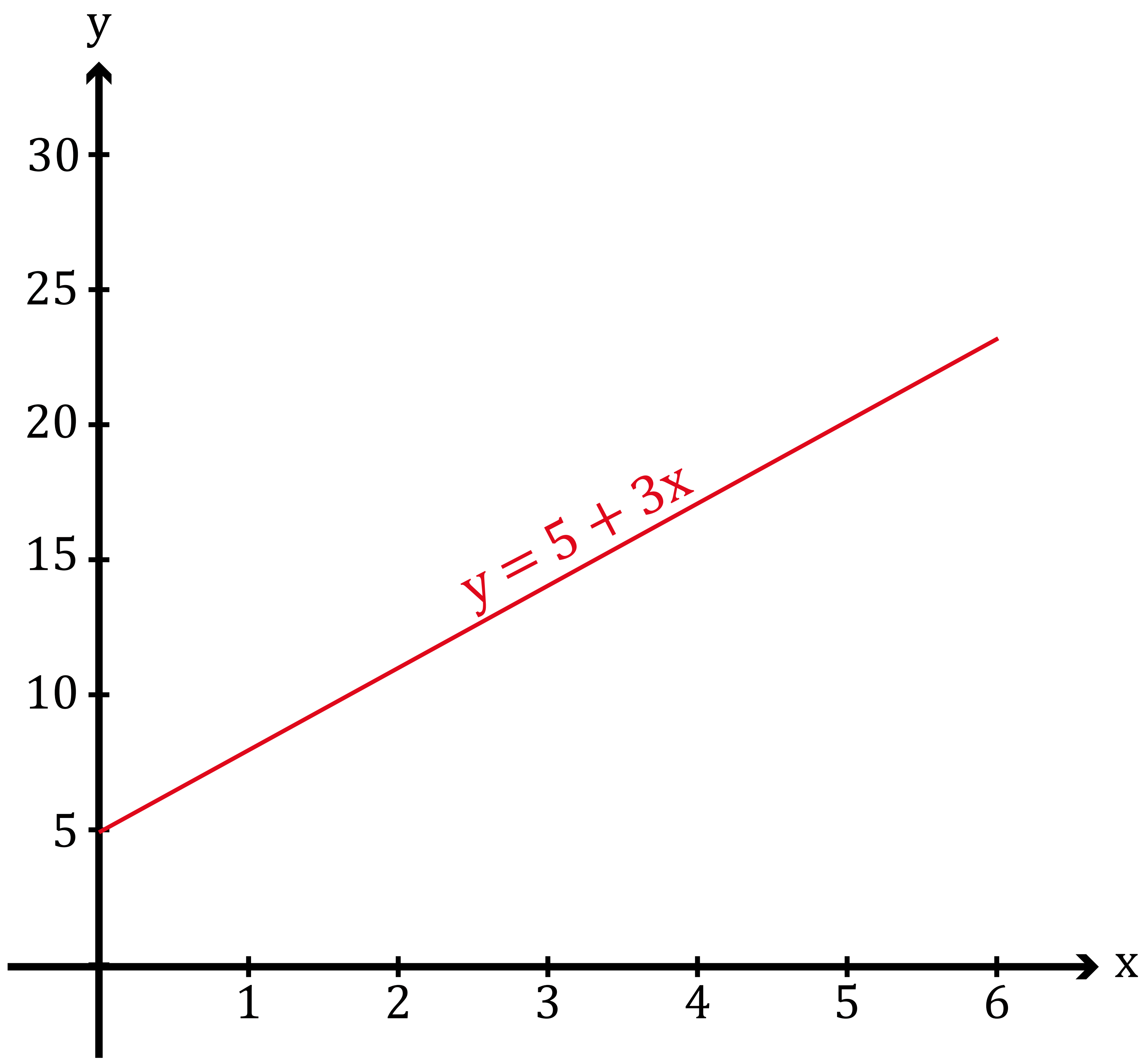
$$2(y - x) = 10 + 4x \qquad |:2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(y - x)/2 = (10 + 4x)/2$$

$$\Leftrightarrow \quad y - x = 5 + 2x \qquad |+x$$

$$\Leftrightarrow \quad y - x + x = 5 + 2x + x$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 5 + 3x$$

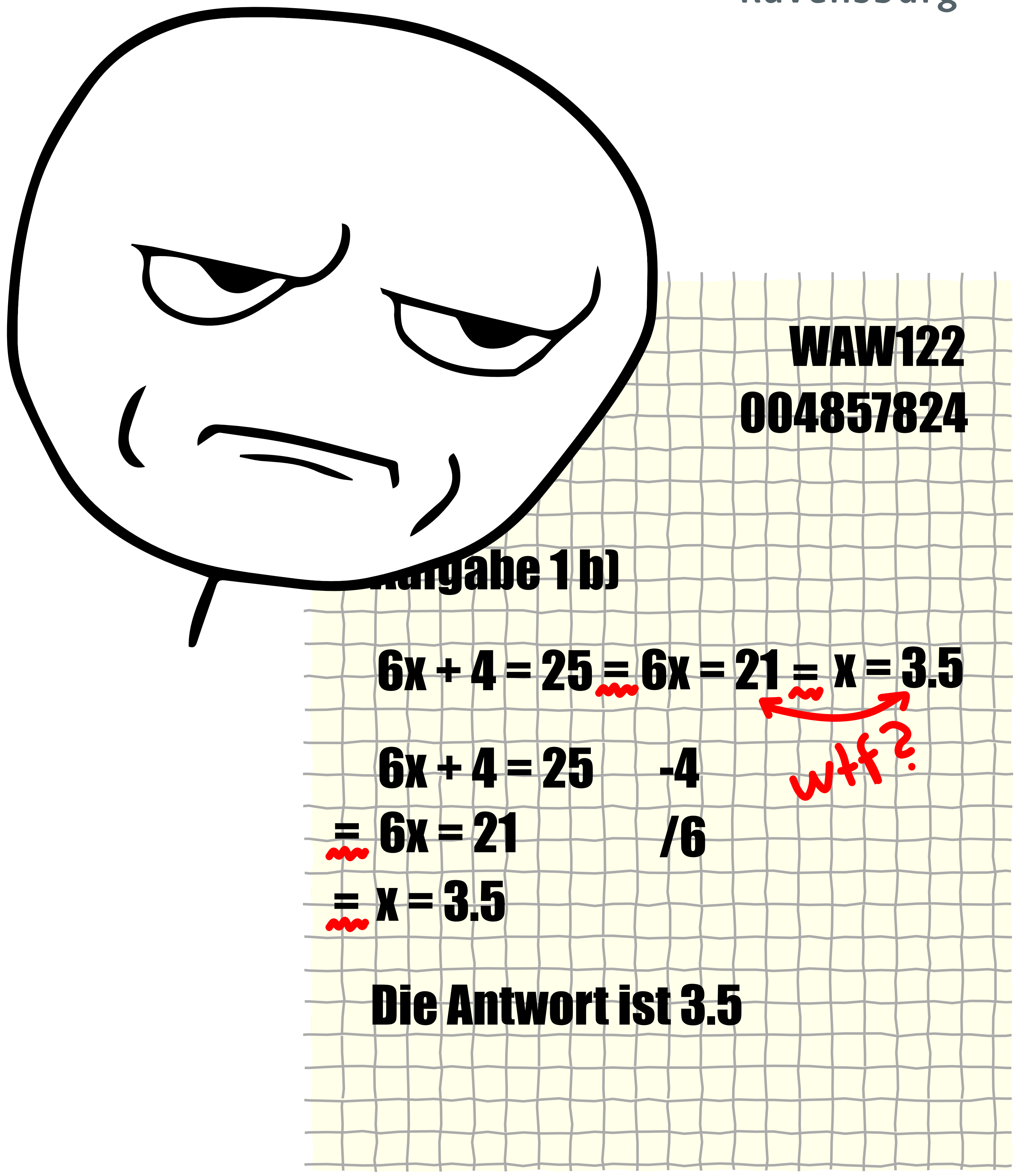


Äquivalenzumformungen

Äquivalenzpfeile verknüpfen zwei Aussagen. Sie zeigen, dass die eine Aussage aus der anderen folgt.

Gleichheitszeichen verknüpfen keine Aussagen, sondern Terme. Sie zeigen, dass zwei Terme denselben Wert besitzen!

Äquivalenzpfeile sind keine Gleichheitszeichen! Bitte die rechts gezeigte fehlerhafte Notation unbedingt vermeiden!



Äquivalenzumformungen

Äquivalenzpfeile verknüpfen zwei Aussagen. Sie zeigen, dass die eine Aussage aus der anderen folgt.

Implikationspfeile verknüpfen zwei Aussagen. Sie zeigen, dass die zweite Aussage aus der ersten Aussage folgt.

Äquivalenzpfeile nur dann verwenden, wenn von der einen auf die andere Aussage geschlossen werden kann und umgekehrt!

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

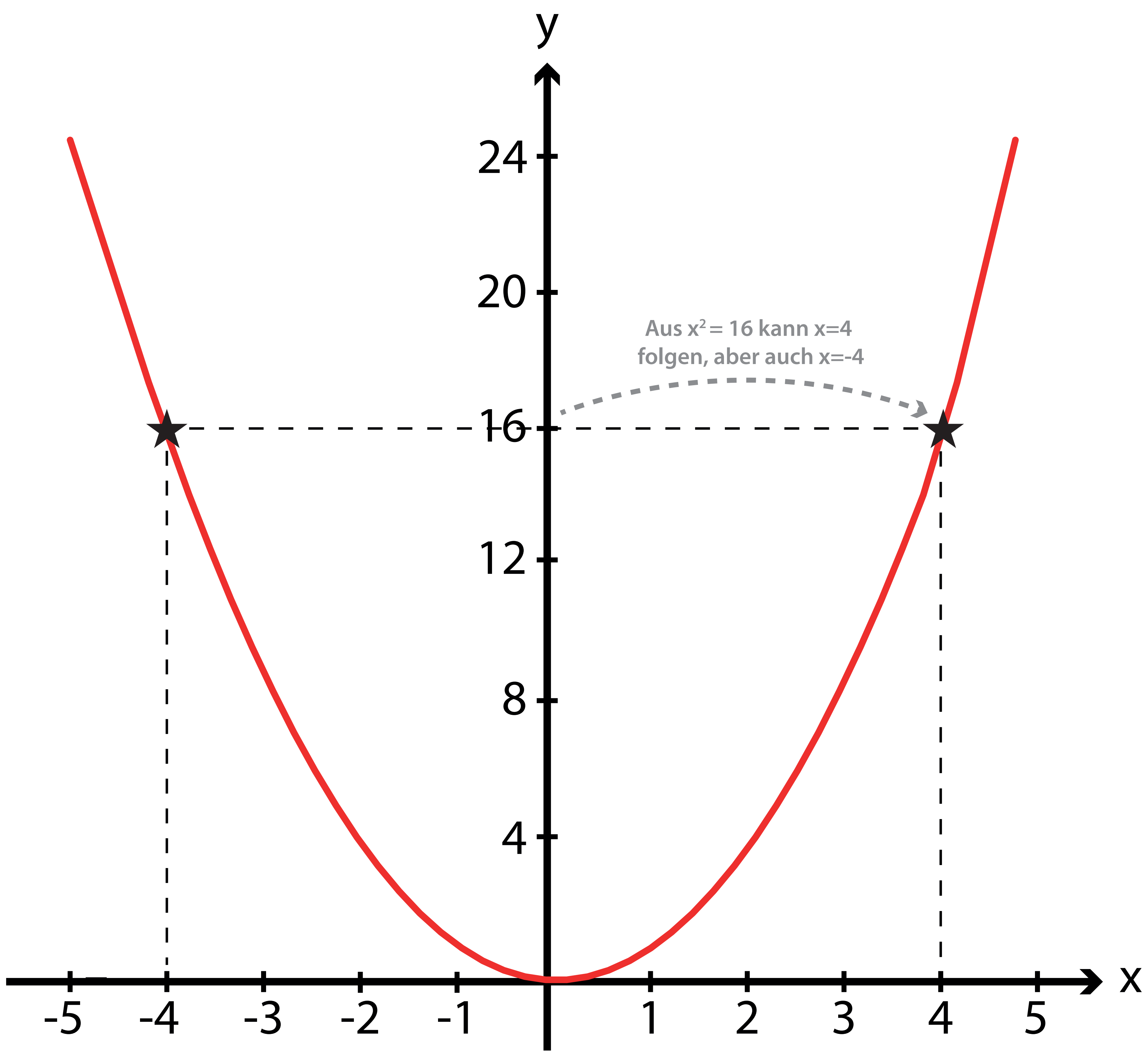
Äquivalenzumformungen

Bei fast allen Äquivalenzumformungen passen beide Varianten! Eine Ausnahme ist z. B. die Quadratwurzel oder die Quadrierung.

Quadrieren wir z. B. beide Seiten einer Gleichung, dann zeigt der Pfeil nur nach rechts:

$$x = 4 \qquad\qquad x^2 = 16$$
$$\Longrightarrow x^2 = 16 \checkmark \qquad \Longrightarrow x = 4 \times$$

Warum stimmt die Variante rechts nicht? Weil x auch -4 sein könnte, denn -4 quadriert ergibt ebenfalls 16.



Löse die folgenden Gleichungen nach x auf, d. h. forme die Gleichungen so um, dass entweder links oder rechts nur „x“ steht.

$$x + y = x - y \quad | -y$$
$$\Rightarrow \quad x = x - 2y \quad | -x$$
$$\Rightarrow \quad 0 = -2y$$
$$\Rightarrow \quad y = 0$$

$$x + xy = z - y \quad | \, x(\ldots)$$
$$\Leftrightarrow \quad x(1+y) = z - y \quad | : (1+y)$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{z-y}{1+y}$$

$$y + \frac{1}{x} = 2y - 1 \quad | -y$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = y - 1 \quad | \, (\ldots)^{-1} \quad \cdot x$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{y-1}$$

ALTERNATIVER RECHENWEG

$$1 = x(y-1) \quad | : (y-1)$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{y-1}$$

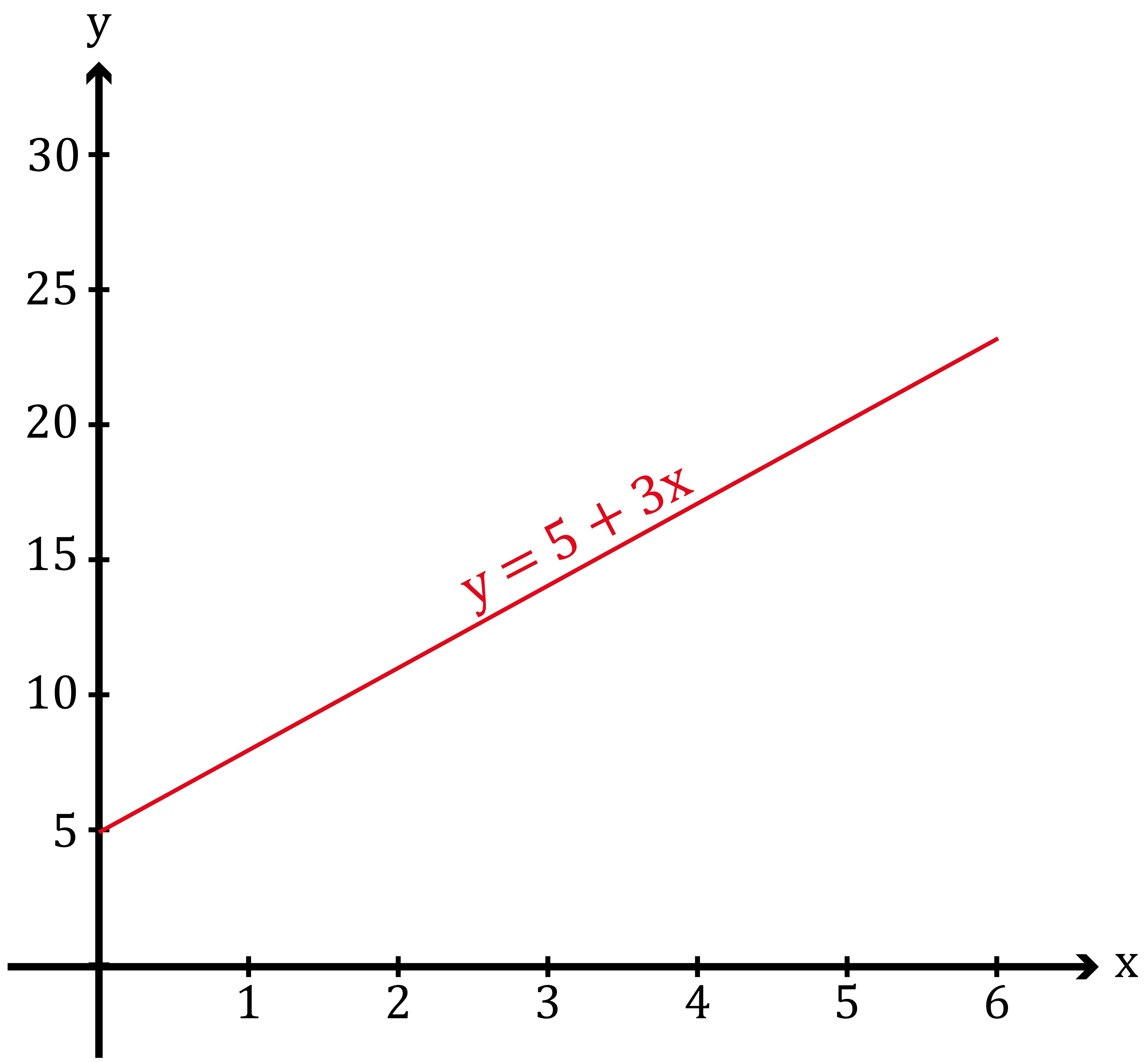
Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen sind Gleichungen, bei denen die Variablen linear miteinander verbunden sind:

$$y = mx + c$$

Wir bezeichnen m als Steigung und c als Achsenabschnitt.

Die Lösung von linearen Gleichungen ist sehr einfach.



Löse die folgenden linearen Gleichungen, d. h. finde den Wert von „x“ für den die Gleichung erfüllt ist.

$5x + 7 = 2x \quad | -5x$

$\Leftrightarrow \quad 7 = -3x \quad | \div(-3)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{7}{-3} = \frac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}}$

$\sqrt{2}x = 2 \quad | \div\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$3x + 4 = 4x + 3 \quad | -4$

$\Leftrightarrow \quad 3x = 4x - 1 \quad | -4x$

$\Leftrightarrow \quad -x = -1 \quad | \cdot(-1)$

$\Leftrightarrow \quad -x \cdot (-1) = -1 \cdot (-1)$

$\Rightarrow \quad x = 1$

$x - 8 = \frac{x + 8}{2} \quad | \cdot 2$

$\Leftrightarrow \quad 2x - 16 = x + 8 \quad | +16$

$\Leftrightarrow \quad 2x = x + 24 \quad | -x$

$\Rightarrow \quad x = 24$

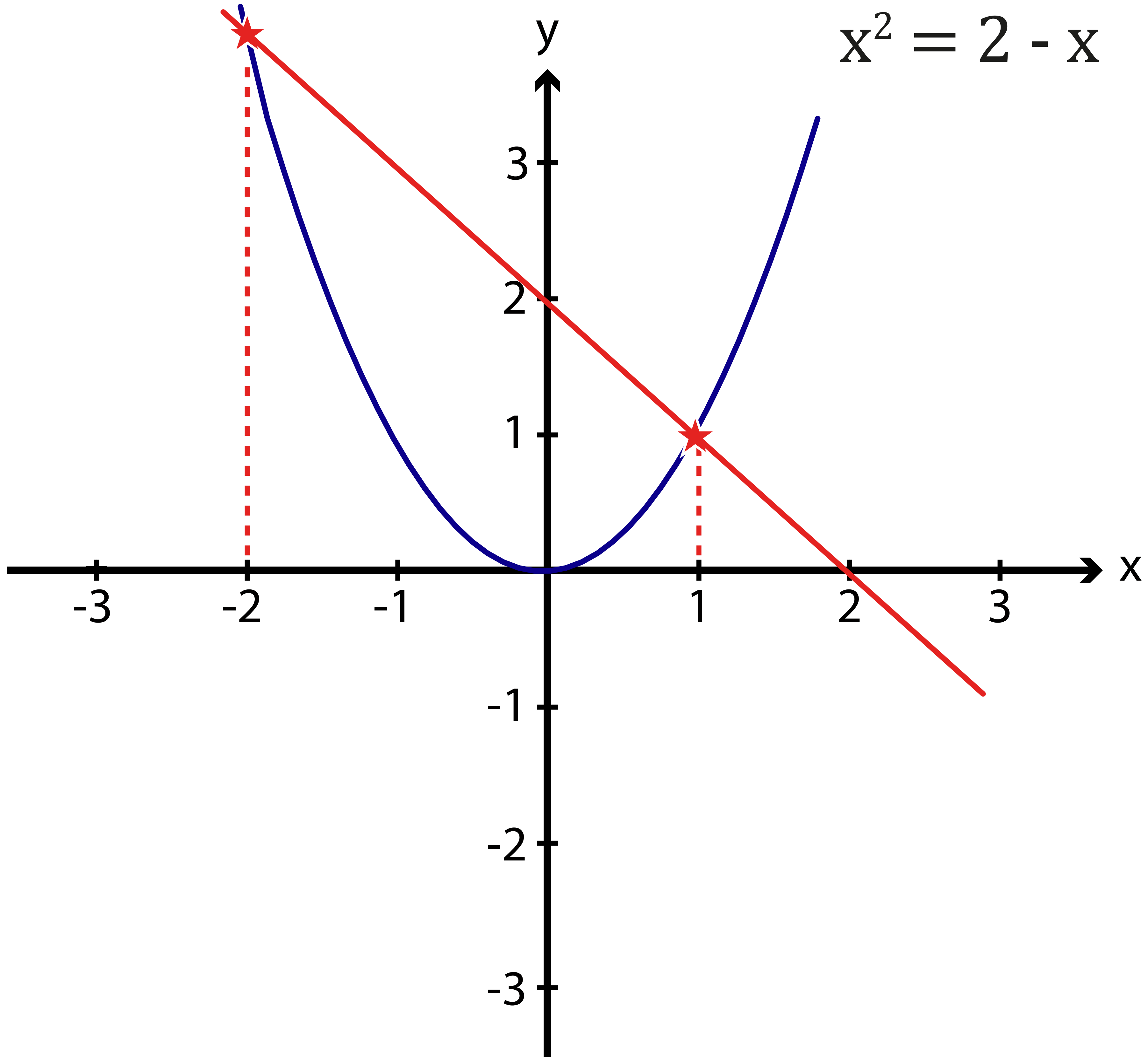
Quadratische Gleichungen

Gleichungen, in denen die gesuchte Variable sowohl linear, als auch quadratisch vorkommt, können wir nicht einfach nach x auflösen.

$$x^2 = 2 - x$$

Wir bringen sie stattdessen in die folgende Form, um die Mitternachtsformel anwenden zu können!

$$ax^2 + bx + c = 0$$



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

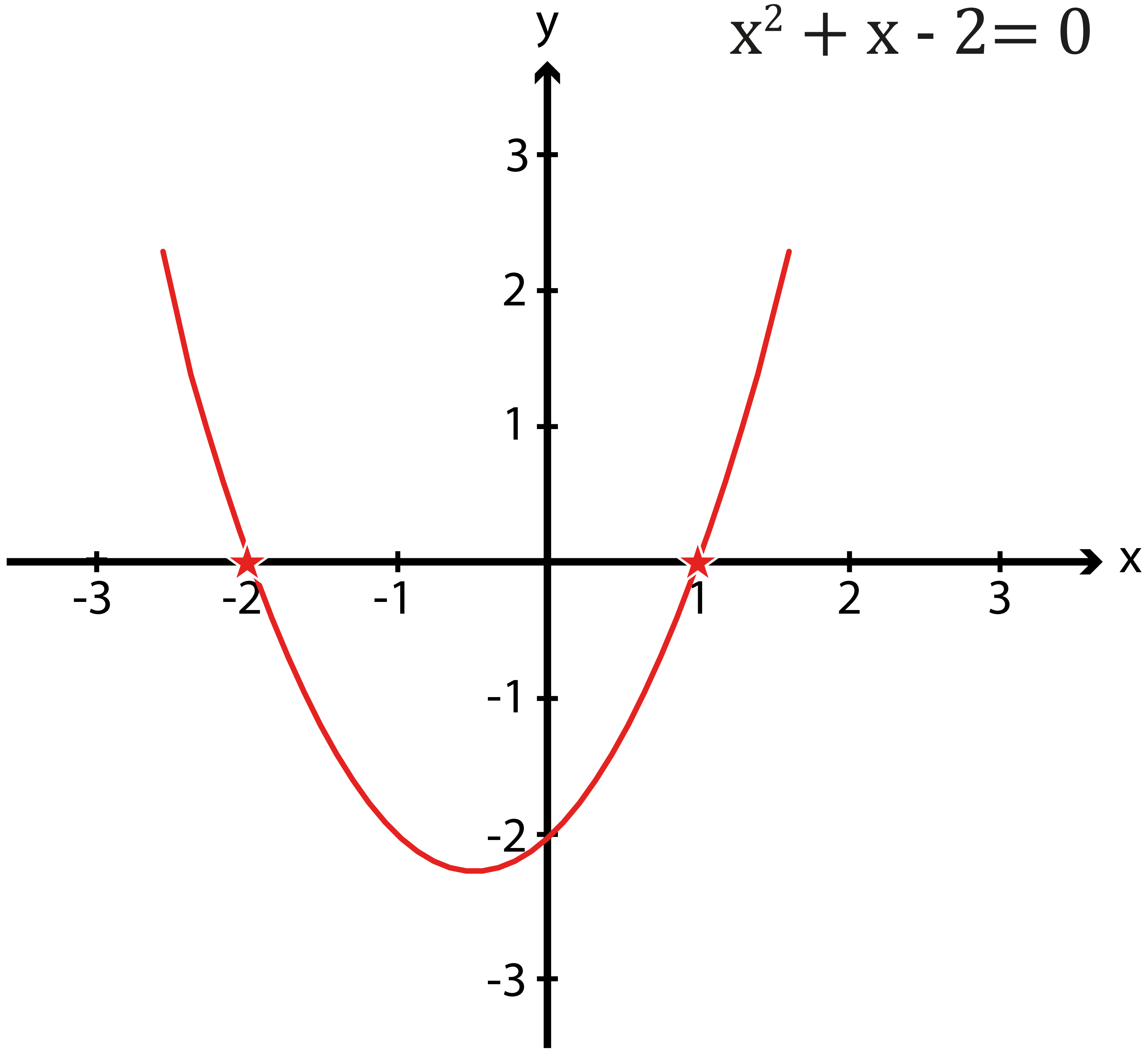
Quadratische Gleichungen

Wir identifizieren die Koeffizienten a, b und c und setzen diese in die Mitternachtsformel ein!

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \qquad \underbrace{x^2}_{a=1} + \underbrace{x}_{b=1} \underbrace{-\,2}_{c=-2} = 0$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 1$$



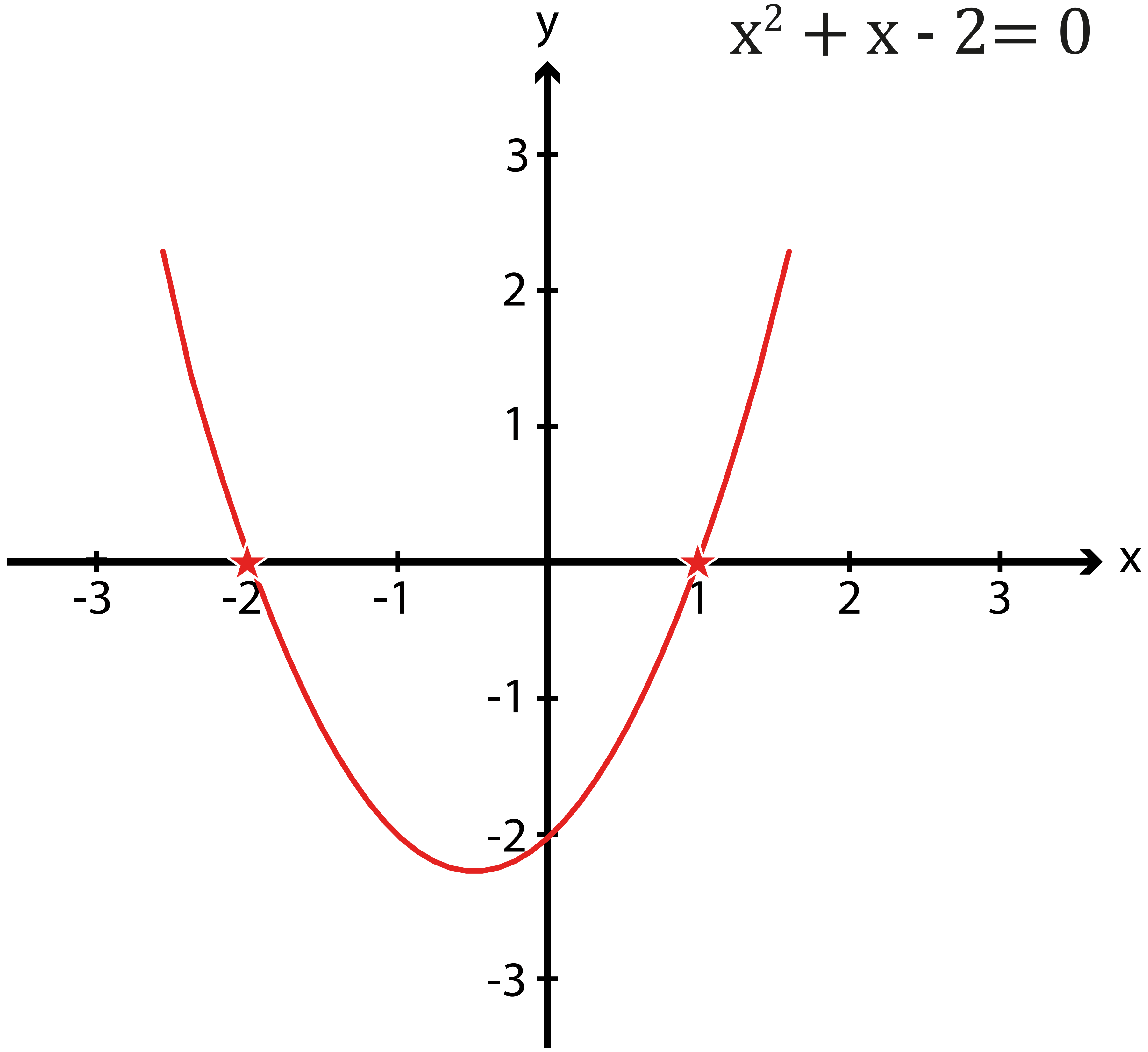
Quadratische Gleichungen

Im gegebenen Beispiel hat die Mitternachtsformel zwei verschiedene Lösungen:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Abhängig vom Ausdruck unter der Wurzel (sogenannte Diskriminante) kann sie auch nur eine oder keine Lösung haben.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Finde alle Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

$$x^2 + 5x = 50 \quad |-50$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 50 = 0$$

$a = 1$
$b = 5$
$c = -50$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 200}}{2}$$

$$= \frac{-5 \pm 15}{2} \Rightarrow x_1 = -10, \quad x_2 = 5$$

$$x^2 = 4(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4x + 4 \quad |-x^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = -x^2 + 4x + 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 16}}{-2}$$

$$x + \frac{2}{x} = 3 \quad | \cdot x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 = 3x \quad |-3x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 1$

Weitere Gleichungen

Für Polynomgleichungen ab dem dritten Grad gibt es keine Lösungsformel mehr.

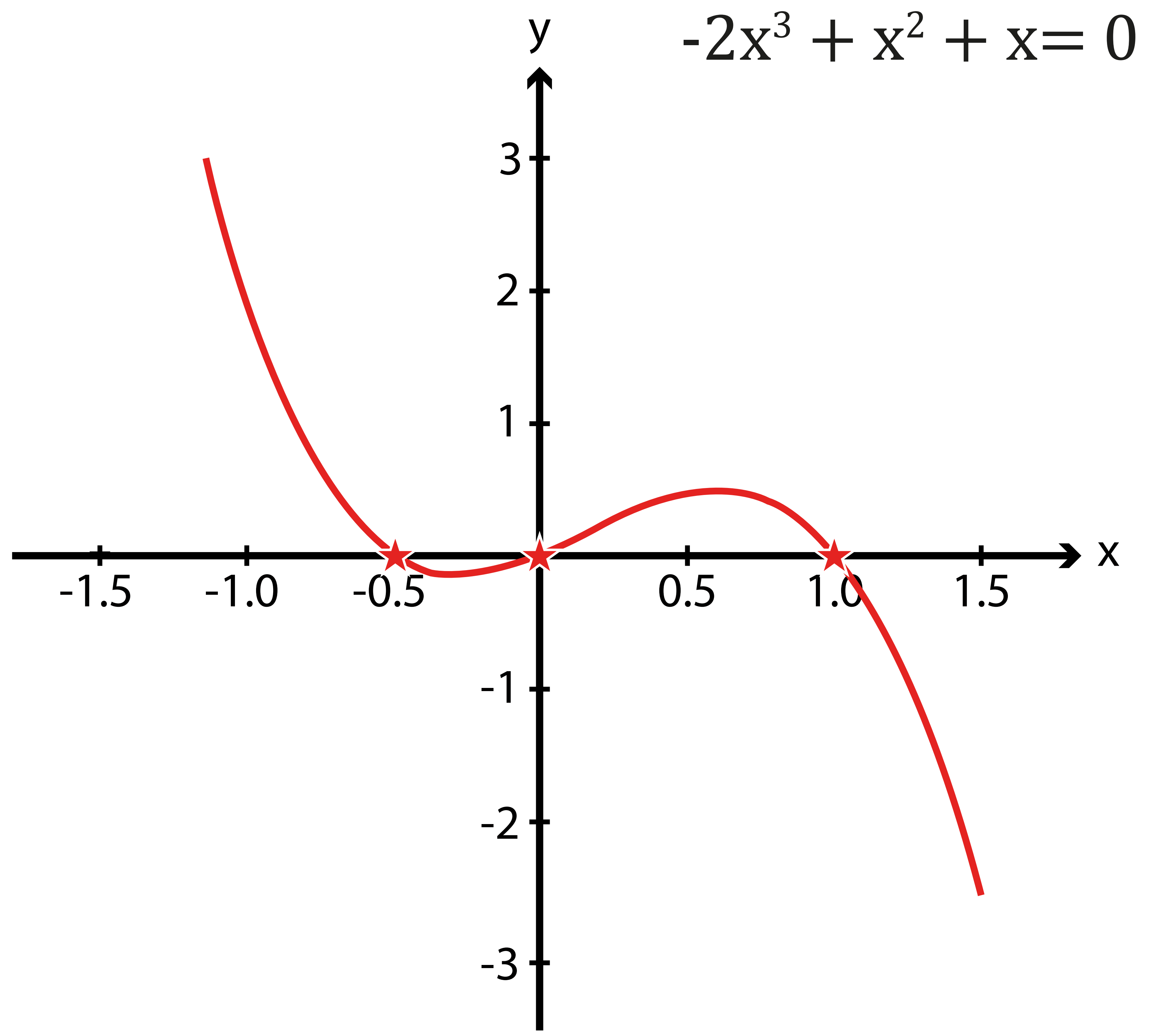
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Wie können wir diese trotzdem lösen? Am einfachsten ist es, wenn wir x ausklammern können!

$$-2x^3 + x^2 + x = 0 \qquad | \, x(\ldots)$$

$$\Leftrightarrow \quad x(-2x^2 + x + 1) = 0$$

Die linke Seite ist null, wenn entweder die Klammer oder der Vorfaktor null ist!



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Weitere Gleichungen

Wenn wir x nicht ausklammern können, aber dafür bereits eine Nullstelle kennen können wir Polynomdivision anwenden.

Das Vorgehen entspricht der schriftlichen Division aus der Grundschule, nur dass wir Monome statt Zahlen haben.

Durch die Polynomdivision erhalten wir ein neues Polynom mit den noch unbekannten Nullstellen, aber kleinerem Grad.

$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ Nullstelle bei $x=1$

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 7x^2 + 14x - 8 \;/\; (x - 1) = \underbrace{x^2 - 6x + 8}_{\text{Jetzt können wir die Mitternachtsformel anwenden!}} \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad - 6x^2 + 14x - 8 \\
\quad \underline{-(6x^2 + 6x)} \\
\qquad\qquad 8x - 8 \\
\qquad\quad \underline{-(8x - 8)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Weitere Gleichungen

Potenzgleichungen, bei denen die Basis gesucht ist, können wir durch potenzieren beider Seiten lösen.

beide Seiten hoch dem Kehrwert

$$x^{1.5} = 125z^2 \qquad | \, (\ldots)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^{1.5})^{\frac{2}{3}} = (125z^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 25z^{\frac{2}{3}}$$

Regeln für Potenzen

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$a^b / a^c = a^{b-c}$$

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

$$a^c / b^c = (a / b)^c$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

Weitere Gleichungen

Potenzgleichungen, bei denen der Exponent gesucht ist, können wir durch logarithmieren beider Seiten lösen.

$$
\begin{aligned}
& 2^x = 32 \qquad \mid \log_2(...) \\
\Leftrightarrow\quad & \log_2(2^x) = \log_2(32) \\
\Leftrightarrow\quad & x \log_2(2) = 5 \\
\Rightarrow\quad & x = 5
\end{aligned}
$$

Logarithmen

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$$

$$\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Weitere Gleichungen

Gleichungen bei denen die Variable in einem Logarithmus gefangen ist können wir lösen, indem wir beide Seiten zu einem Exponenten einer Potenz machen!

$$\log_{10}(2x+4) = 1 \qquad | \; 10^{(\ldots)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 10^{\log_{10}(2x+4)} = 10^1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x+4 = 10$$

$$\Rightarrow \quad x = 3$$

Logarithmen

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$$

$$\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$$

Finde alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$x^3 - x = 0 \quad | \, x(\ldots)$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-1) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$x_{2,3} = \frac{0 \pm \sqrt{0+4}}{2}$$

$$x_2 = 1 \qquad x_3 = -1$$

$$1000 \cdot 1.05^x = 1102.5 \quad | :1000$$

$$\Leftrightarrow 1{,}05^x = 1{,}1025 \quad | \log_{1,05}(\ldots)$$

$$\Leftrightarrow \log_{1,05}(1{,}05^x) = \log_{1,05}(1{,}1025)$$

$$\Leftrightarrow x \log_{1,05}(1{,}05) = \ldots\ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\log_{1,05}(1{,}1025) = \frac{\log_{10}(1{,}1025)}{\log_{10}(1{,}05)}$$

$$\log_{10}(50) = \log_{10}\left(\frac{5}{x}\right) + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}(50) - \log_{10}\left(\frac{5}{x}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}\left(\frac{50}{5/x}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}(10x) = 2 \quad | \, 10^{\cdots\cdots}$$

$$\Leftrightarrow 10^{\log_{10}(10x)} = 10^2$$

$$\Leftrightarrow 10x = 100$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Gleichungssysteme

Gleichungssysteme bestehen aus mehreren Gleichungen, die mehrere Variablen miteinander verknüpfen.

Lineare Gleichungssysteme sind Gleichungssysteme, in denen die Variablen ausschließlich linear vorkommen, d. h. keine Quadrate, Wurzeln, Logarithmen usw.

Lösungen sind Werte für Variablen, mit denen alle Gleichungen des Systems gleichzeitig erfüllt sind. Im Beispiel rechts ist die Lösung x=1, y=2 und z=3.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 7 \\ x + 2y + z &= 8 \\ x + y + 2z &= 9 \end{aligned} \qquad \text{Lineares GS}$$

$$\begin{aligned} 2\cdot 1 + 2 + 3 &= 7 \\ 1 + 2\cdot 2 + 3 &= 8 \\ 1 + 2 + 2\cdot 3 &= 9 \end{aligned} \qquad \text{Lösung}$$

Gleichungssysteme

Nicht jedes Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. Es gibt Gleichungssysteme, die keine Lösung haben und Gleichungssysteme, die unendlich viele Lösungen haben.

- Weniger Gleichungen als Variablen
- Abhängige Gleichungen
- Widersprüchliche Gleichungen

Unendlich viele Lösungen

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$$

Keine einzige Lösung

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ -x - y &= 2 \end{aligned}$$

Gleichungssysteme

Es gibt umständliche, aber verlässliche Algorithmen, mit denen wir lineare Gleichungssysteme lösen können.

Diese lernen wir später kennen. Einfachere Gleichungssysteme können wir mit geschickten Äquivalenzumformungen lösen.

- Auflösen und Einsetzen
- Gleichungen addieren/subtrahieren
- Rechte/Linke Seite Gleichsetzen

Genau eine Lösung möglich!

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Auflösen und Einsetzen

$$x + 2y = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 - 2y$$
$$3x + y = 5$$

$$\Rightarrow \quad 3(5-2y) + y = 5$$
$$\Leftrightarrow \quad 15 - 6y + y = 5$$
$$\Leftrightarrow \quad -5y = -10$$
$$\Rightarrow \quad y = 2$$
$$\Rightarrow \quad x = 1$$

Addieren / Subtrahieren

$$\begin{array}{rrl} & x + 2y & = 5 \\ - & 3x + y & = 5 \\ - & 3x + y & = 5 \\ \hline & -5x & = -5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = 1$$
$$\Rightarrow \quad y = 2$$

Seiten Gleichsetzen

... muss das auch gleich sein!

$$x + 2y = 5$$
$$3x + y = 5$$

wenn das gleich ist ...

$$\Rightarrow \quad x + 2y = 3x + y$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 2x$$

$$x + 2(2x) = 5$$

$$\Rightarrow \quad x = 1, y = 2$$

Finde die Lösung folgender Gleichungssysteme:

$$5x - 5y = 10$$
$$x + 2y = 8 \iff x = 8 - 2y$$

$$5(8-2y) - 5y = 10$$
$$\iff 40 - 10y - 5y = 10$$
$$\iff -15y = -30 \Rightarrow y = 2$$
$$x = 4$$

$$x + y + z = 12$$
$$4x - y - z = 3$$
$$x + 2y - 3z = -4$$

$$\begin{array}{rl} & x + y + z = 12 \\ + & 4x - y - z = 3 \\ \hline & 5x = 15 \end{array}$$
$$\Rightarrow x = 3$$

$$3 + y + z = 12 \iff y + z = 9$$
$$12 - y - z = 3 \iff -y - z = -9 \iff -2y - 2z = -18$$
$$3 + 2y - 3z = -4 \iff 2y - 3z = -7$$

$$\begin{array}{rl} & -2y - 2z = -18 \\ + & 2y - 3z = -7 \\ \hline & -5z = -25 \end{array}$$
$$\Rightarrow z = 5$$
$$y = 4$$

Einheit III

Der Name "Analysis I" verrät uns zwei Dinge:

Wir werden etwas analysieren. Konkret wird es um Funktionen und eine Vielzahl von Eigenschaften gehen, auf die wir diese Funktionen untersuchen können.

Es gibt eine später "Analysis II". Die Besonderheit von Analysis I ist, dass wir uns auf Funktionen mit genau einer Variable beschränken.

Analysis I

- Funktionen
- Grenzwerte
- Stetigkeit
- Differenzierbarkeit
- Ableitung

III

Funktionen

Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jedem Element aus einer Menge M genau ein Element einer Menge N zuordnet:

$$f\colon M \longrightarrow N$$

Wir bezeichnen die Menge M als Definitionsbereich und die Menge N als Wertebereich. Bei unseren Funktionen werden diese Bereiche immer Teilmengen der reellen Zahlen sein:

$$\text{mit } M \subseteq \mathbb{R},\ N \subseteq \mathbb{R}$$

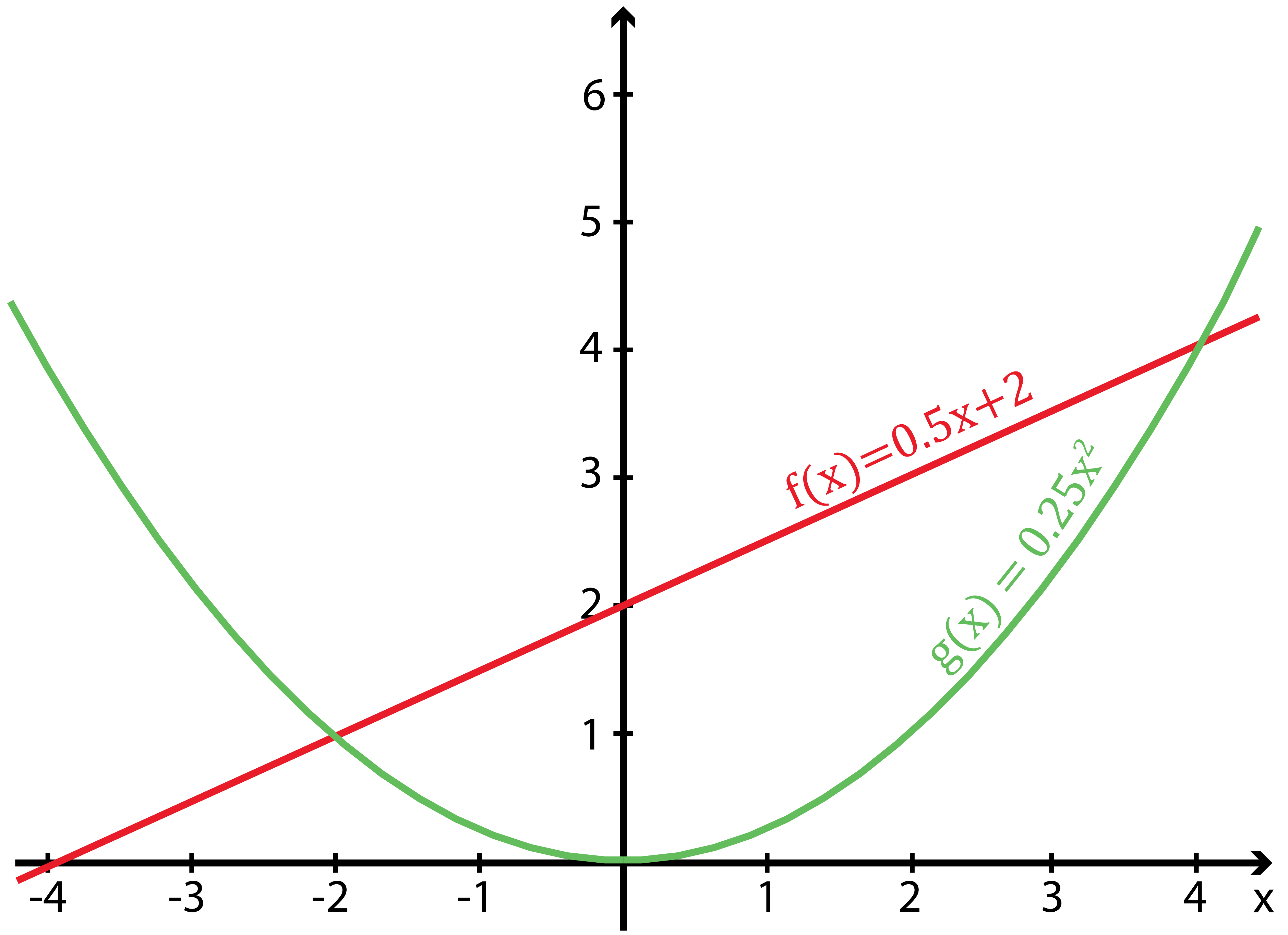
Funktionen

Funktionen bestehen aus einem Namen, einer Auflistung von Variablen in Klammern und einer Rechenvorschrift.

Zwei einfache Beispiele:

$$f(x) = 0.5x + 2 \qquad f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = 0.25x^2 \qquad g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$



Funktionen

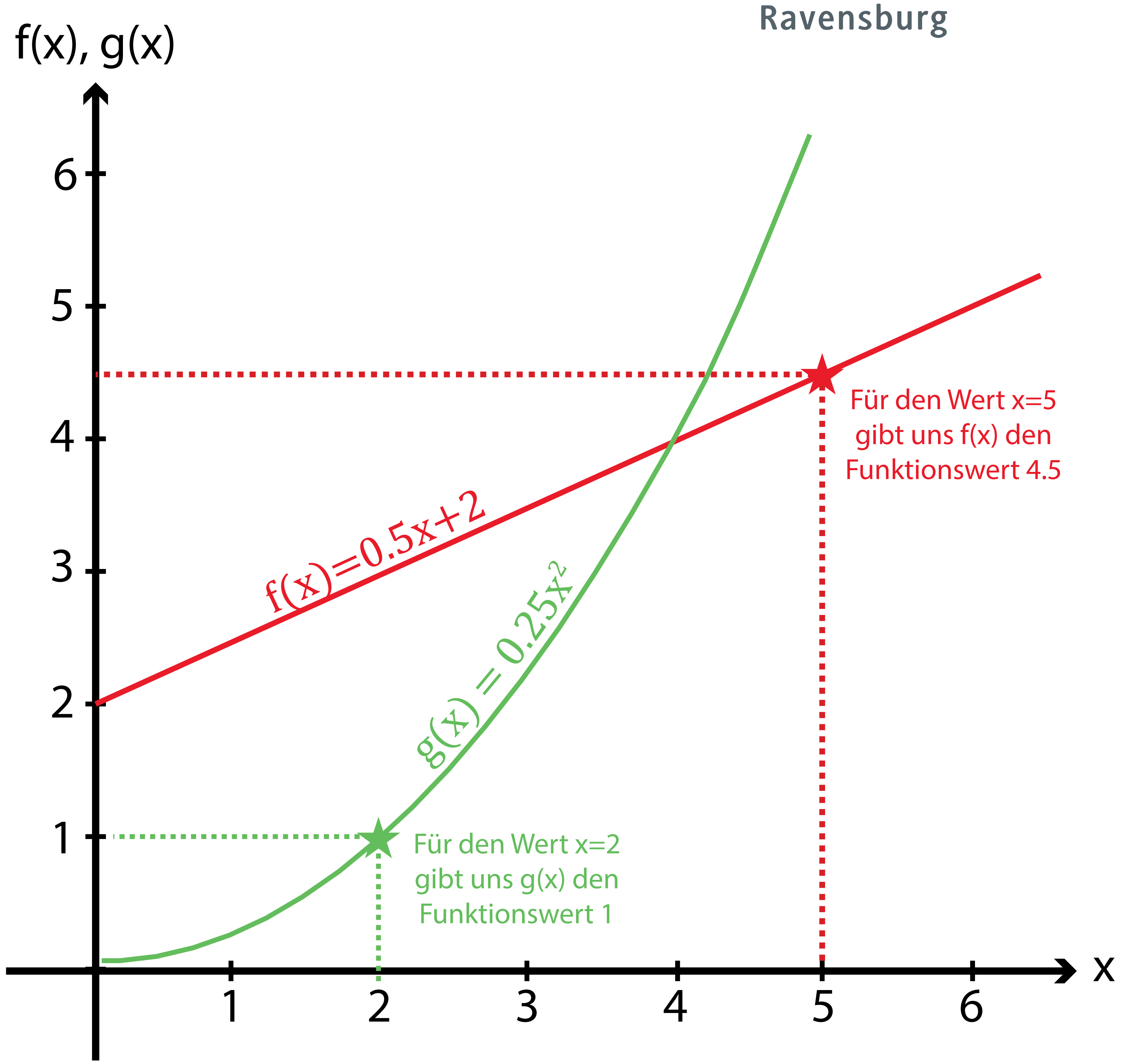
Übergeben wir der Funktion Werte für ihre Variablen, erhalten wir einen Funktionswert.

$$f(x) = 0.5x + 2$$

$$f(5) = 0.5 \cdot 5 + 2 = 4.5$$

$$g(x) = 0.25x^2$$

$$g(2) = 0.25 \cdot 2^2 = 1$$

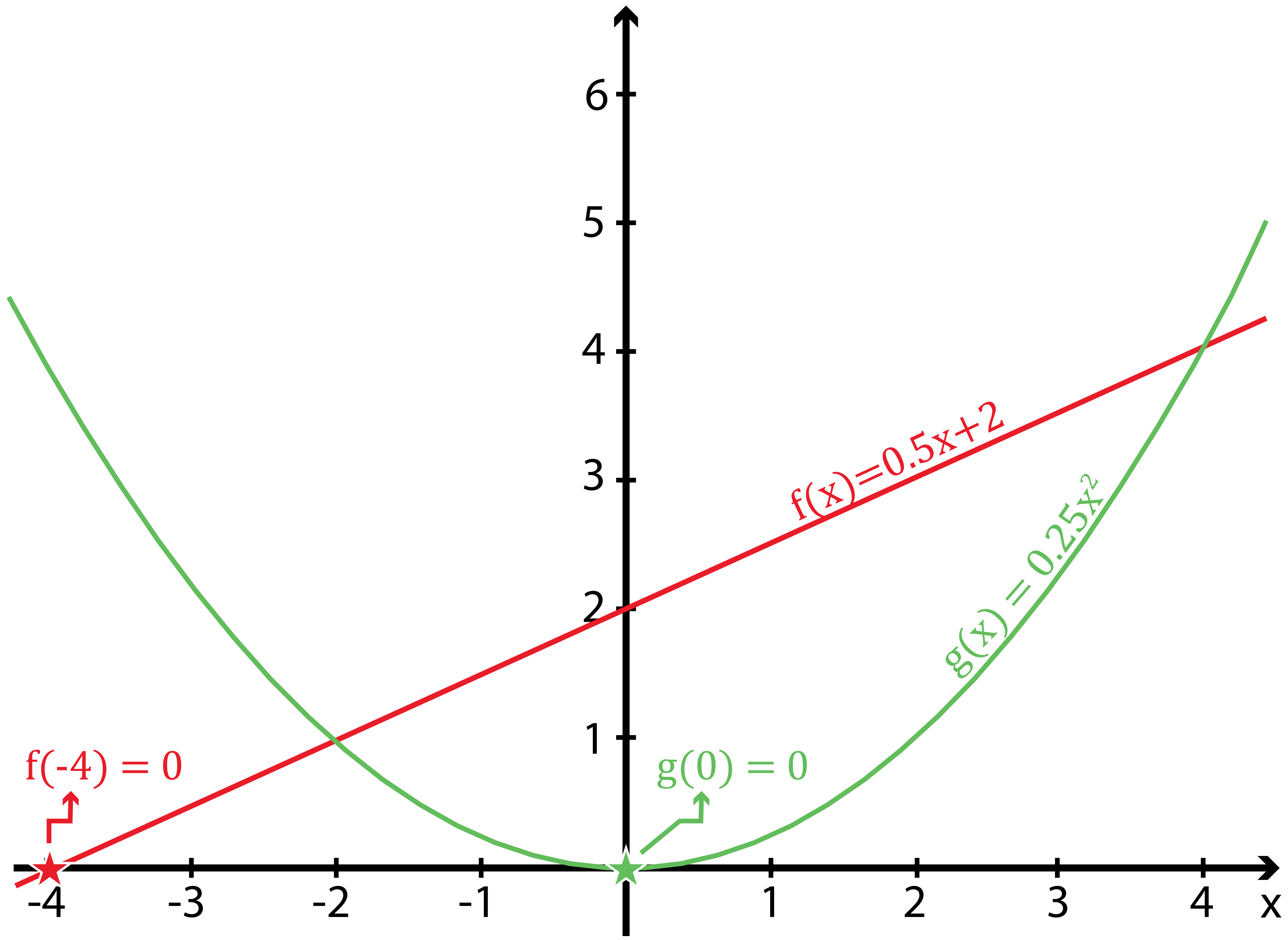


DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Nullstellen

Neben Funktionswerten an bestimmten Stellen suchen wir oft die **Nullstellen** einer Funktion. Um diese zu finden, setzen wir die Funktion gleich 0 und lösen die entstehende Gleichung!

$$
\begin{aligned}
f(x) = 0.5x + 2 &\overset{!}{=} 0 && \mid -2 \\
\Leftrightarrow \quad 0.5x &= -2 && \mid : 0.5 \\
\Longrightarrow \quad x &= -4
\end{aligned}
$$



DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

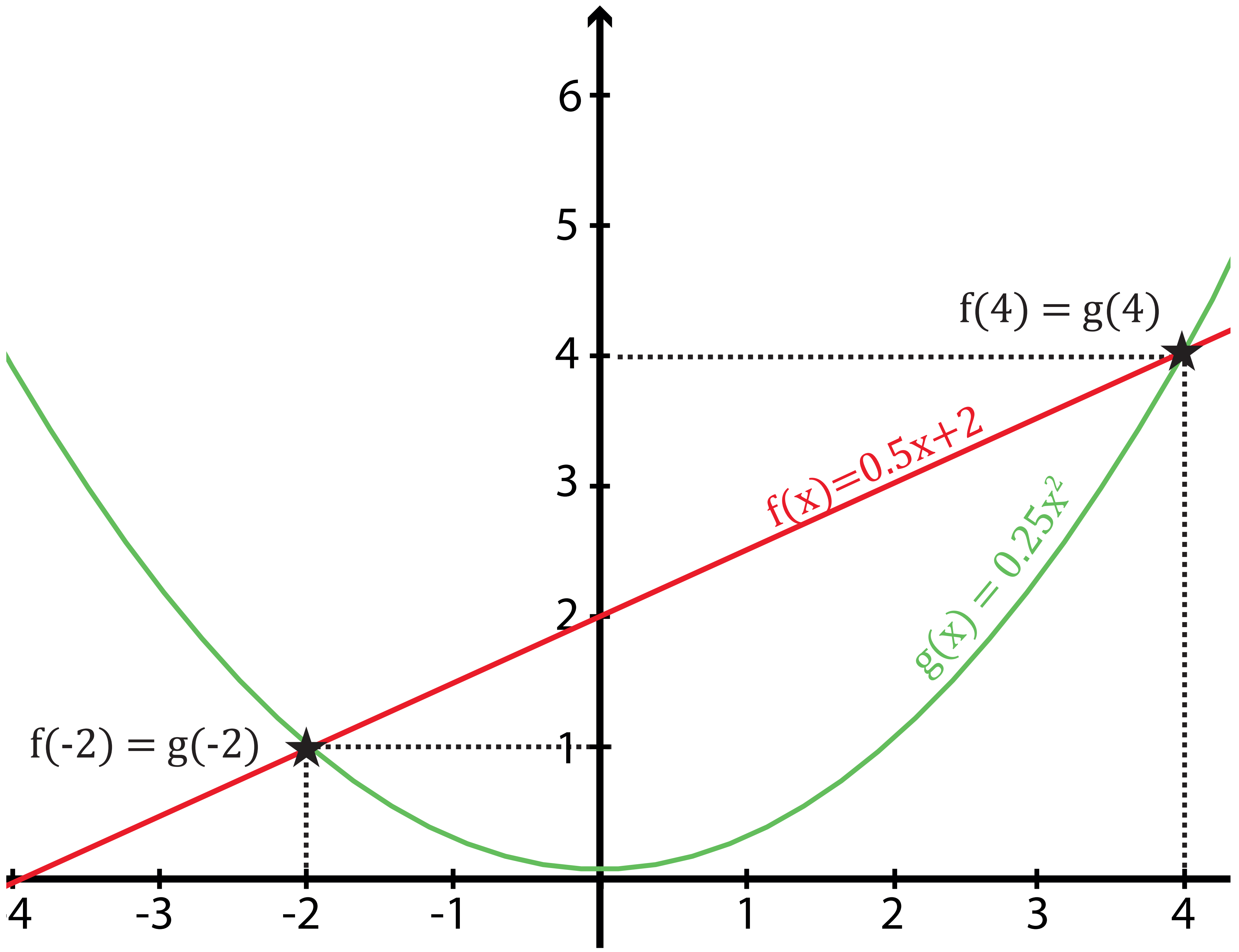
Schnittstellen

Auch bei der Suche nach den **Schnittstellen** einer Funktion arbeiten wir mit Gleichungen: Wir setzen die beiden Funktionen gleich und finden dadurch Werte, bei denen beide Funktionen denselben Wert aufweisen.

$$0.5x + 2 \overset{!}{=} 0.25x^2 \quad | - 0.25x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -0.25x^2 + 0.5x + 2 = 0 \quad | \text{ MN-Formel}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -2 \ \text{ und } x_2 = 4$$



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Finde alle Nullstellen der Funktionen f und g, sowie die Schnittpunkte der beiden Funktionen.

$f(x) = x^2 + x \overset{!}{=} 0 \quad | \, x(\ldots)$

$\Leftrightarrow x(x+1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -1$

$g(x) = x + 2 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow x = -2$

$x^2 + x \overset{!}{=} x + 2 \quad | -x$

$\Leftrightarrow x^2 = 2 \quad | \sqrt{\ldots}$

$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2} \quad x_2 = -\sqrt{2}$

$f(x) = \ln(x^2) \overset{!}{=} 0 \quad | \, e^{\ldots}$

$\Leftrightarrow e^{\ln(x^2)} = e^0$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -1$

$g(x) = \ln(2x) - \ln(x) \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(2) = 0 \quad ↯$

$\ln(x^2) \overset{!}{=} \ln(2) \quad | \, e^{\ldots}$

$\Leftrightarrow e^{\ln(x^2)} = e^{\ln(2)}$

$\Leftrightarrow x^2 = 2$

$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2} \quad x_2 = -\sqrt{2}$

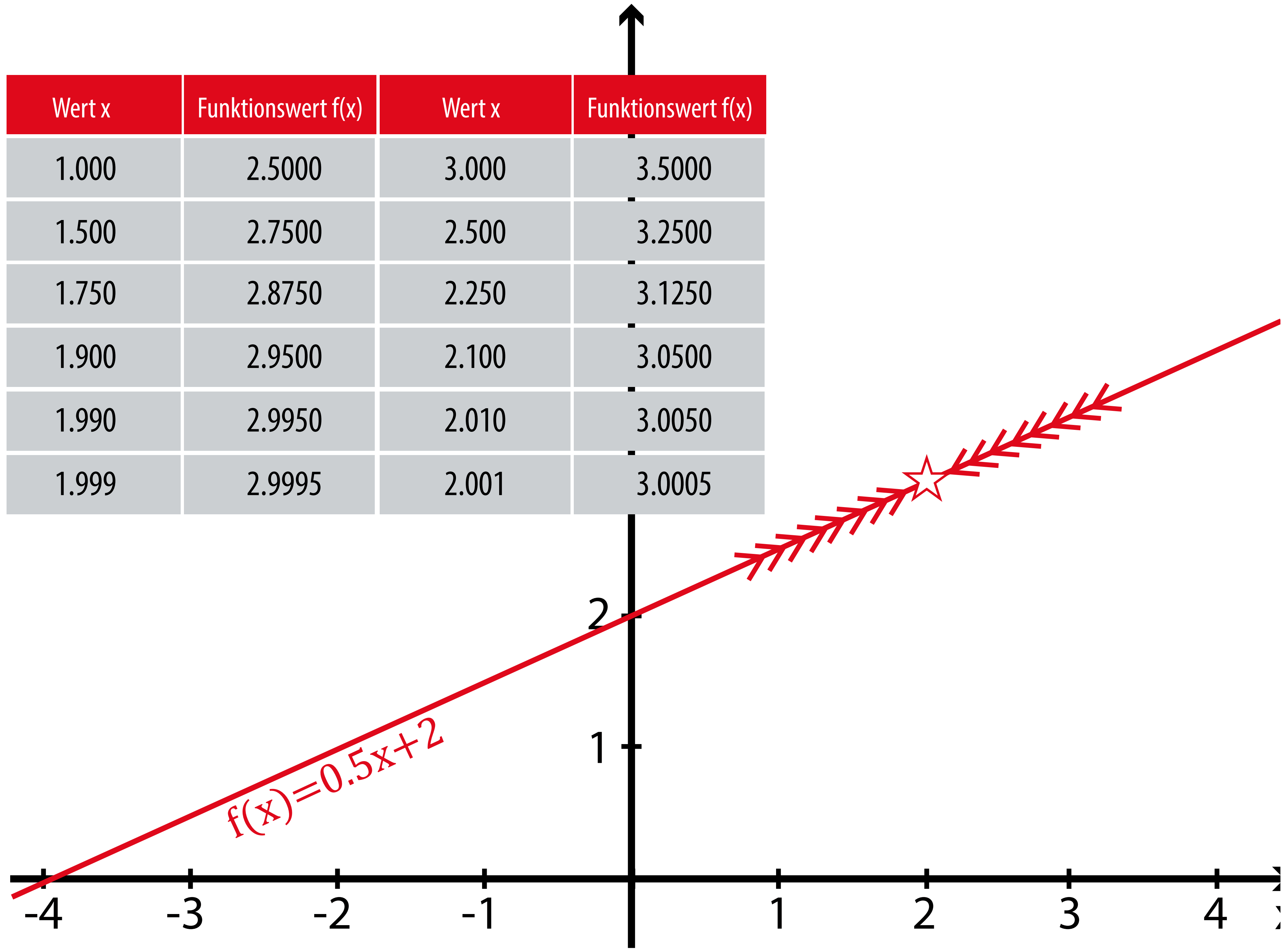
Grenzwerte

Bei einem Grenzwert untersuchen wir, gegen welchen Wert der Funktionswert strebt, wenn wir eine Variable immer näher an einem bestimmten Wert legen.

$$f(x) = 0.5x + 2 = 0 \qquad \lim_{x \longrightarrow 2} f(x) = 3$$

An vielen Stellen ist eine Grenzwertbetrachtung witzlos. Das Ergebnis entspricht dem Funktionswert.

Wert x	Funktionswert f(x)	Wert x	Funktionswert f(x)
1.000	2.5000	3.000	3.5000
1.500	2.7500	2.500	3.2500
1.750	2.8750	2.250	3.1250
1.900	2.9500	2.100	3.0500
1.990	2.9950	2.010	3.0050
1.999	2.9995	2.001	3.0005



Grenzwerte

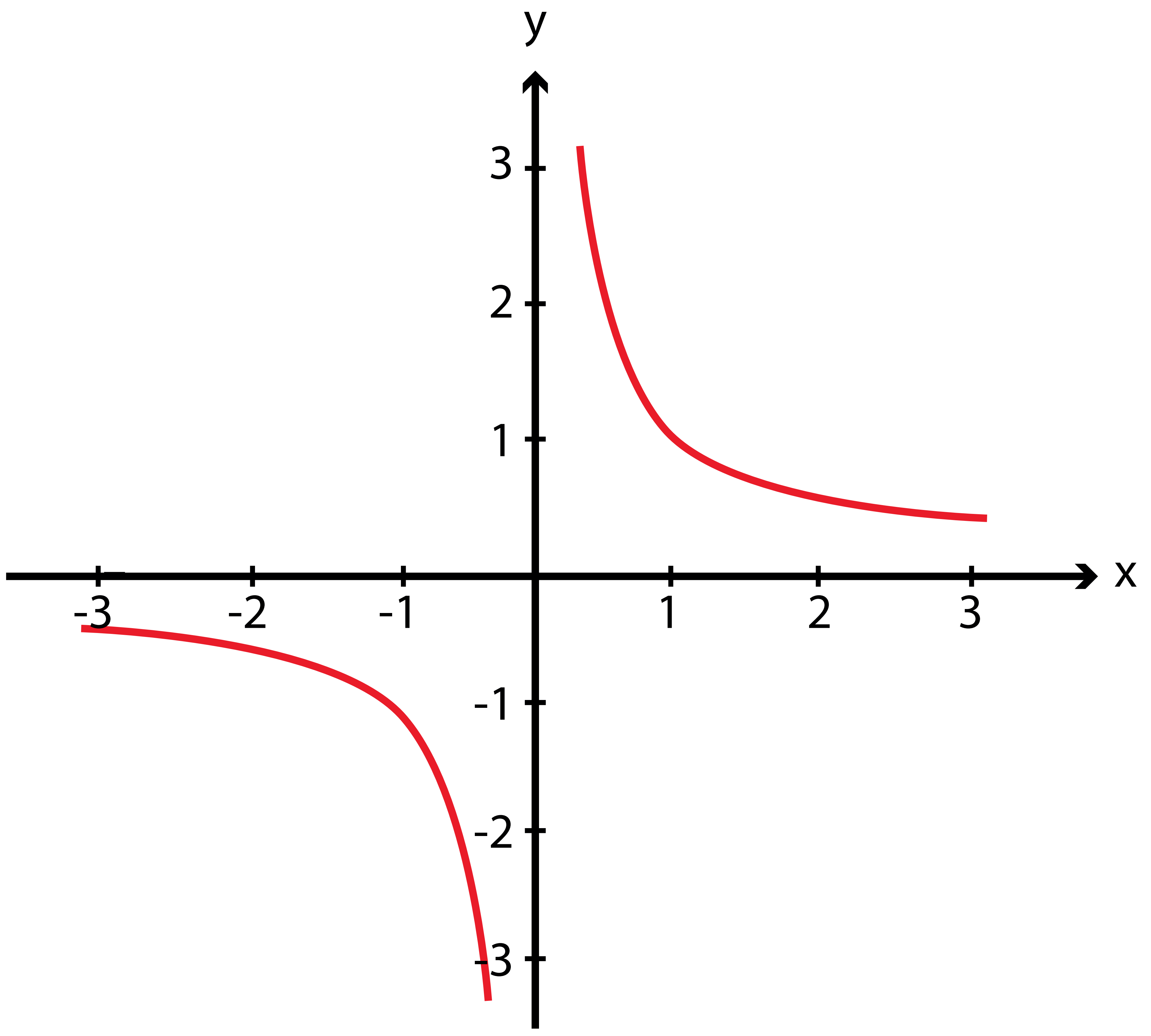
Der Grenzwert ist dann interessant, wenn wir eine Stelle betrachten, die wir in die Funktion nicht einsetzen können. Entweder weil die Funktion dort nicht definiert ist oder ...

$$f(x) = 1/x \qquad \lim_{x \to 0+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$$

... weil wir den Wert gegen unendlich gehen lassen!

$$f(x) = 1/x \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

Aber wie können wir diese Grenzwerte berechnen, wenn wir sie nicht wie hier aus einem Schaubild herausnehmen?



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg

Grenzwerte (unendlich)

Besteht die Funktion aus einem einzelnen Monom mit einem Exponenten aus den natürlichen Zahlen ...

$$f(x) = ax^b$$

... dann können wir den Grenzwert für x gegen unendlich aus der Tabelle rechts ablesen!

Grenzwerte von Monomen	$\lim_{x \to -\infty}$	$\lim_{x \to +\infty}$
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

Grenzwerte (unendlich)

Bei einer Polynomfunktion mit natürlichen Exponenten (aka. ganzrationale Funktion) betrachten wir das Monom mit dem höchsten Exponenten und wenden dieselbe Tabelle an.

$$f(x) = 3x^5 + 8x^4 - x^2 + x$$

Bei dem Beispiel oben betrachten wir nur $3x^5$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} 3x^5 = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 3x^5 = -\infty$$

Grenzwerte von Monomen	$\lim\limits_{x \to -\infty}$	$\lim\limits_{x \to +\infty}$
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

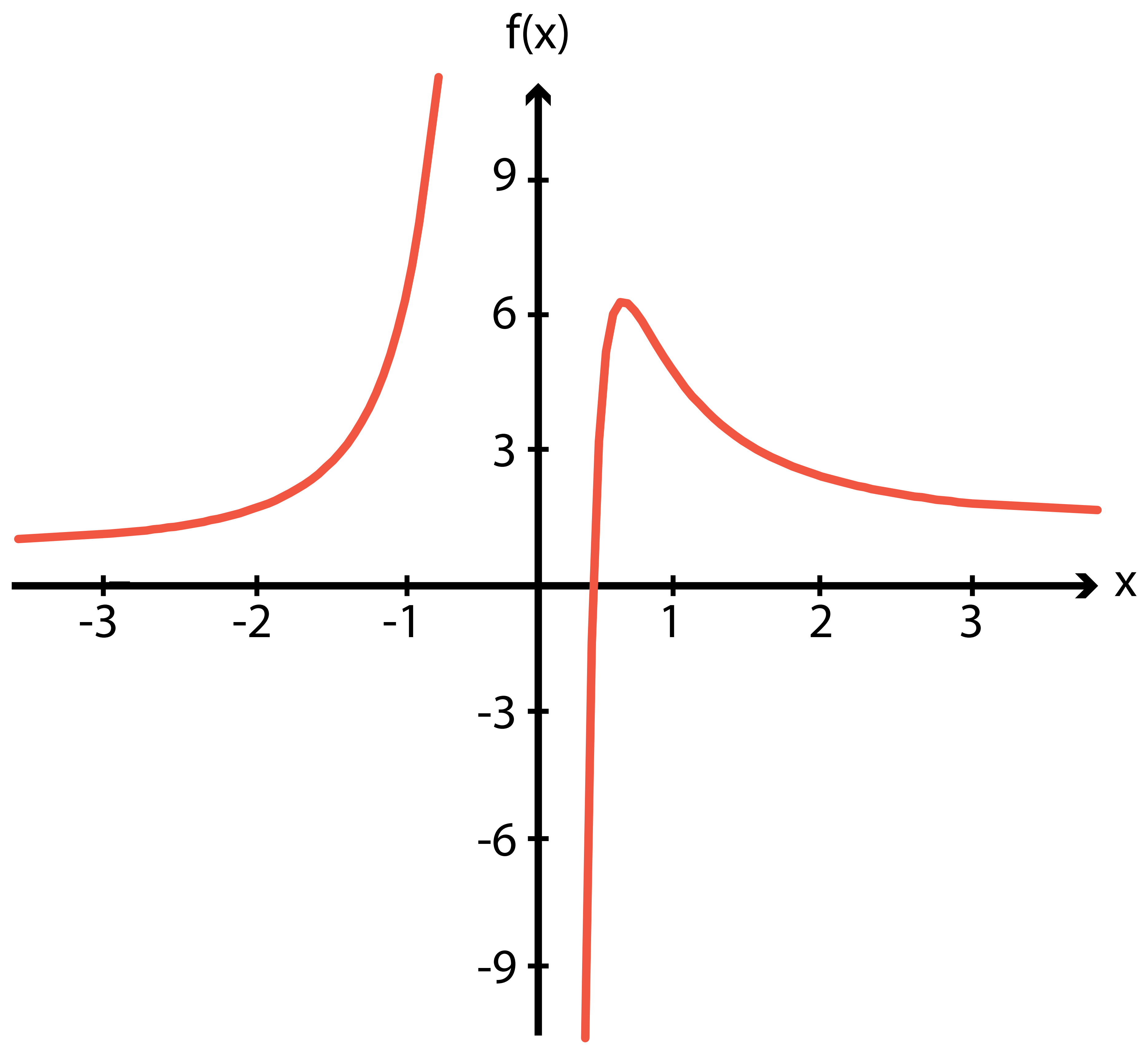
Grenzwerte (unendlich)

Gebrochen rationalen Funktion sind Quotienten zweier ganz-rationaler Funktionen. Bei diesen vergleichen wir die stärkste Potenz im Zähler mit der stärksten Potenz im Nenner.

$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x^3}$$

Ist die Potenz im Nenner stärker, ist der Grenzwert 0.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$



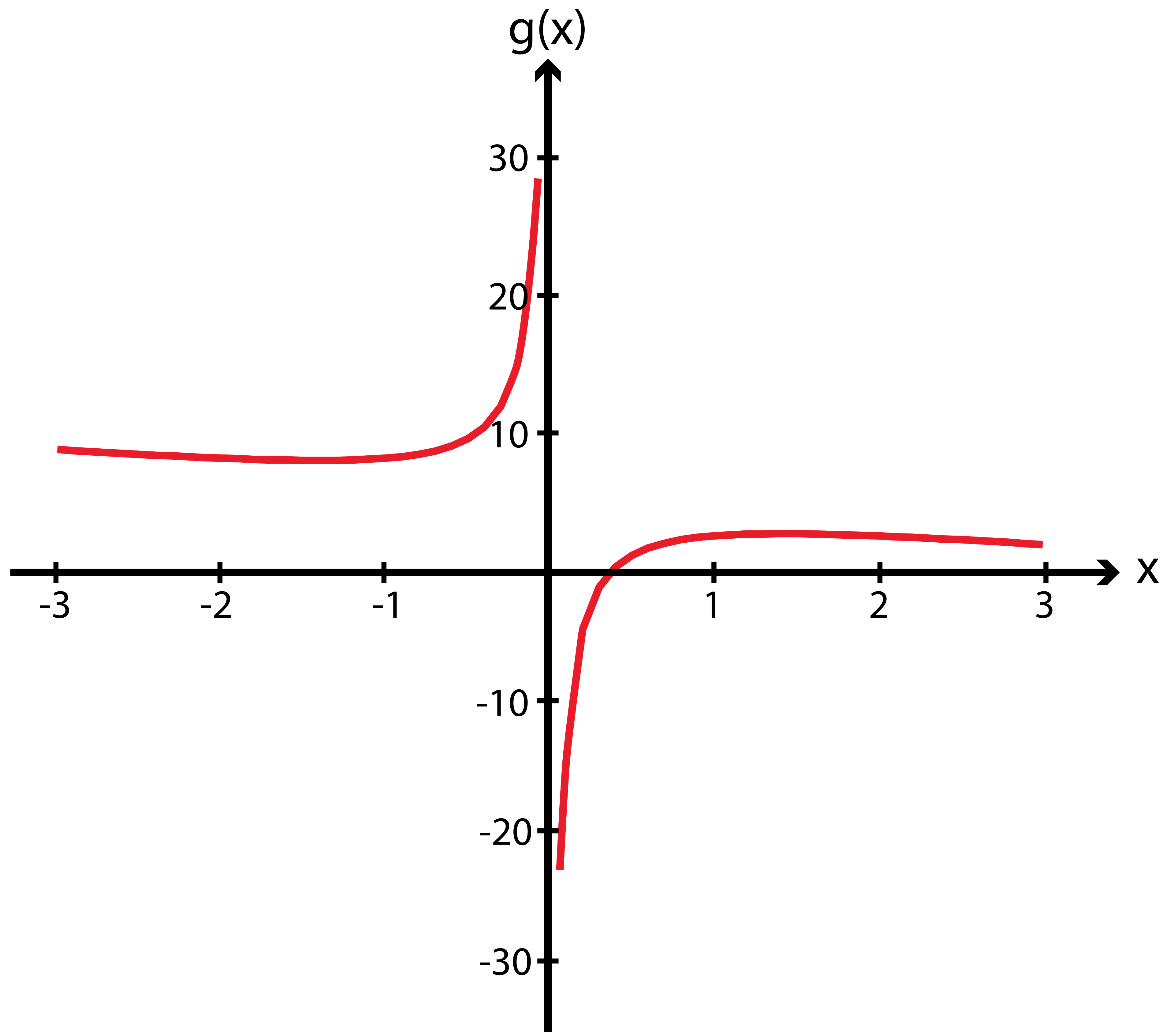
Grenzwerte (unendlich)

Gebrochen rationalen Funktion sind Quotienten zweier ganz-rationaler Funktionen. Bei diesen vergleichen wir die stärkste Potenz im Zähler mit der stärksten Potenz im Nenner.

$$g(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x}$$

Ist die Potenz im Zähler stärker, ist der Grenzwert unendlich. Das Vorzeichen ergibt sich "indirekt aus der Tabelle".

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \frac{-\infty}{-\infty} = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} g(x) = \frac{-\infty}{\infty} = -\infty$$



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

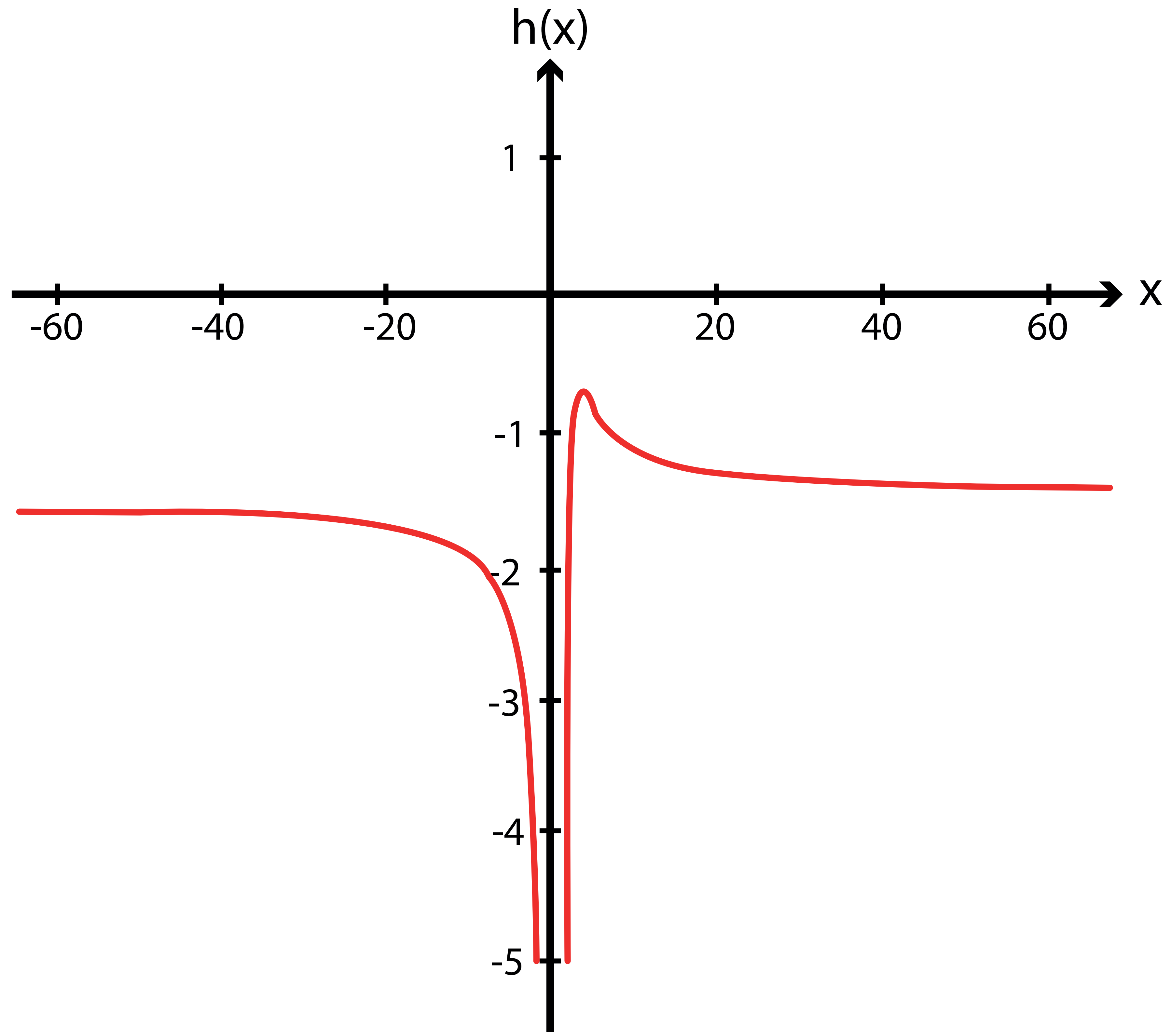
Grenzwerte (unendlich)

Gebrochen rationalen Funktion sind Quotienten zweier ganz-rationaler Funktionen. Bei diesen vergleichen wir die stärkste Potenz im Zähler mit der stärksten Potenz im Nenner.

$$h(x) = \frac{-3x^2 + 8x - 10}{2x^2}$$

Bei einem Gleichstand entspricht der Grenzwert dem Quotienten aus den beiden Vorfaktoren, hier -3 geteilt durch 2.

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\frac{3}{2} \quad \lim_{x \to \infty} h(x) = -\frac{3}{2}$$



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg

Grenzwerte (unendlich)

Logarithmen sind schwächer als Potenzen, auch wenn im Argument des Logarithmus x^2 oder Ähnliches steht.

$$f(x) = 3x^5 + 8x^4 - x^2 + x + \ln(x^3)$$

Bei dem Beispiel oben betrachten wir nur $3x^5$. Wir müssen allerdings achten, ob der Logarithmus nicht zu ungültigen Werten führt!

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} 3x^5 = \infty$$

$$\cancel{\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 3x^5 = -\infty}$$

Grenzwerte von Monomen	$\lim\limits_{x \to -\infty}$	$\lim\limits_{x \to +\infty}$
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

Grenzwerte (unendlich)

Exponentialfunktionen sind stärker als Potenzen, wenn ihr Exponent gegen $+\infty$ geht. Sie sind irrelevant, wenn ihr Exponent gegen $-\infty$ geht.

$$f(x) = -5x^4 + x^2 + e^x$$

Beim Grenzwert gegen $+\infty$ betrachten wir nur e^x

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -5x^4 = -\infty$$

Grenzwerte von Monomen	$\lim\limits_{x \to -\infty}$	$\lim\limits_{x \to +\infty}$
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

Gebe die Grenzwerte für x gegen plus und minus unendlich an!

$f(x) = \boxed{-3x^4} + 2x + 5$

Stärkste Potenz entscheidet
Vorfaktor negativ
Exponent gerade

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$g(x) = \dfrac{4x^5 - 3x}{2x^2}$

$= \dfrac{4x^4 - 3}{2x}$

Zähler setzt sich durch!

$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

$h(x) = e^{-x} - x^2$

$= \dfrac{1}{e^x} - x^2$

$\lim\limits_{x \to \infty} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} = \infty$

$k(x) = \dfrac{3x^4 + \ln(x)}{8x^4 - 20x}$

Gleichstand bei stärksten Potenz mit Exponent 4

$\lim\limits_{x \to \infty} k(x) = \frac{3}{8}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = ↯$

Wir dürfen wegen ln(x) nichts Negatives einsetzen!

Grenzwerte (Polstellen)

Polstellen sind Stellen einer Funktion, an denen wir durch 0 teilen würden. Im folgenden Beispiel dürfen wir keine 4 einsetzen, sonst teilen wir durch 0.

$$f(x) = \frac{1}{(x-4)}$$

Beim Grenzwert zu einer endlichen Stelle müssen wir unterscheiden, ob wir von links oder von rechts kommen. Das kann einen Unterschied machen, muss es aber nicht.

$$\lim_{x \to 4+} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to 4-} f(x) = -\infty$$

Grenzwerte von Polstellen	$\lim\limits_{x \to x_0-}$ von links	$\lim\limits_{x \to x_0+}$ von rechts
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg

Grenzwerte (Polstellen)

Verursachen mehrere Monome dieselbe Polstelle, müssen wir den Nenner näher untersuchen:

$$g(x) = \frac{1}{x^3 + x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)}$$

Jetzt können wir die Polstellen getrennt betrachten. Für die Polstelle bei der 0 gilt zum Beispiel:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to (-1)+} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to (-1)-} f(x) = -\infty$$

Grenzwerte von Polstellen	$\lim\limits_{x \to x_0-}$ von links	$\lim\limits_{x \to x_0+}$ von rechts
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

Grenzwerte (Polstellen)

Steht im Zähler keine feste Zahl, sondern ein von x abhängiger Ausdruck müssen wir dessen Vorzeichen an der entsprechenden Stelle überprüfen!

$$h(x) = \frac{-x^2 + 3x}{x - 2}$$

Hier wäre die Polstelle bei x=2 und der Zähler hätte dort den Wert +2. Dementsprechend gilt:

$$\lim_{x \to 2+} h(x) = \infty \quad \lim_{x \to 2-} h(x) = -\infty$$

Grenzwerte von Polstellen	$\lim\limits_{x \to x_0-}$ von links	$\lim\limits_{x \to x_0+}$ von rechts
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg

Grenzwerte (Sonstiges)

Nähert sich das Argument einer Wurzel der 0, strebt der Wert dieses Terms gegen 0.

$$\lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$$

Nähert sich das Argument eines Logarithmus der 0, strebt der Wert dieses Terms gegen minus unendlich.

$$\lim_{x \to 0+} \ln(x) = 0$$

Grenzwerte von Polstellen	$\lim\limits_{x \to x_0-}$ von links	$\lim\limits_{x \to x_0+}$ von rechts
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Gebe die Grenzwerte für alle Polstellen an!

$\frac{-2}{(x-3)^3}$

$$f(x) = \frac{+15}{-x^4} = \frac{-15}{x^4}$$

Polstelle $x=0$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$

$$g(x) = \frac{2x-8}{(x-3)^3}$$

Polstelle bei $x=3$

Zähler hat bei $x=3$ den Wert $2\cdot 3-8=-2$

$\lim_{x\to 3+} g(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 3-} g(x) = \infty$

$$h(x) = \frac{8}{x^2-2x+1} = \frac{8}{(x-1)^2}$$

Polstelle bei $x=1$

Gerader Exponent

$\lim_{x\to 0-} h(x) = \infty$

$\lim_{x\to 0+} h(x) = \infty$

$$k(x) = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

Polstellen bei $x=\pm 1$

Exponent ungerade

Vorfaktor bei $x=1$ positiv

$\lim_{x\to 1+} k(x) = \infty$ $\lim_{x\to 1-} k(x) = -\infty$

Vorfaktor bei $x=-1$ negativ

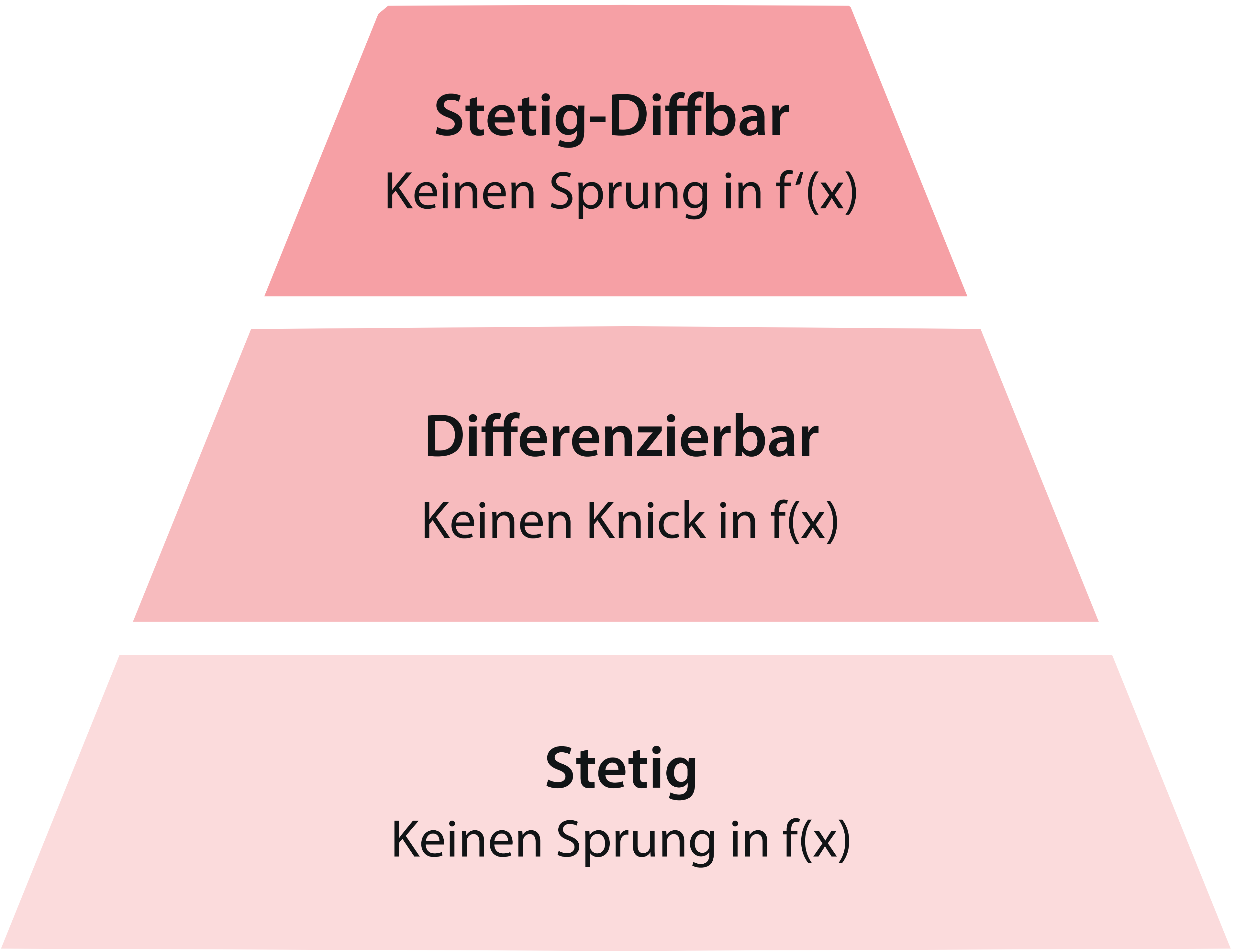
$\lim_{x\to -1+} k(x) = -\infty$ $\lim_{x\to -1-} k(x) = \infty$

Stetigkeit

Diese Eigenschaften bauen aufeinander auf:

Differenzierbare Funktionen sind immer auch stetig, aber stetige Funktionen sind nicht immer differenzierbar.

Die Bezeichnung "stetig differenzierbar" bedeutet, dass eine Funktion differenzierbar und ihre Ableitung stetig ist.



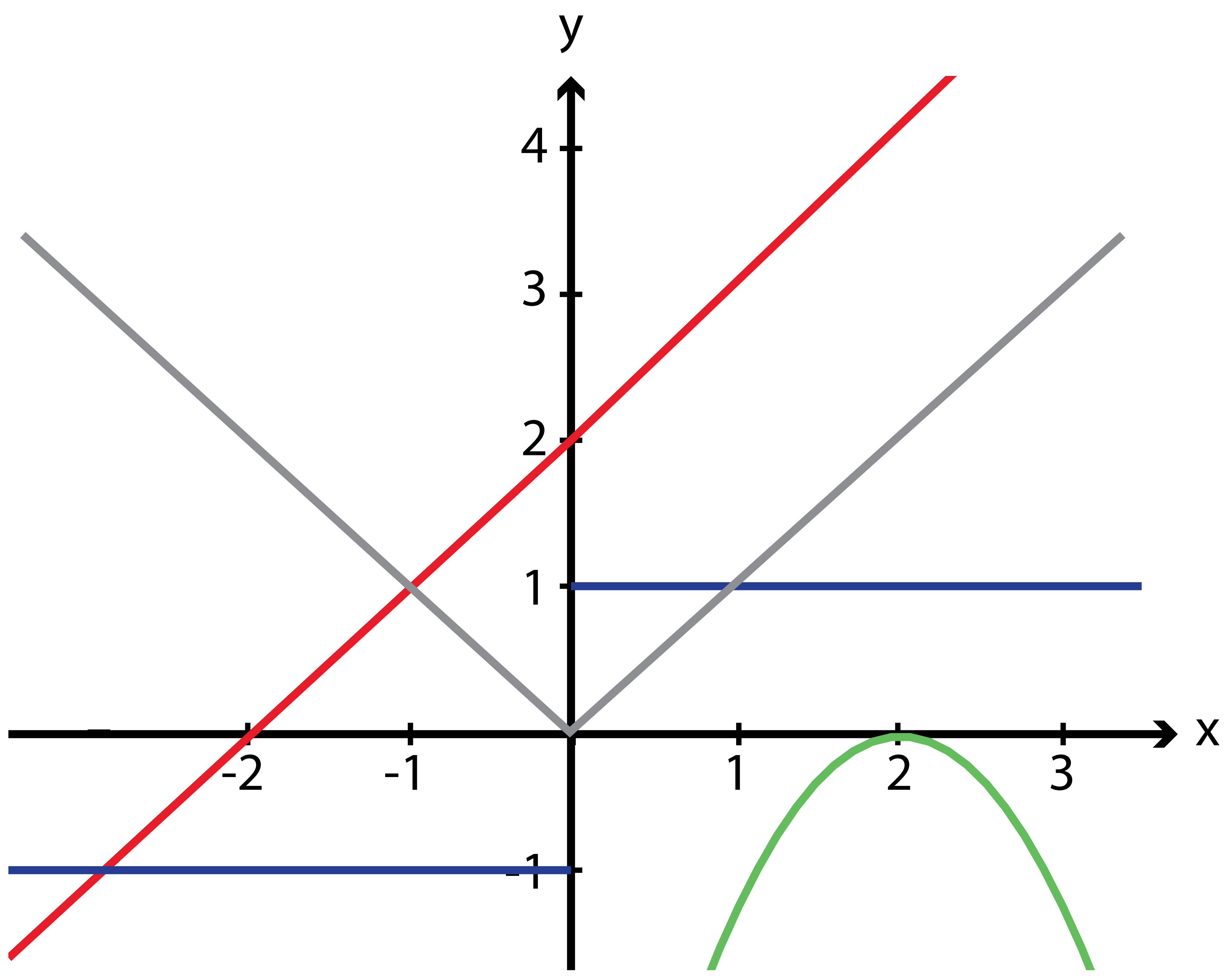
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Stetigkeit

Wir können die Stetigkeit grafisch bzw. optisch definieren:

Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn ihr Schaubild keine Sprünge macht.

Nach diesen Definitionen sind alle Funktionen bis auf die Blaue stetig. Diese macht einen Sprung bei x=0, d. h. dort müssten wir den Stift neu ansetzen!



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Stetigkeit

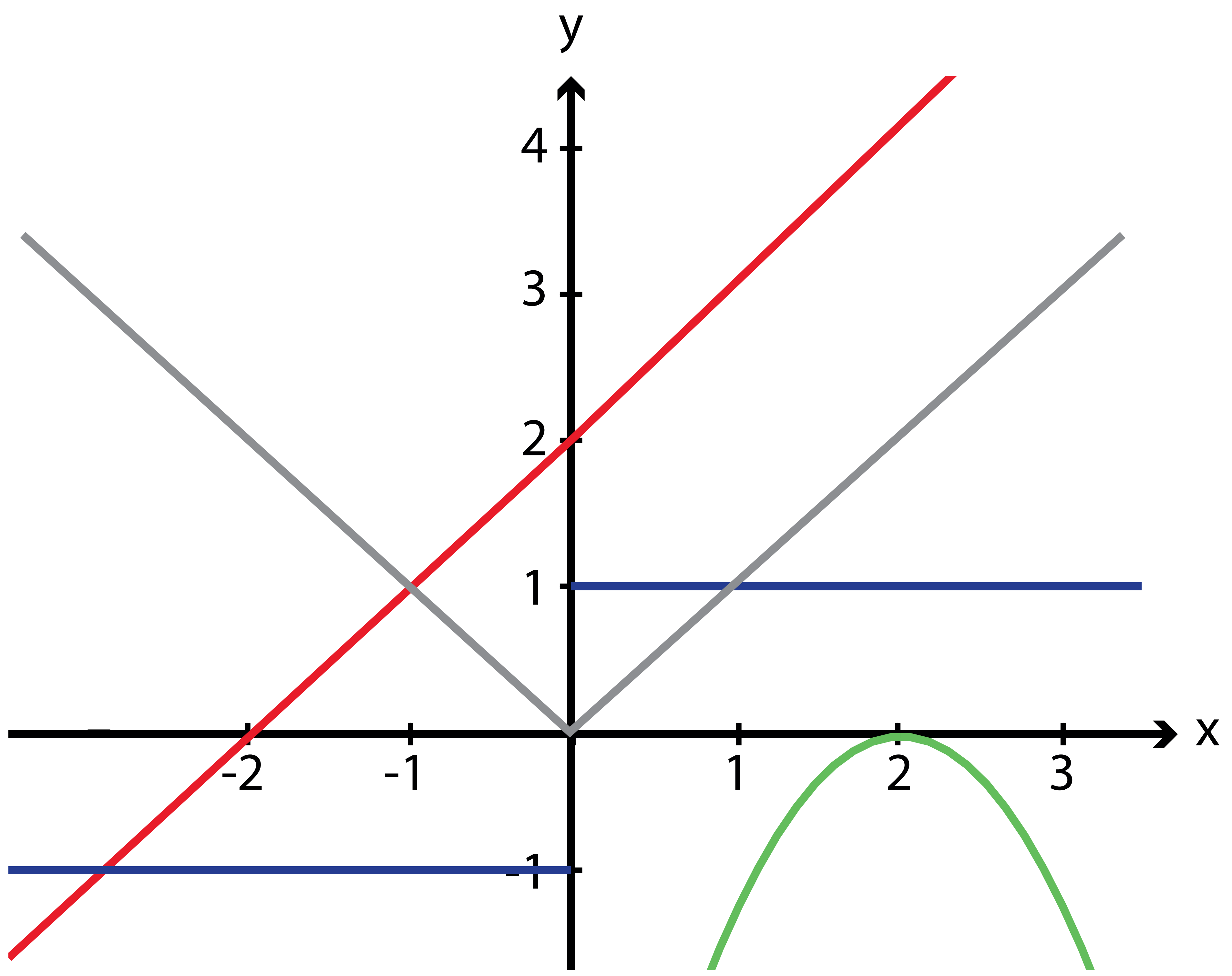
Grenzwertdefinition Eine Funktion ist genau dann stetig in einem Punkt x_0 wenn gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Das ist insbesondere dann der Fall, wenn:

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

Gilt diese Bedingung auf einem Intervall, ist die Funktion in diesem Intervall stetig.



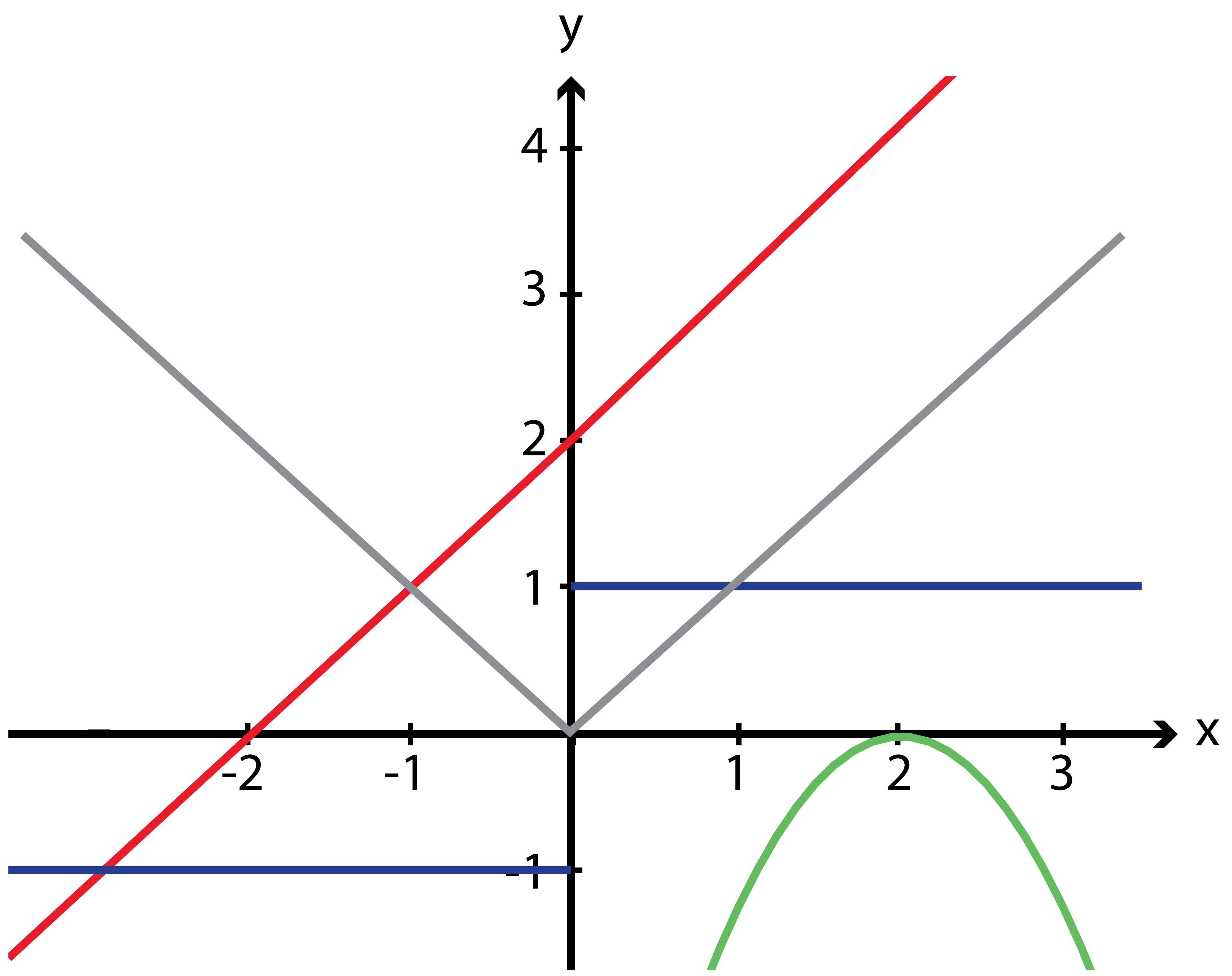
DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Differenzierbarkeit

Wir können Differenzierbarkeit grafisch bzw. optisch definieren:

Eine Funktion ist genau dann differenzierbar, wenn sie weder Sprünge noch Knickstellen hat.

Nach diesen Definitionen sind nur die rote und die grüne Funktion differenzierbar. Bei der Blauen haben wir einen Sprung und bei der grauen haben wir einen Knick.



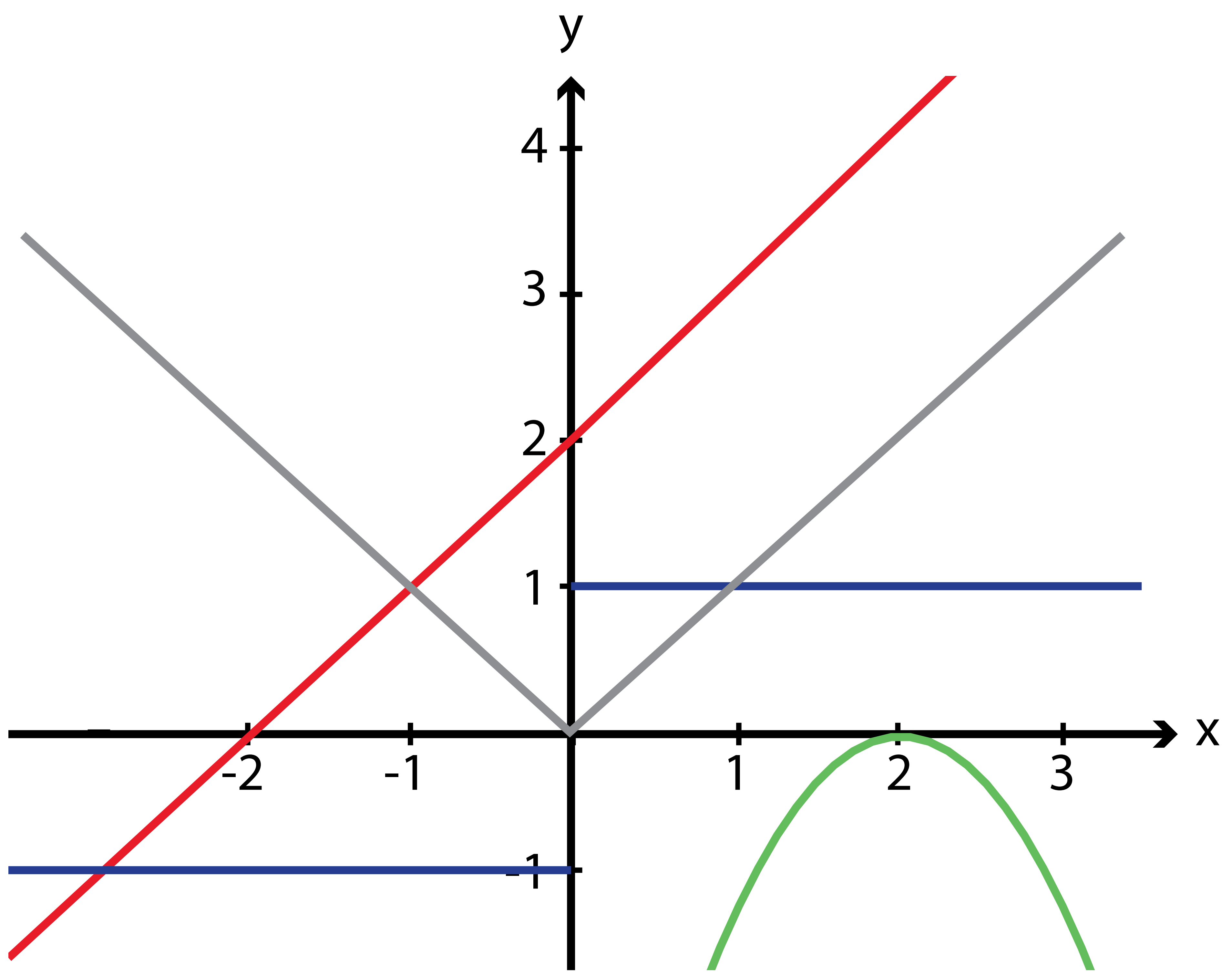
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Differenzierbarkeit

Grenzwertdefinition Eine Funktion ist genau dann differenzierbar in einem Punkt x_0 wenn diese in einem Bereich um x_0 definiert ist und folgender Grenzwert existiert:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Gilt diese Bedingung auf einem Intervall, ist die Funktion in diesem Intervall stetig.



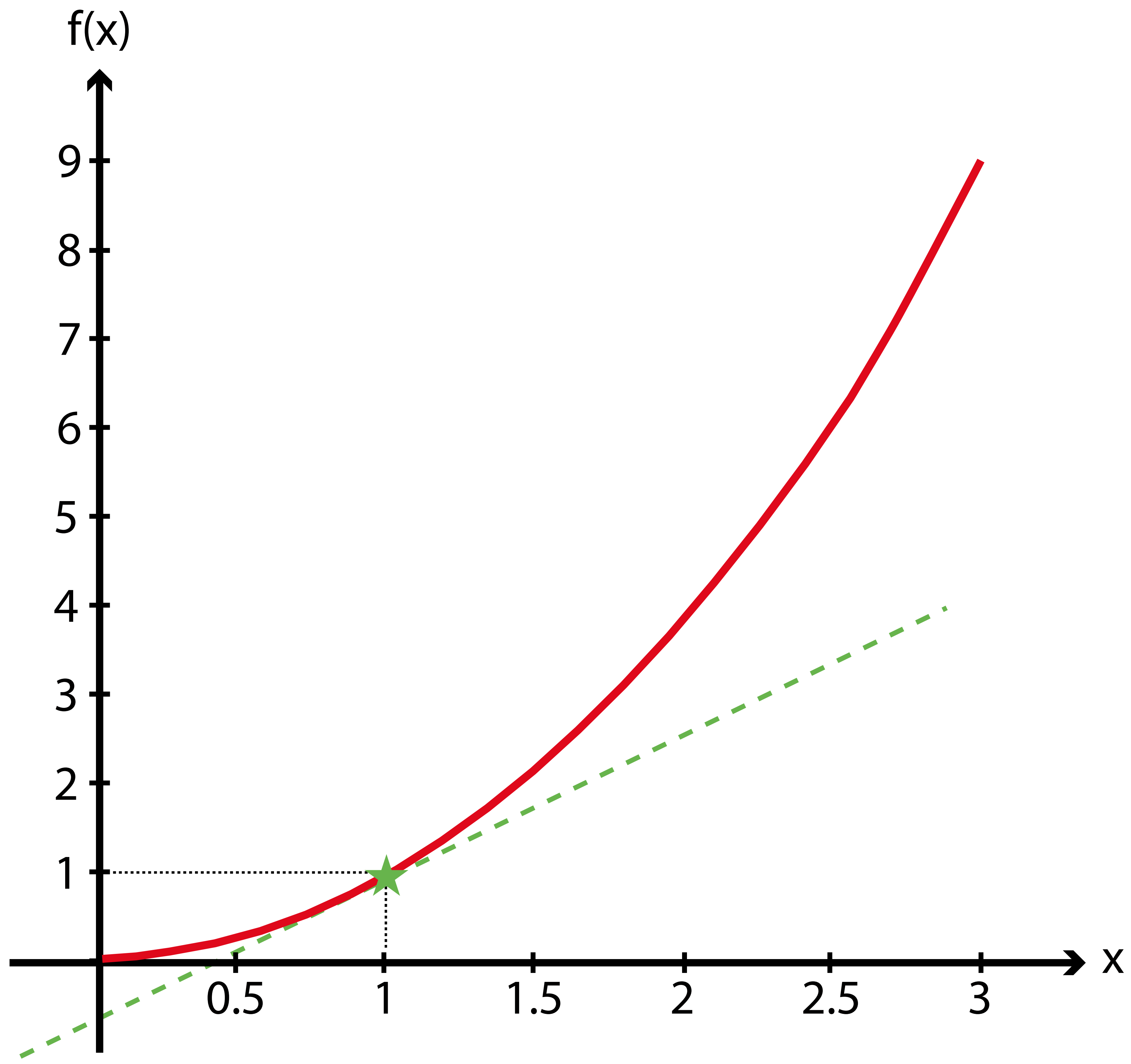
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Ableitung

Mit dieser Bedingung für die Differenzierbarkeit sind wir bei der Definition der Ableitung angelangt.

Mit der Ableitung messen wir die Steigung einer Funktion an einer bestimmten Stelle x_0.

Beispiel: Wie hoch ist die Steigung von f(x) bei x=1?



DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

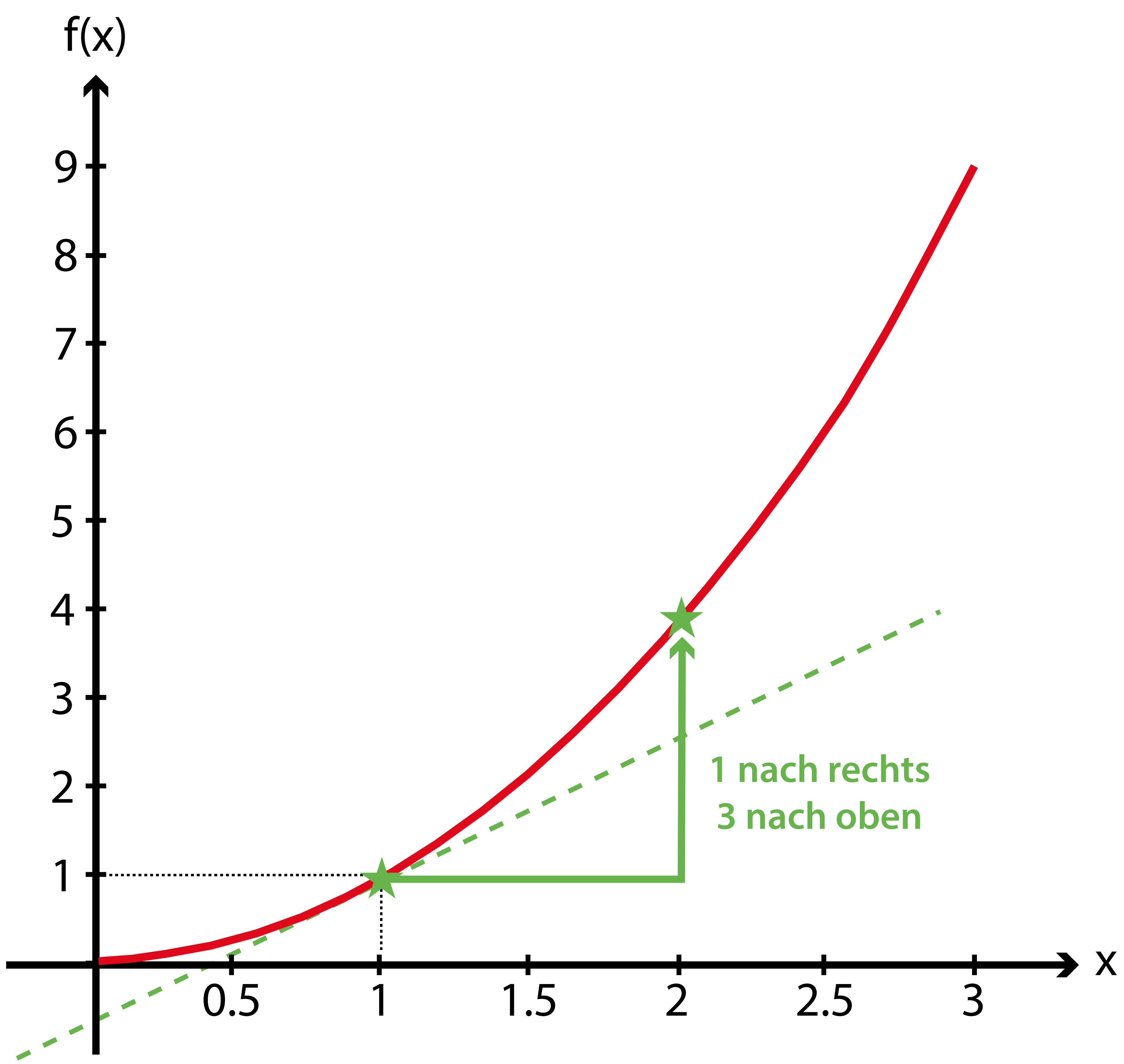
Ableitung

Näherung über Steigungsdreieck Die Steigung an der Stelle x_0 wird näherungsweise berechnet mit ...

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

... wobei h die Breite des Steigungsdreiecks ist. Verwenden wir zum Beispiel $x_0 = 1$ und $h = 1$ und erhalten damit den Wert:

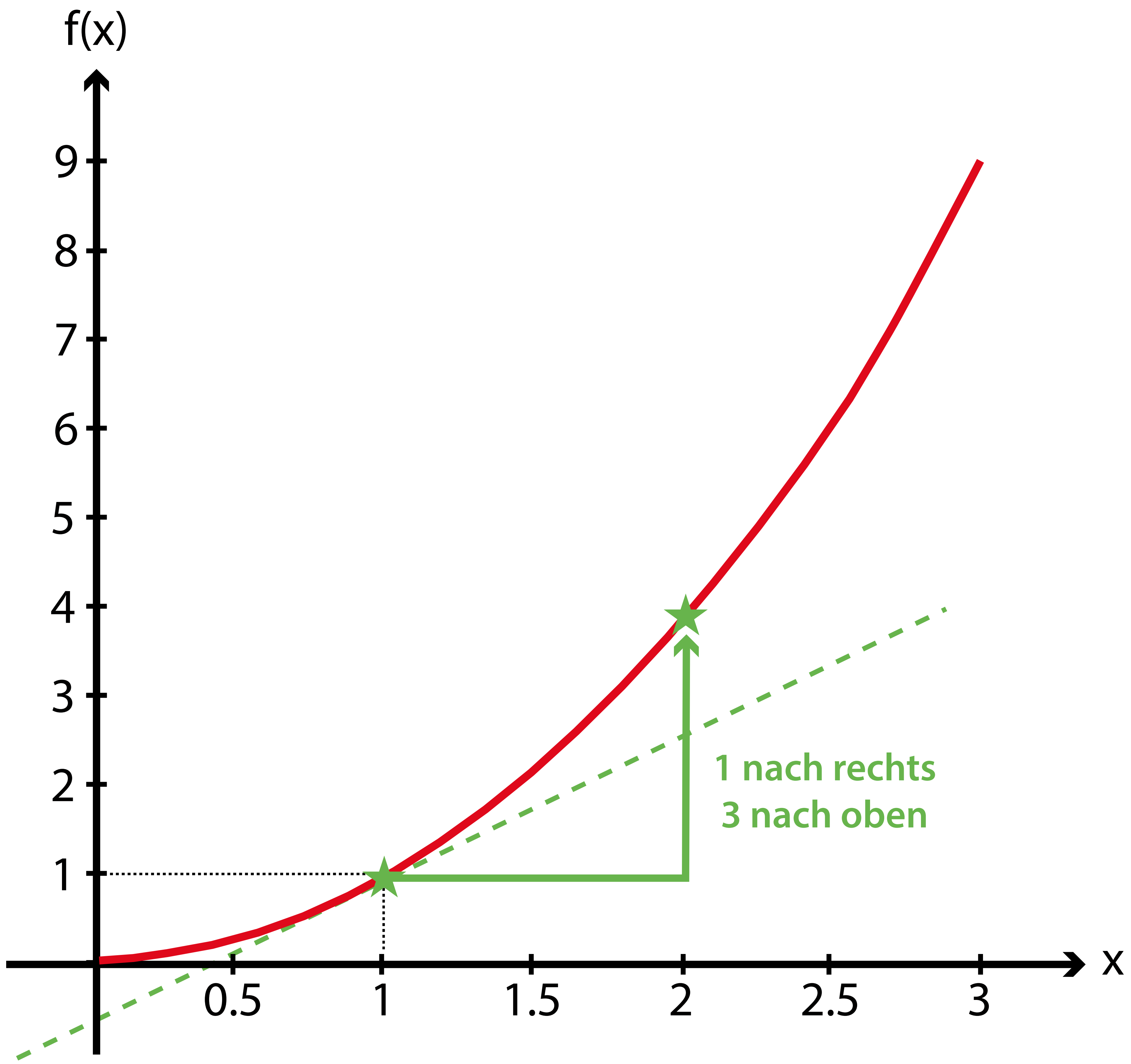
$$f'(x_0) \approx \frac{f(1+1) - f(1)}{1} = \frac{4 - 1}{1} = 3$$



Ableitung

Dieser Wert ist aber nicht die Steigung an der Stelle x=1 sondern die durchschnittliche Steigung zwischen x=1 und x=1+h.

Da die Kurve in diesem Bereich steiler wird überschätzen wir die Steigung bei x=1 deutlich.



Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

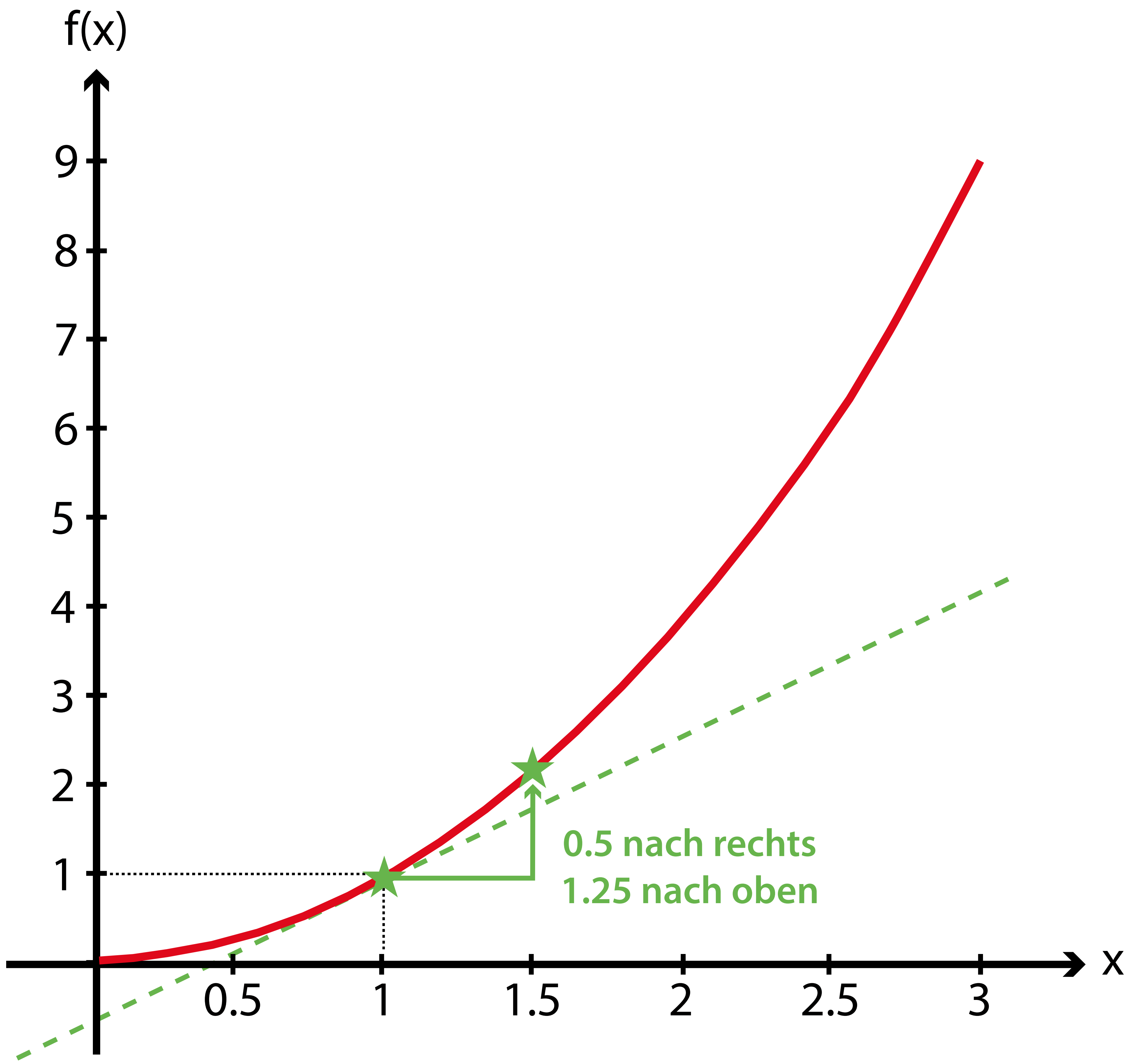
Ableitung

Die Näherung über Steigungsdreieck wir genauer, wenn wir die Breite des Dreiecks verkleinern.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(1.5) - f(1)}{0.5} \approx 2.50$$

Hier messen wir die durchschnittliche Steigung zwischen $x_0 = 1$ und dem Punkt $x_0 + h = 1.5$

Innerhalb dieses Bereichs ändert sich die Steigung der Kurve weniger, sodass wir die Steigung in x_0 recht gut nähern.



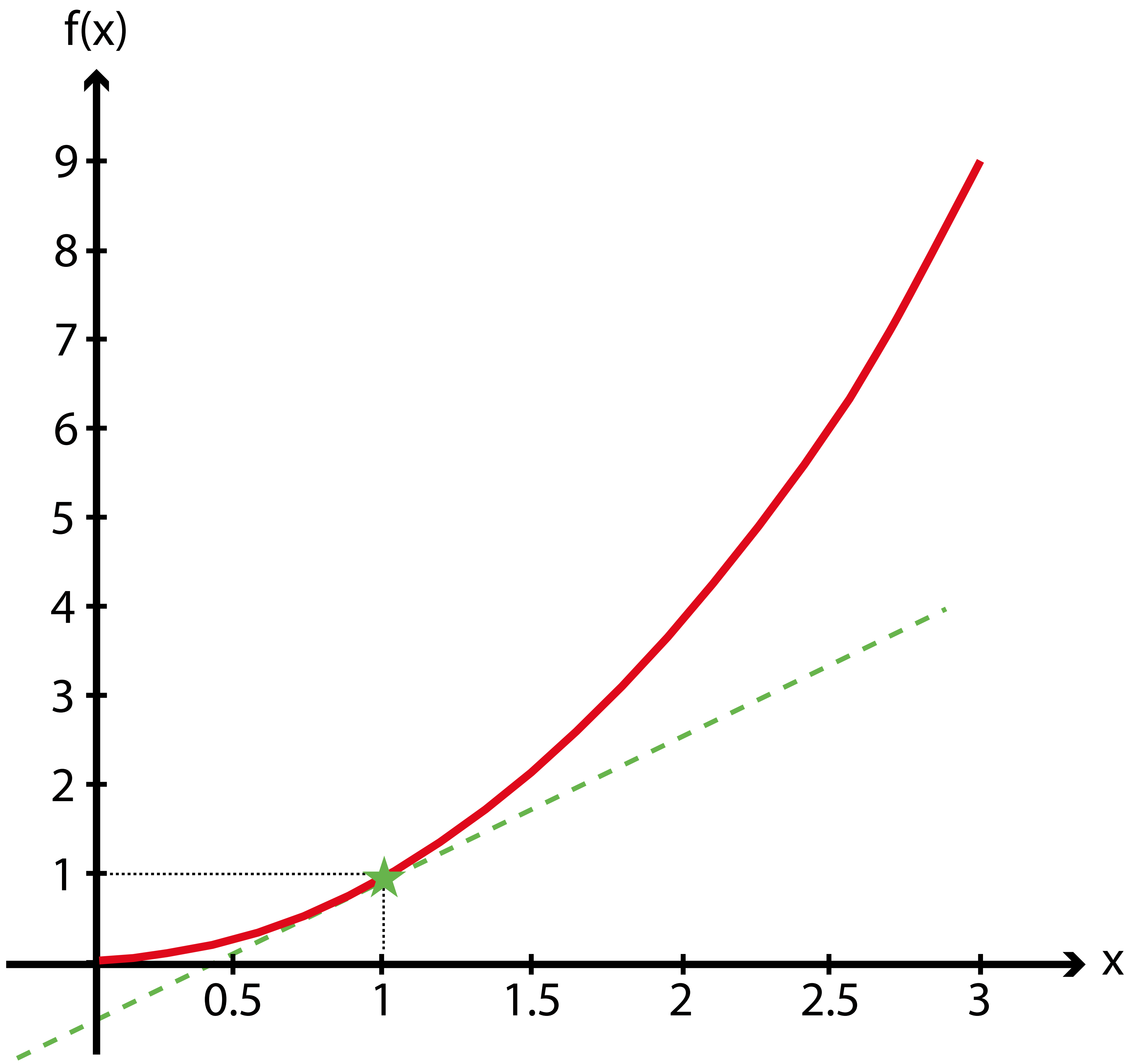
Ableitung

Die Näherung über Steigungsdreieck wäre genau, wenn die Breite des Dreiecks exakt 0 wäre. Wir können h=0 aber nicht in ...

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

... einsetzen, da wir sonst 0/0 teilen. Was wir jedoch können ist den Grenzwert von h gegen 0 zu berechnen. Die Regeln dafür behandeln wir im nächsten Termin!

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



Einheit IV

Der Name "Analysis I" verrät uns zwei Dinge:

Wir werden etwas analysieren. Konkret wird es um Funktionen und eine Vielzahl von Eigenschaften gehen, auf die wir diese Funktionen untersuchen können.

Es gibt eine später "Analysis II". Die Besonderheit von Analysis I ist, dass wir uns auf Funktionen mit genau einer Variable beschränken.

Analysis I

- Ableitungsregeln
- Mehr Ableitungsregeln
- Extremstellen
- Monotonie
- Konvexität

IV

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

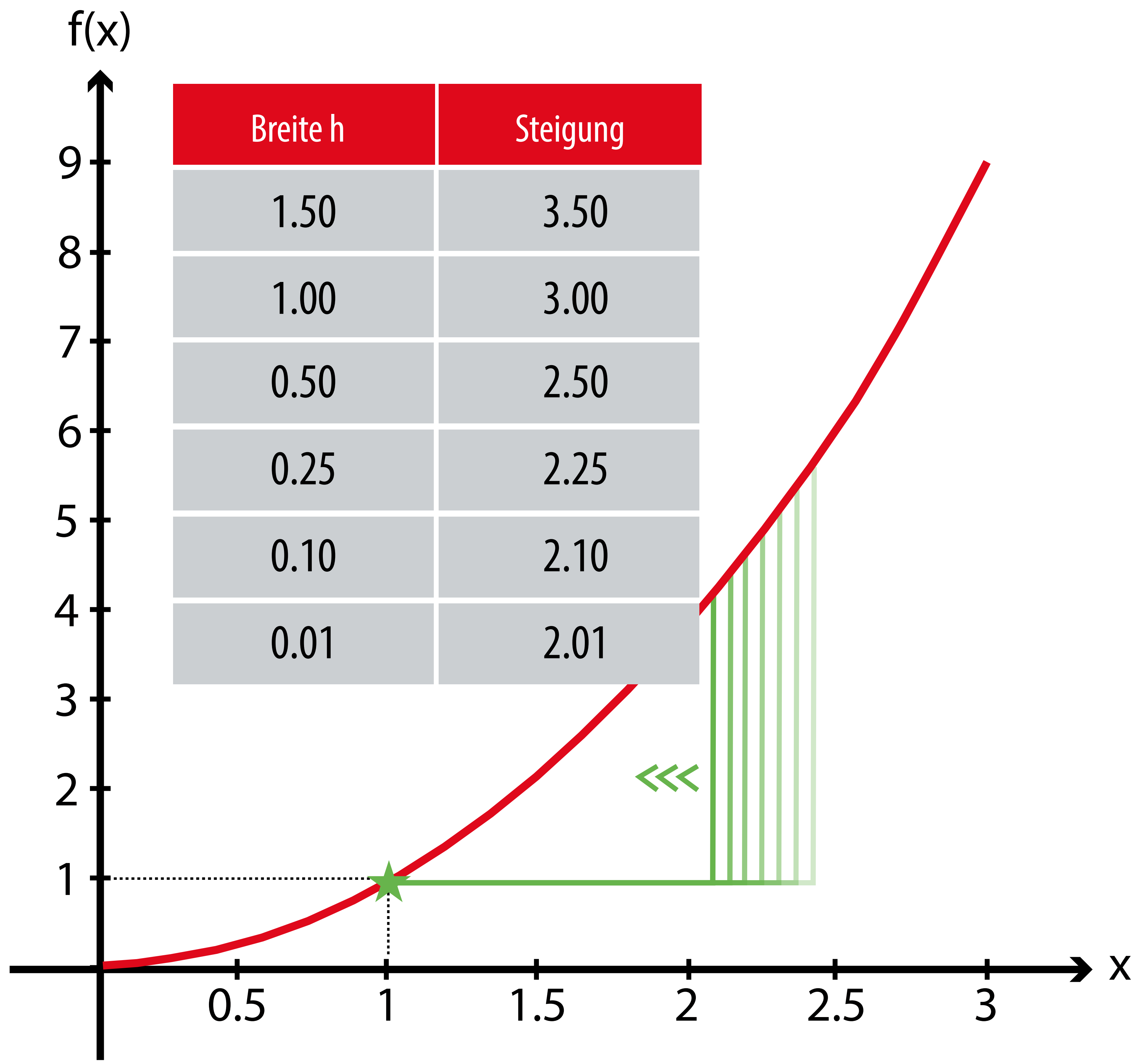
Ableitunsregeln

Wir wissen nun, dass wir die Steigung einer Funktion an einer Stelle x0 durch Grenzwertbetrachtung berechnen können:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Wie berechnen wir diesen Grenzwert?

Tatsächlich werden wir nicht mit dem Grenzwert direkt arbeiten.



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

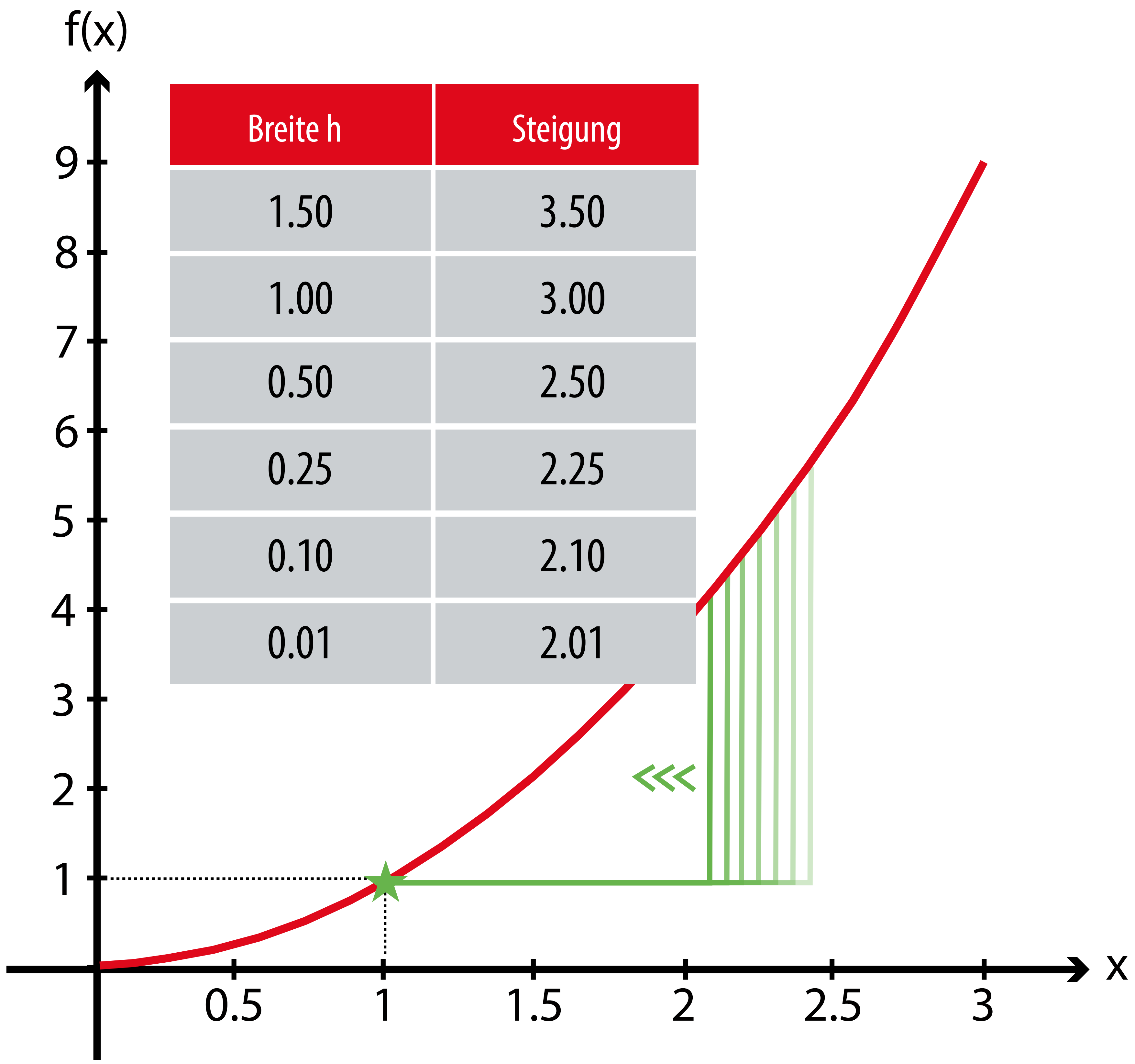
Ableitunsregeln

Stattdessen lernen wir Ableitungsregeln kennen, mit denen wir zu einer gegebenen Funktion ihre Ableitung berechnen können.

Um die Steigung an einer Stelle zu erhalten setzen wir dann einfach die entsprechende Stelle in die Ableitung ein!

Wir beginnen mit einfachen Regeln für einzelne Terme

Danach kommen Regeln für Kombinationen von Termen.



Breite h	Steigung
1.50	3.50
1.00	3.00
0.50	2.50
0.25	2.25
0.10	2.10
0.01	2.01

Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Ableitunsregeln

Die wichtigste Regel für einzelne Terme ist die Potenzregel.

Potenzregel Multipliziere den Faktor vor dem x mit dessen Exponenten und verringere den Exponenten um 1.

$$f(x) = 8x^4$$
$$f'(x) = 4 \cdot 8x^{4-1}$$
$$= 32x^3$$

Potenzregel

$$f(x) = a \cdot x^b$$

$$f'(x) = a \cdot x^{b-1}$$

$$= b \cdot a \cdot x^{b-1}$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Ableitunsregeln

Die Potenzregel gilt auch für negative Exponenten

$$f(x) = \frac{5}{x^2} = 5x^{-2} \qquad f'(x) = -10x^{-3} = \frac{-10}{x^3}$$

Die Potenzregel gilt nicht nur für ganzzahlige Exponenten

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{0.5} \qquad f'(x) = 0.5x^{-0.5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Erinnerung

$$a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Ableitunsregeln

Die Potenzregel gilt auch für den Exponenten 0. Eine Konsquenz davon ist die **Nullregel:** Summanden in denen die Variable nach der abgeleitet wird nicht vorkommt, fallen bei der Ableitung weg.

$$f(x) = 5x - 3 = 5x - 3x^0$$

$$f'(x) = 5$$

Erinnerung

$$a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Ableitungsregeln

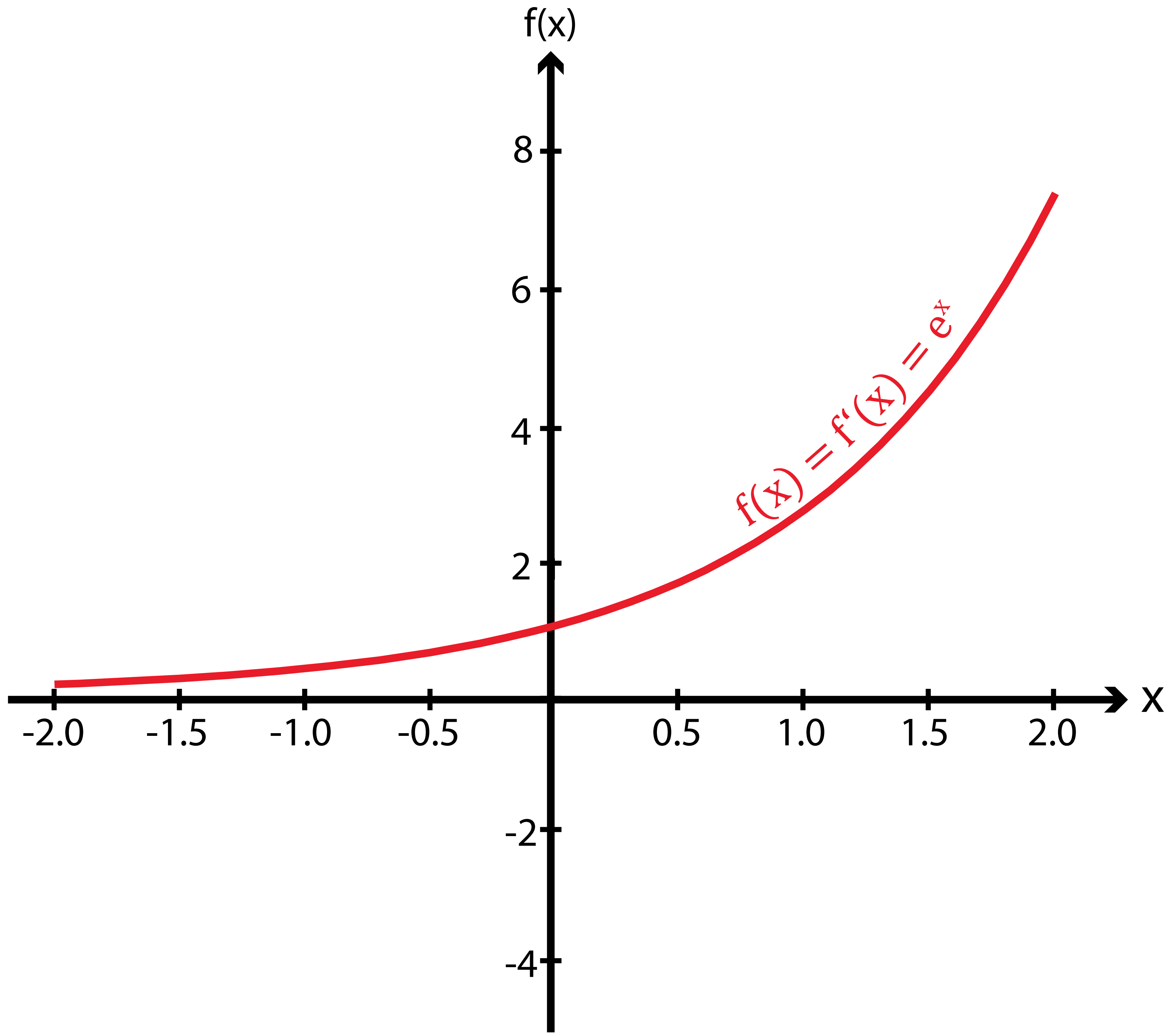
Bei Exponentialfunktionen mit der eulerschen Zahl e als Basis ...

$$f(x) = a \cdot e^x \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{mit } e \approx 2.71828$$

...ist die Ableitung gleich der ursprünglichen Funktion:

$$f'(x) = a \cdot e^x$$



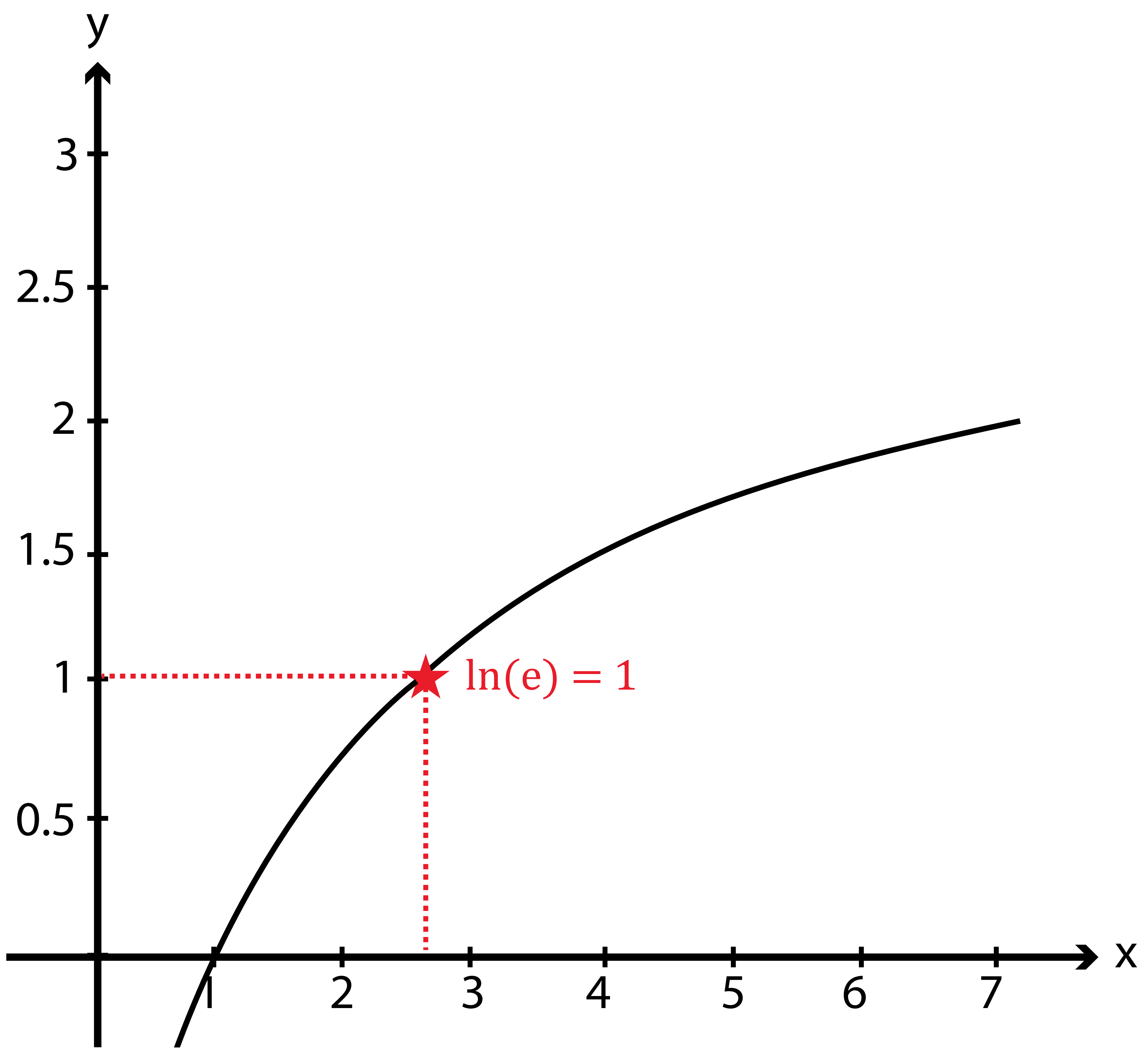
Ableitungsregeln

Beim Logarithmus mit der eulerschen Zahl e als Basis ...

$$f(x) = a \cdot \ln(x) \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

...ist die Ableitung:

$$f'(x) = a \cdot x^{-1}$$



Ableitungsregeln

Summenregel Besteht eine Funktion aus mehreren mit ± verbundenen Termen, werden die Summanden separat abgeleitet.

$$f(x) = 0.25x^4 - x^2 + 5e^x$$

$$f'(x) = x^3 - 2x + 5e^x$$

Summenregel

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Berechne die erste Ableitung folgender Funktionen:

$$f(x) = x^2 - \underline{\ln(x)} + \underline{e^x}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} + e^x$$

$$= 2x - x^{-1} + e^x$$

$$g(x) = \frac{1 + x^7 + x\ln(x)}{x}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{x^{\cancel{7}6}}{\cancel{x}} + \frac{\cancel{x}\ln(x)}{\cancel{x}}$$

$$= x^{-1} + x^6 + \ln(x)$$

$$g'(x) = -1 \cdot x^{-2} + 6x^5 + x^{-1}$$

$$= -\frac{1}{x^2} + 6x^5 + \frac{1}{x}$$

Mehr Ableitungsregeln

Produktregel Besteht eine Funktion aus zwei durch Multiplikation verbundene Teilfunktionen ...

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

so ist die Ableitung dieser Funktion gegeben durch:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

$$f'(x) = \underbrace{g'(x) \cdot h(x)}_{\substack{\text{Linke Funktion ableiten} \\ \text{Rechte Funktion belassen}}} + \underbrace{g(x) \cdot h'(x)}_{\substack{\text{Rechte Funktion ableiten} \\ \text{Linke Funktion belassen}}}$$

Reihenfolge ist irrelevant
da Addition kommutativ ist

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Mehr Ableitungsregeln

Beispiel für Produktregel:

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$= 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot x^{-1}$$

$$= 2x \cdot \ln(x) + x$$

Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

$$f'(x) = \underbrace{g'(x) \cdot h(x)}_{\substack{\text{Linke Funktion ableiten} \\ \text{Rechte Funktion belassen}}} + \underbrace{g(x) \cdot h'(x)}_{\substack{\text{Rechte Funktion ableiten} \\ \text{Linke Funktion belassen}}}$$

Reihenfolge ist irrelevant
da Addition kommutativ ist

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Mehr Ableitungsregeln

Quotientenregel Besteht eine Funktion aus zwei durch Division verbundene Teilfunktionen ...

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

so ist die Ableitung dieser Funktion gegeben durch:

$$f'(x) = \frac{g'(x)\cdot h(x) - h'(x)\cdot g(x)}{h(x)^2}$$

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Reihenfolge ist relevant
da Subtraktion nicht kommutativ ist

$$f'(x) = \frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{h(x)^2}$$

Mehr Ableitungsregeln

Quotientenregel Besteht eine Funktion aus zwei durch Division verbundene Teilfunktionen ...

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

$\longrightarrow$ Zählerfunktion $g(x) = e^x$

$\longrightarrow$ Nennerfunktion $h(x) = x^2$

$$f'(x) = \frac{e^x x^2 - 2x\, e^x}{x^4}$$

$$= \frac{e^x(x^2 - 2x)}{x^4} = \frac{e^x(x - 2)}{x^3}$$

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Reihenfolge ist relevant
da Subtraktion nicht kommutativ ist

$$f'(x) = \frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{h(x)^2}$$

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Mehr Ableitungsregeln

Kettenregel Besteht eine Funktion aus zwei miteinander verketteten Teilfunktionen ...

$$f(x) = g(h(x))$$

...dann bezeichnen wir g(x) als äußere und h(x) als innere Funktion. Die Ableitung ist gegeben durch ...

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$$

...das Produkt von innerer und äußerer Ableitung.

Kettenregel

$$f(x) = \overbrace{g(\underbrace{h(x)}_{\text{Innere Fkt.}})}^{\text{Äußere Fkt.}}$$

$$f'(x) = \underbrace{h'(x)}_{\text{Innere Ableitung}}\ \overbrace{g'(\underbrace{h(x)}_{\text{Innere Fkt.}})}^{\text{Äußere Ableitung}}$$

Mehr Ableitungsregeln

Beispiel zur Kettenregel:

Äußere Funktion: g(x)=ln(x)

Innere Funktion: h(x) = $5x^2 + 3x$

$$f(x) = \ln(5x^2+3x)$$

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$$

$$= (10x+3) \cdot (5x^2+3x)^{-1}$$

$$= \frac{10x+3}{5x^2+3x}$$

Kettenregel

$$f(x) = \overbrace{g(\underbrace{h(x)}_{\text{Innere Fkt.}})}^{\text{Äußere Fkt.}}$$

$$f'(x) = \underbrace{h'(x)}_{\text{Innere Ableitung}}\ \overbrace{g'(\underbrace{h(x)}_{\text{Innere Fkt.}})}^{\text{Äußere Ableitung}}$$

Berechne die erste Ableitung folgender Funktionen:

$$f(x) = xe^x$$

$g(x) = x$

$g'(x) = 1$

$h(x) = e^x$

$h'(x) = e^x$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$$

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$g(x) = \ln(x)$

$g'(x) = 1/x$

$h(x) = x$

$h'(x) = 1$

$$g'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2} = \frac{\cancel{\tfrac{1}{x}} \cdot \cancel{x} - \ln(x) \cancel{\cdot 1}}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$2 = e^{\ln(2)}$

$$h(x) = 2^{(x^2)} = \left[e^{\ln(2)}\right]^{x^2} = e^{\ln(2)x^2}$$

Äußere Fkt $g(x) = e^x$

$g'(x) = e^x$

Innere Fkt $h(x) = \ln(2) \cdot x^2$

$h'(x) = 2 \cdot \ln(2)\, x$

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x)) = 2 \cdot \ln(2) \cdot x \cdot e^{\ln(2) \cdot x^2}$$

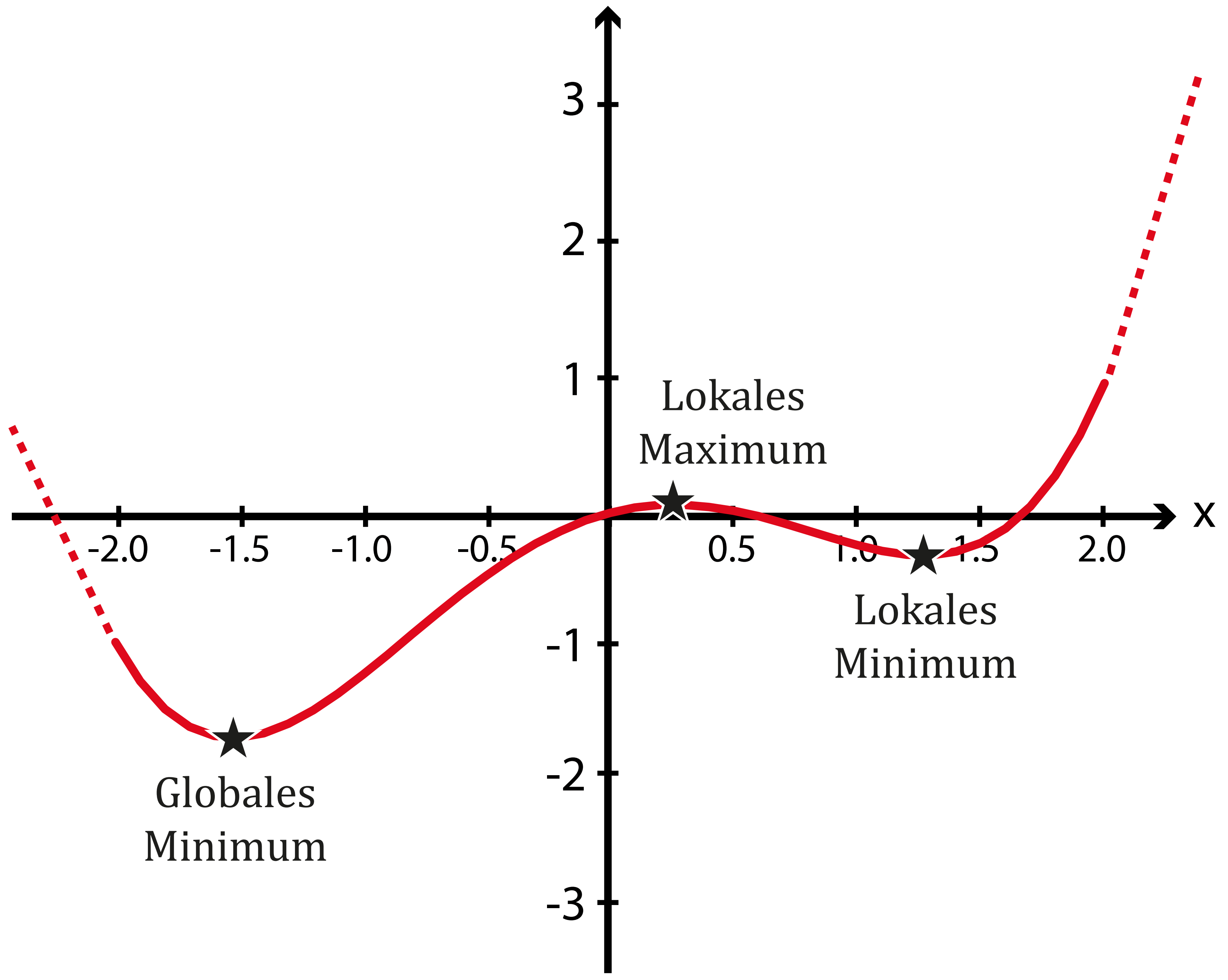
Extremstellen

Wir unterscheiden in Minima und Maxima sowie zwischen globalen und lokalen Extremstellen.

Globales Maximum Es gibt keine Stelle auf dem Definitionsbereich an dem ein höherer Funktionswert erreicht wird.

Globales Minimum Es gibt keine Stelle auf dem Definitionsbereich an dem ein kleinerer Funktionswert erreicht wird.

Nicht jede Funktion hat beides und einige haben keines!

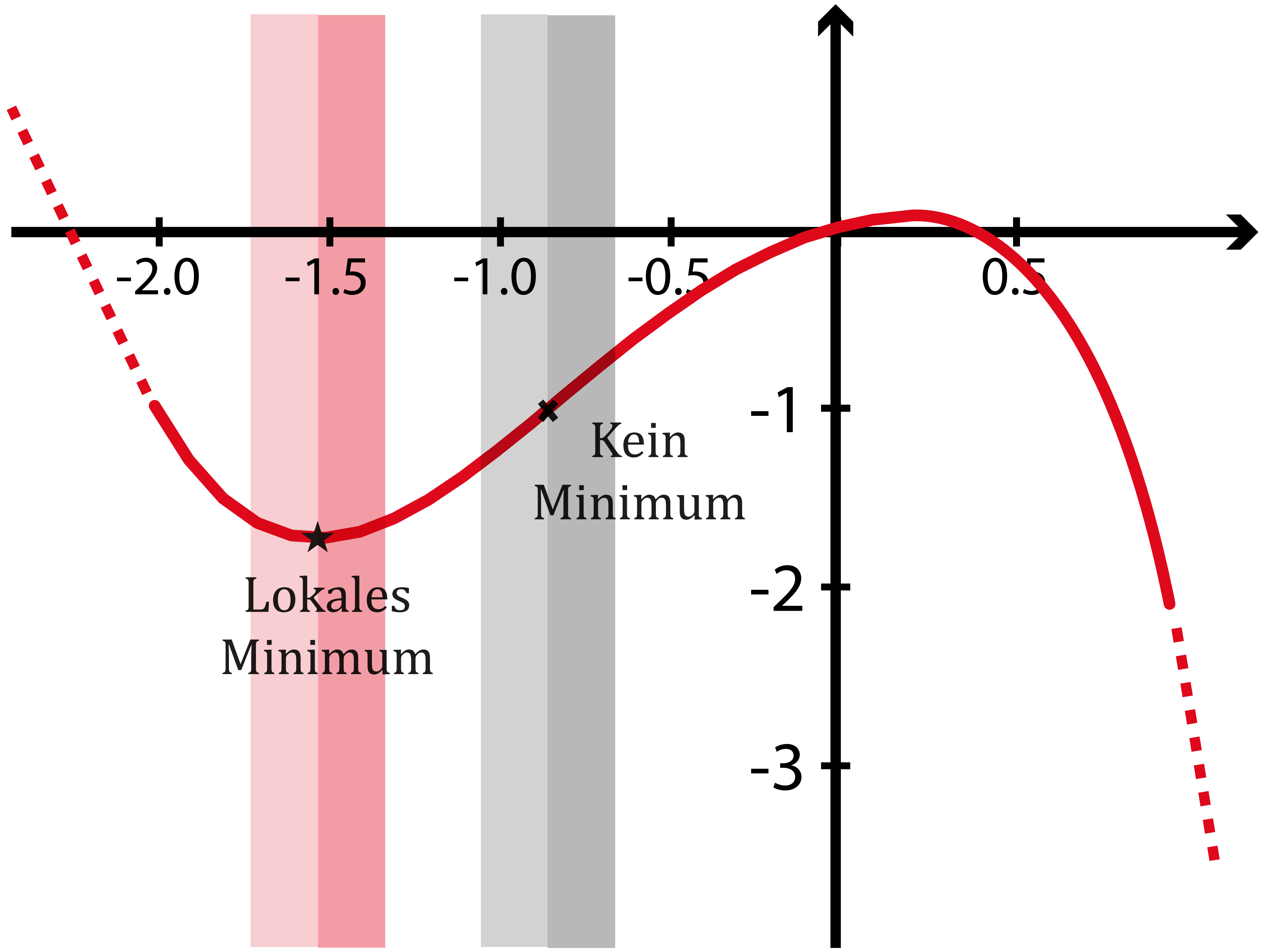


Extremstellen

Wir unterscheiden in Minima und Maxima sowie zwischen globalen und lokalen Extremstellen.

Lokales Maximum Es gibt einen kleinen Bereich um die Stelle innerhalb dessen kein größerer Funktionswert erreicht wird.

Lokales Minimum Es gibt einen kleinen Bereich um die Stelle innerhalb dessen kein kleinerer Funktionswert erreicht wird.



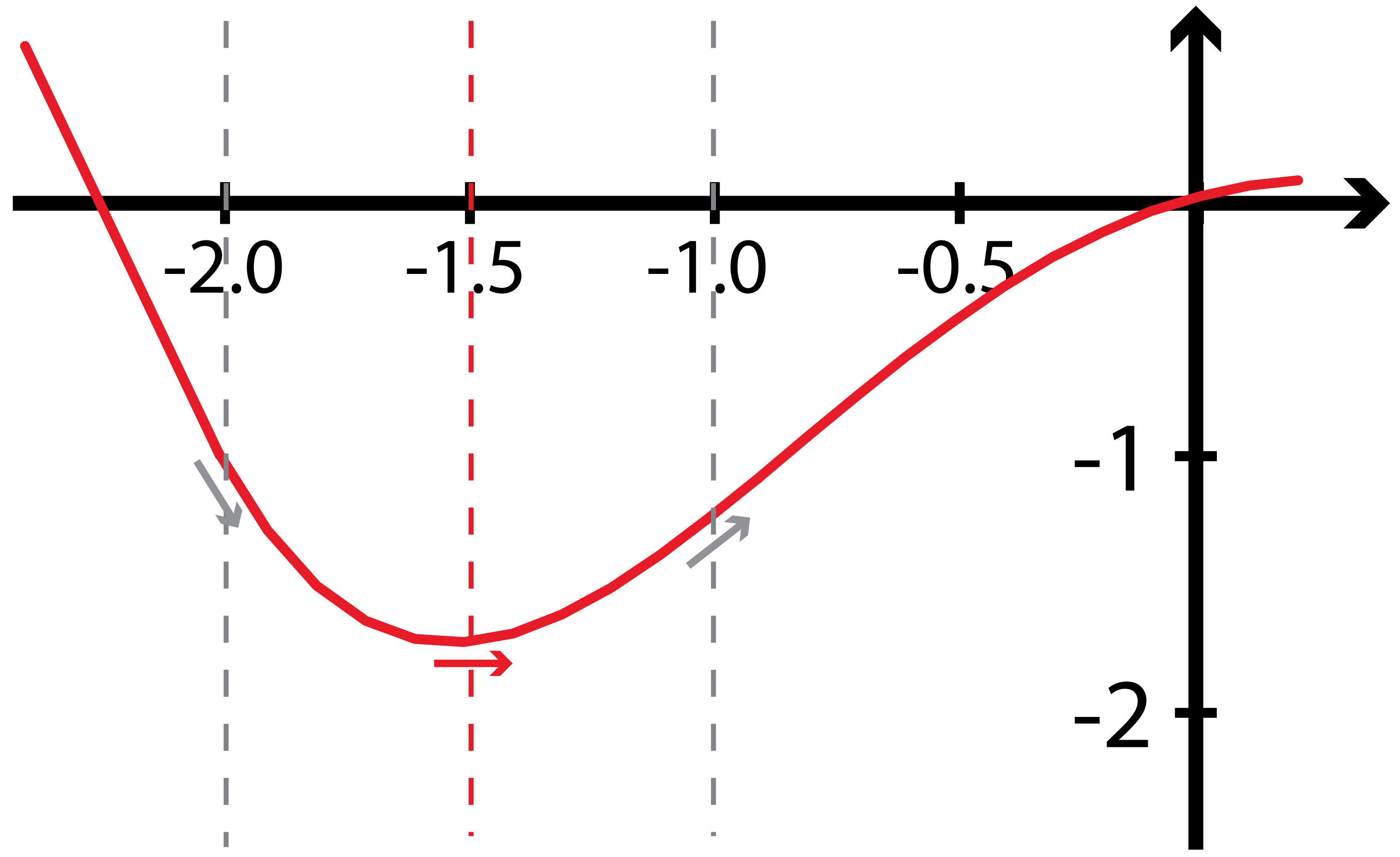
Extremstellen

Damit eine Extremstelle bei x_0 vorliegen kann, muss die Steigung an dieser Stelle 0 sein.

Wäre die Steigung zum Beispiel positiv, würde die Funktion nach rechts steigen und nach links fallen.

Kein Minimum Wir finden keinen noch so kleinen Bereich um x_0 in welchem alle Funktionswerte größer als x_0 sind.

Kein Maximum Wir finden keinen noch so kleinen Bereich um x_0 in welchem alle Funktionswerte kleiner als x_0 sind.



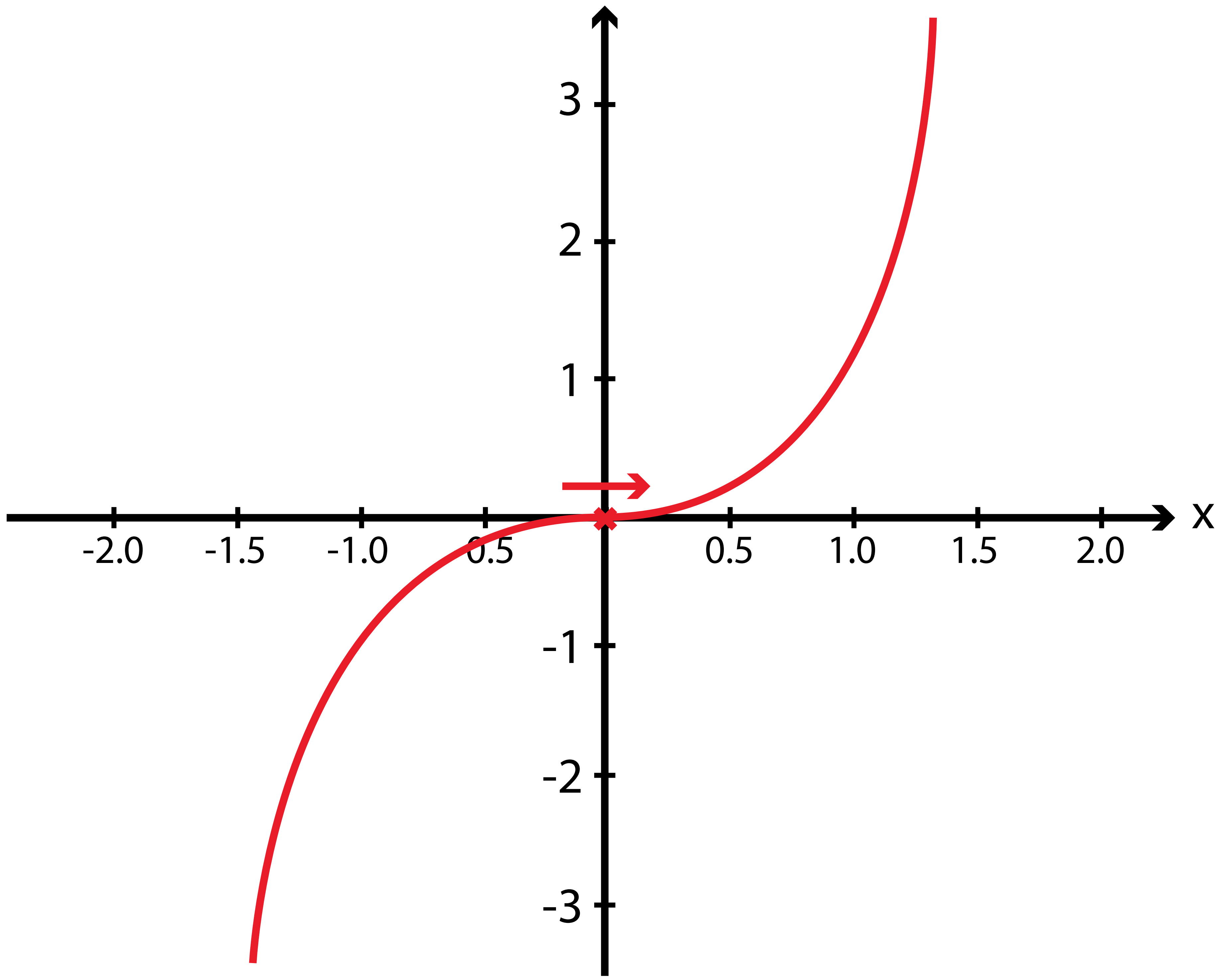
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Extremstellen

Notwendige Bedingung Ist x_0 ein Extremum, d. h. ein Minimum oder Maximum der Funktion f(x), dann gilt $f'(x_0) = 0$

Die umgekehrte Logik funktioniert nicht! Es kann Stellen mit Ableitung $f'(x_0) = 0$ geben an denen f(x) kein Extremum hat.

Wir brauchen eine zusätzliche hinreichende Bedingung!



DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

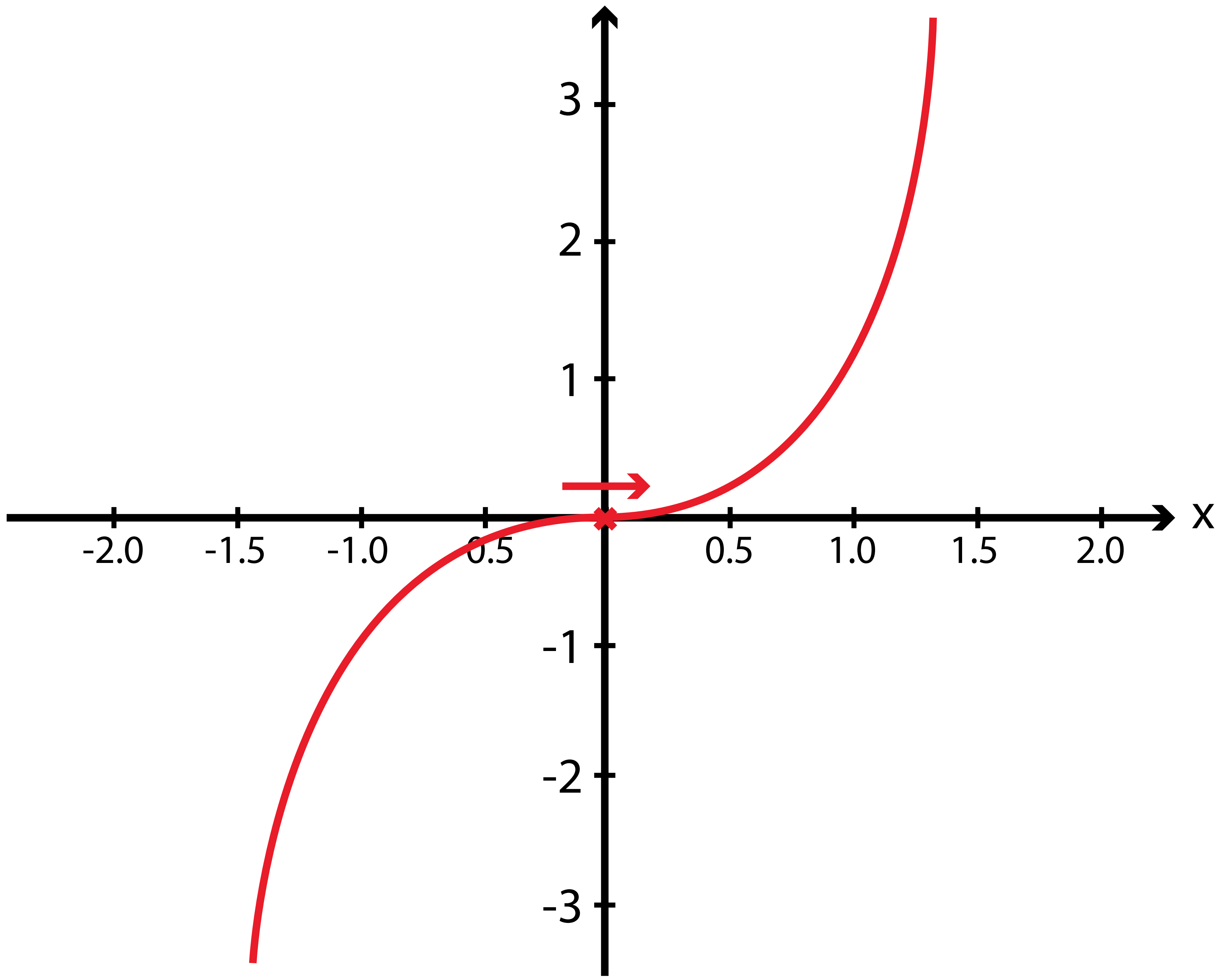
Extremstellen

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ dann ist die Stelle x_0 ein lokales Maximum von $f(x)$.

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ dann ist die Stelle x_0 ein lokales Minimum von $f(x)$.

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ dann ist die Stelle x_0 ein Sattelpunkt von $f(x)$, aber keine Extremstelle.

Ob die Extremstellen nicht nur lokal, sondern auch global sind müssen wir ausknobeln. Dabei helfen Grenzwerte und Logik!



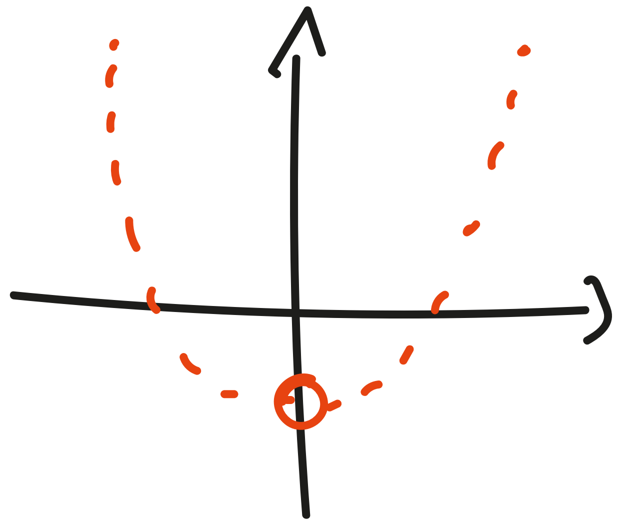
Finde alle Extremstellen der folgenden Funktionen und gib ihre Ausprägung an!

$$f(x) = 8x^2 - 4x + 2$$

$f'(x) = 16x - 4 \overset{!}{=} 0 \iff 16x = 4 \Rightarrow x = 0{,}25$

$f''(x) = 16$ $\quad f''(0{,}25) = 16 > 0$ Minimum! Global!

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$



$x^2 = 1$

$$g(x) = -0.5x^4 + x^2$$

$g'(x) = -2x^3 + 2x \overset{!}{=} 0 \iff x(2 - 2x^2) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

$g''(x) = -6x^2 + 2$

$g''(0) = 2$ lokales Minimum

$g''(1) = -4$ Maximum

$g''(-1) = -4$ Maximum.

$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

Monotonie

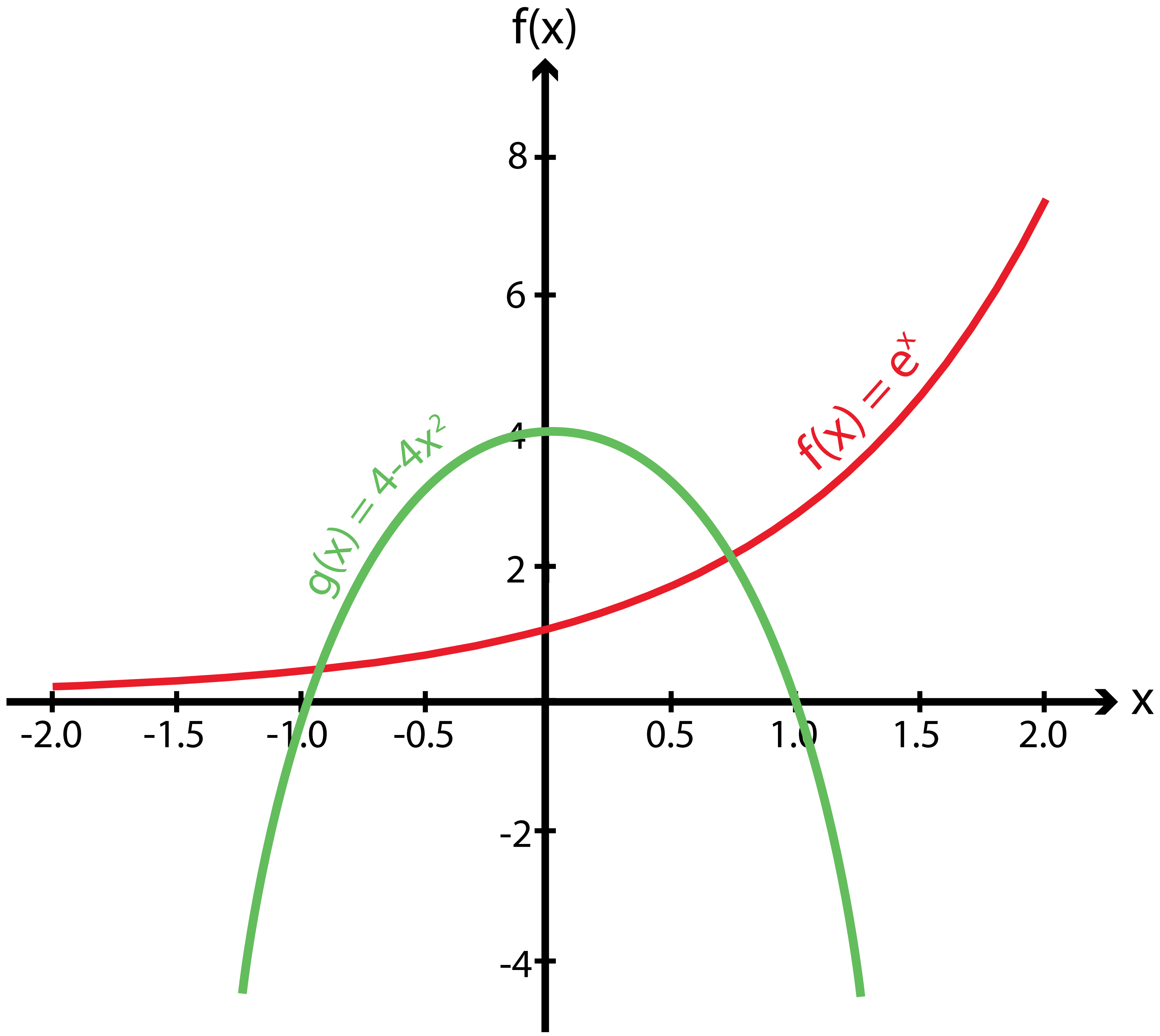
Eine Funktion f(x) ist genau dann monoton steigend in der Variable x, wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall\, x > x_0 \text{ gilt } f(x) \geq f(x_0)$$

Eine Funktion f(x) ist genau dann streng monoton steigend in der Variable x, wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall\, x > x_0 \text{ gilt } f(x) > f(x_0)$$

Die Begriffe monoton fallend und streng monoton fallend sind analog dazu mit definiert.



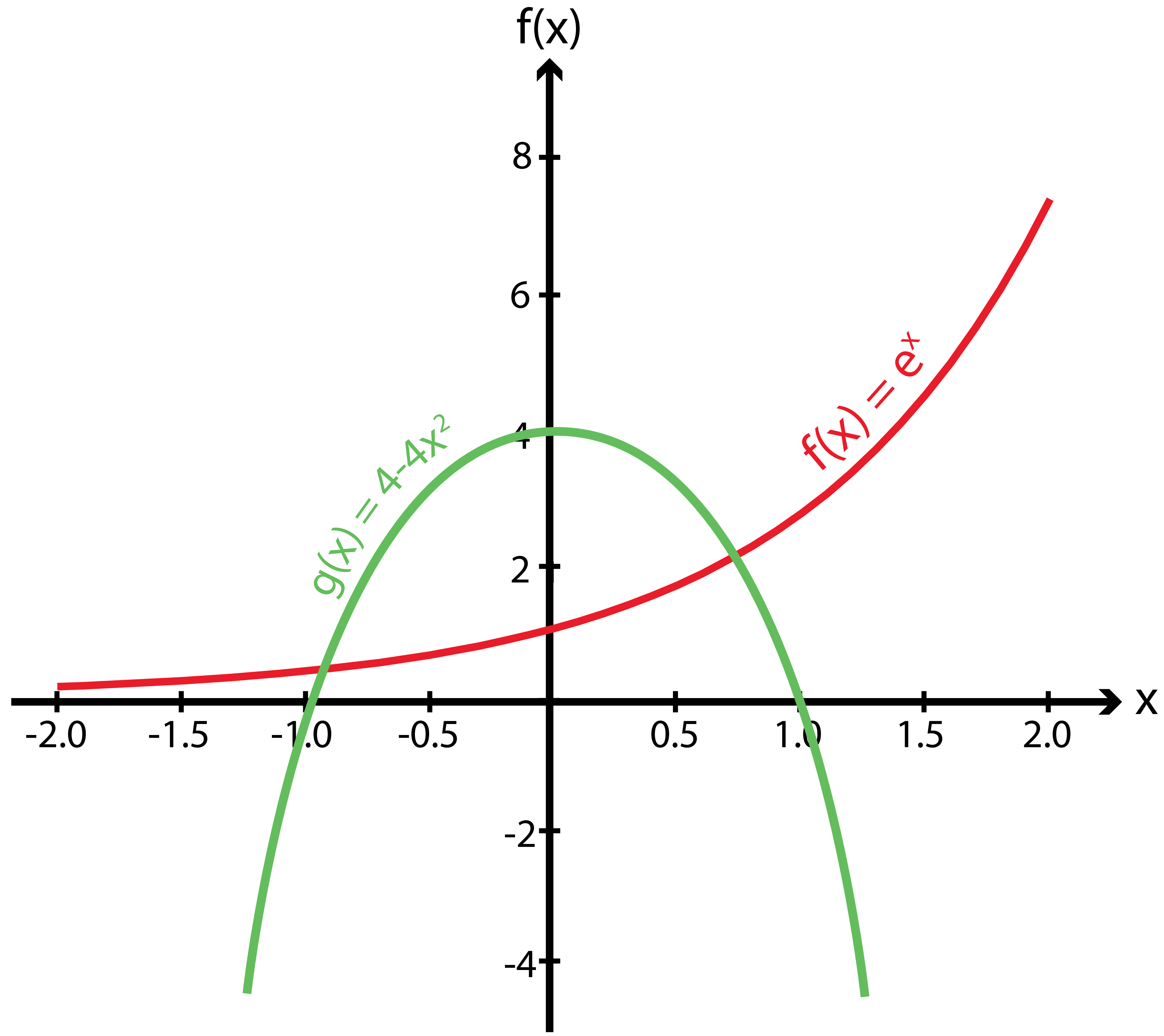
Monotonie

Eine Funktion f(x) ist genau dann monoton steigend in der Variable x, wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

wenn ich etwas größeres einsetze,
muss mindestens gleich viel herauskommen

Eine Funktion f(x) ist genau dann streng monoton steigend in der Variable x, wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

wenn ich etwas größeres einsetze,
muss etwas größeres herauskommen



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Monotonie

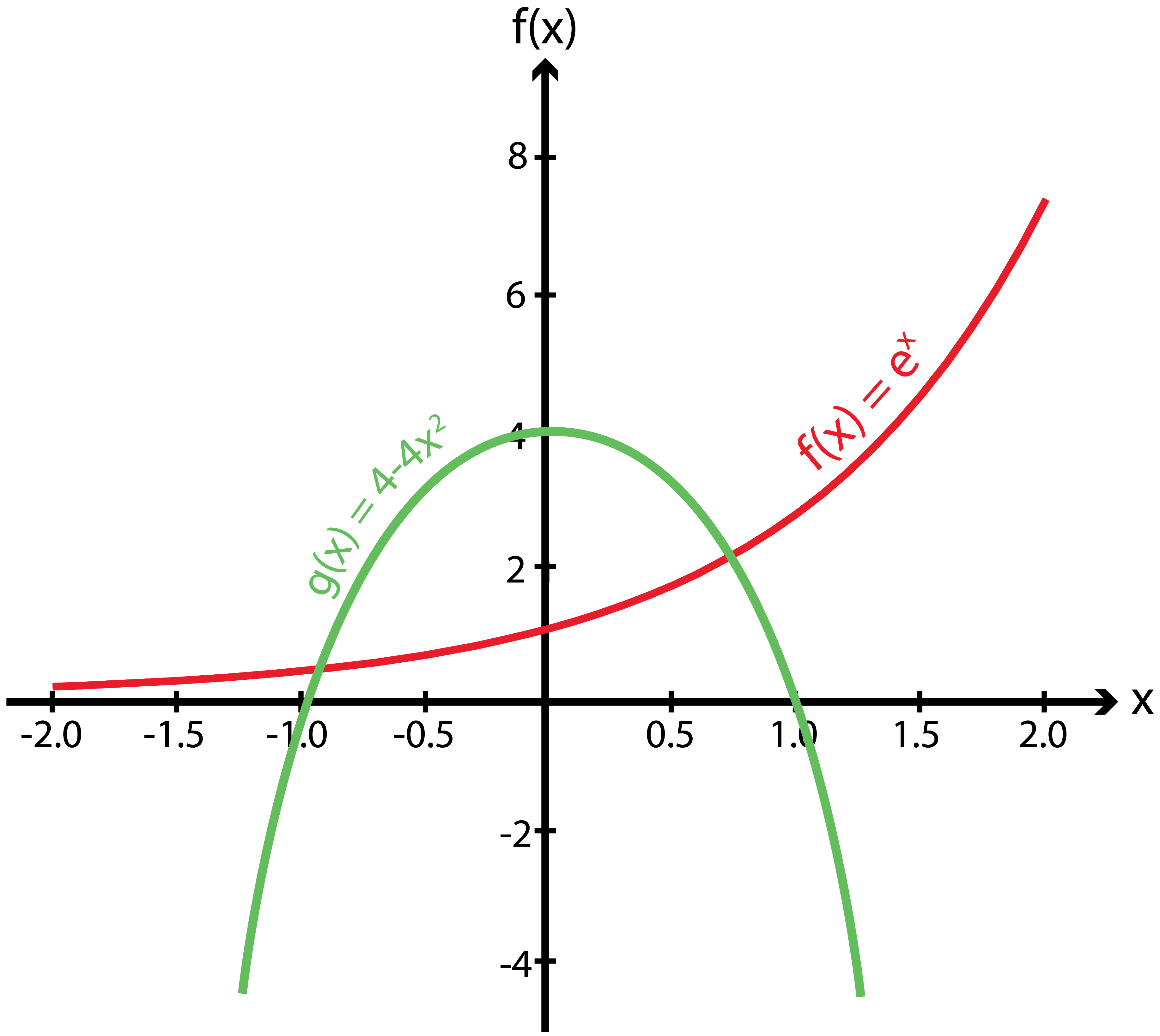
Eine Funktion f(x) ist genau dann monoton steigend in der Variable x im Intervall I, wenn gilt:

$$f'(x) \geq 0 \ \forall \ x \in I$$

Eine Funktion f(x) ist genau dann streng monoton steigend in der Variable x im Intervall I, wenn gilt:

$$f'(x) > 0 \ \forall \ x \in I$$

Die Begriffe monoton fallend und streng monoton fallend sind analog dazu mit definiert.



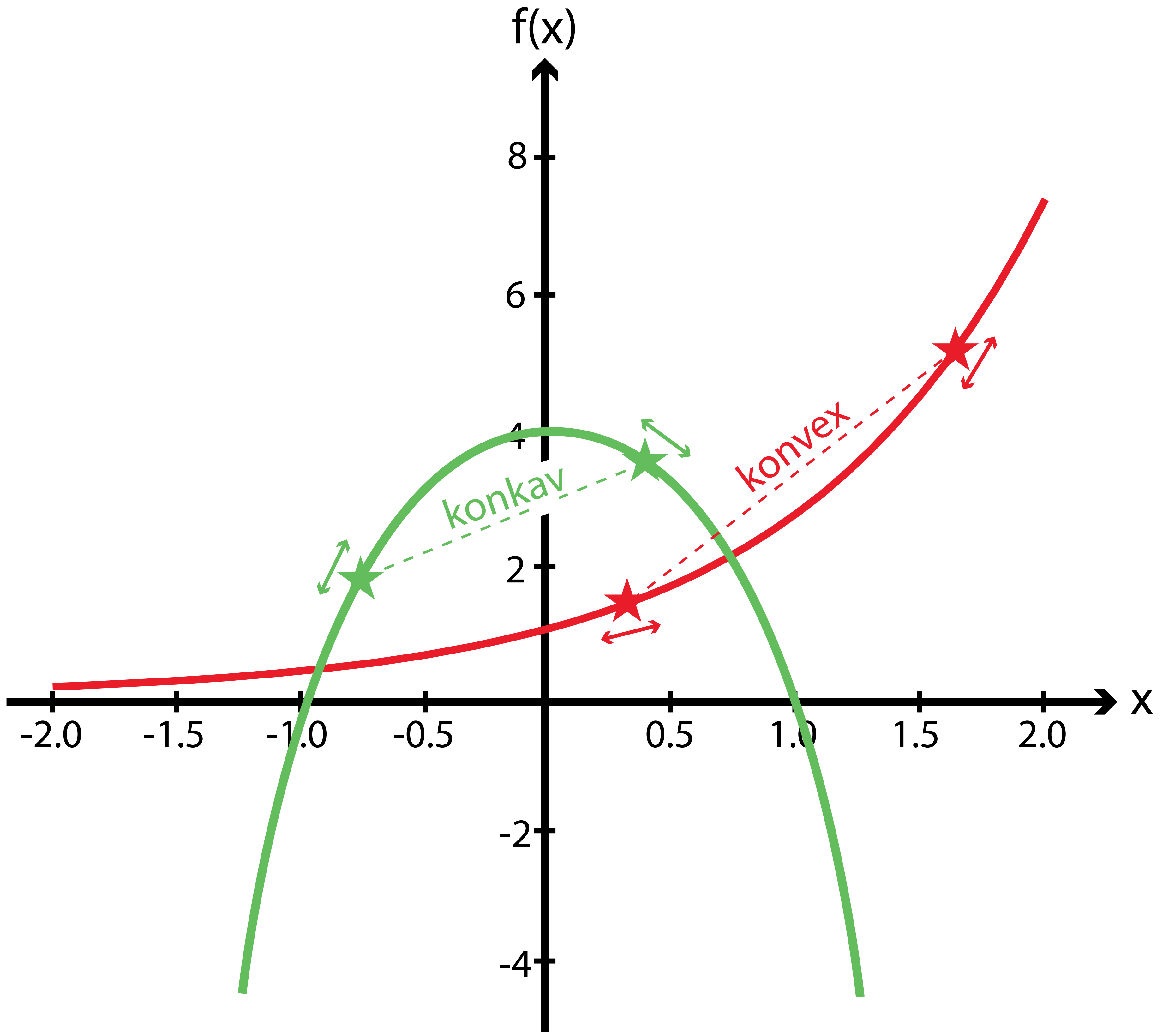
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Konvexität

Seien x_1, x_2 zwei beliebige Stellen für die f(x) definiert ist.

Eine Funktion f(x) ist genau dann konvex, wenn die Verbindung zwischen den Punkten $(x_1 , f(x_1))$ und $(x_2 , f(x_2))$ immer über dem Kurvenverlauf liegt.

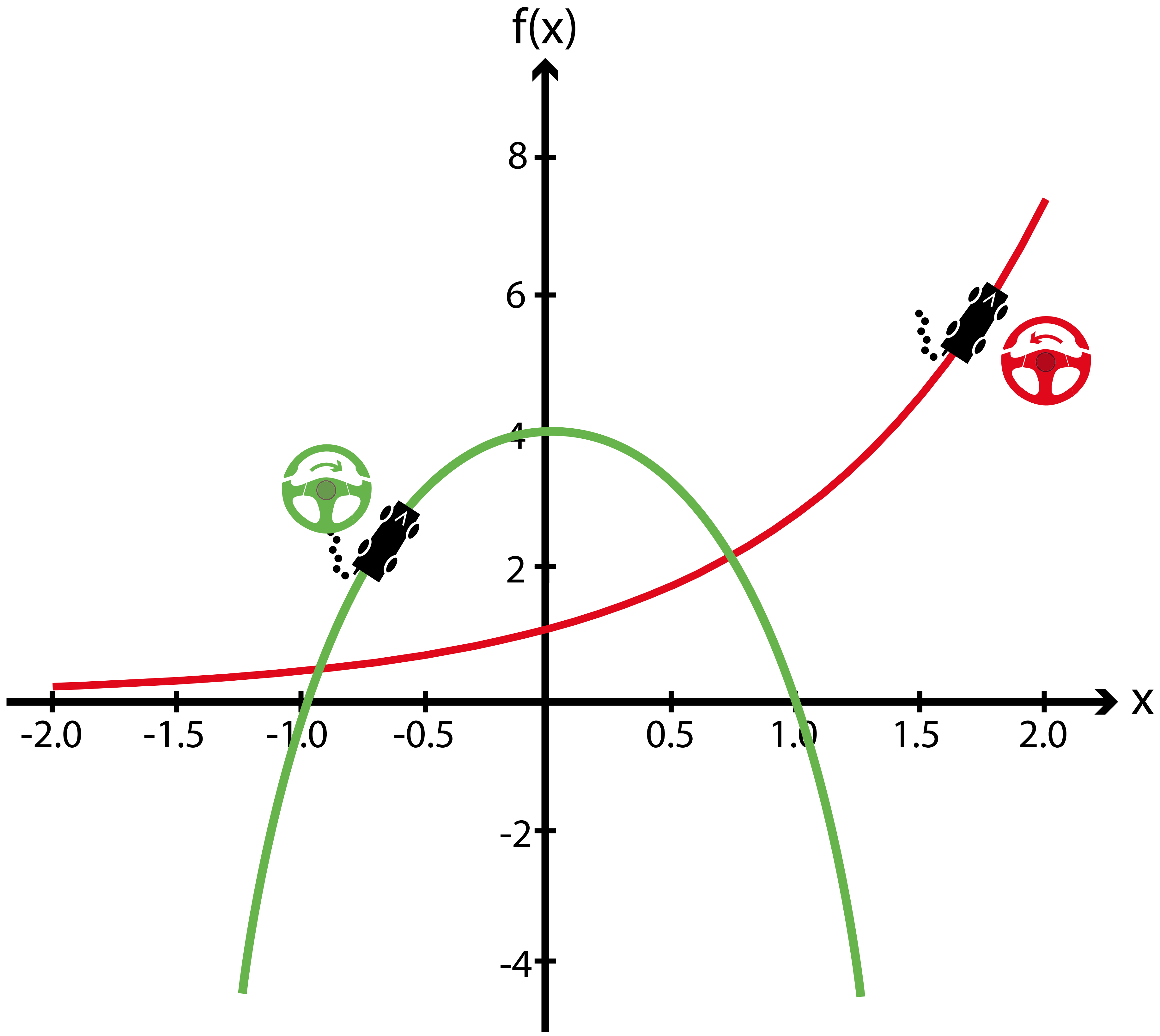
Eine Funktion f(x) ist genau dann konkav, wenn die Verbindung zwischen den Punkten $(x_1 , f(x_1))$ und $(x_2 , f(x_2))$ immer unter dem Kurvenverlauf liegt.



Konvexität

Eine Funktion f(x) ist genau dann konvex auf einem Intervall I, wenn ein "Fahrzeug" dort nach links lenken müsste um auf der Kurve zu bleiben.

Eine Funktion f(x) ist genau dann konkav auf einem Intervall I, wenn ein "Fahrzeug" dort nach rechts lenken müsste um auf der Kurve zu bleiben.



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

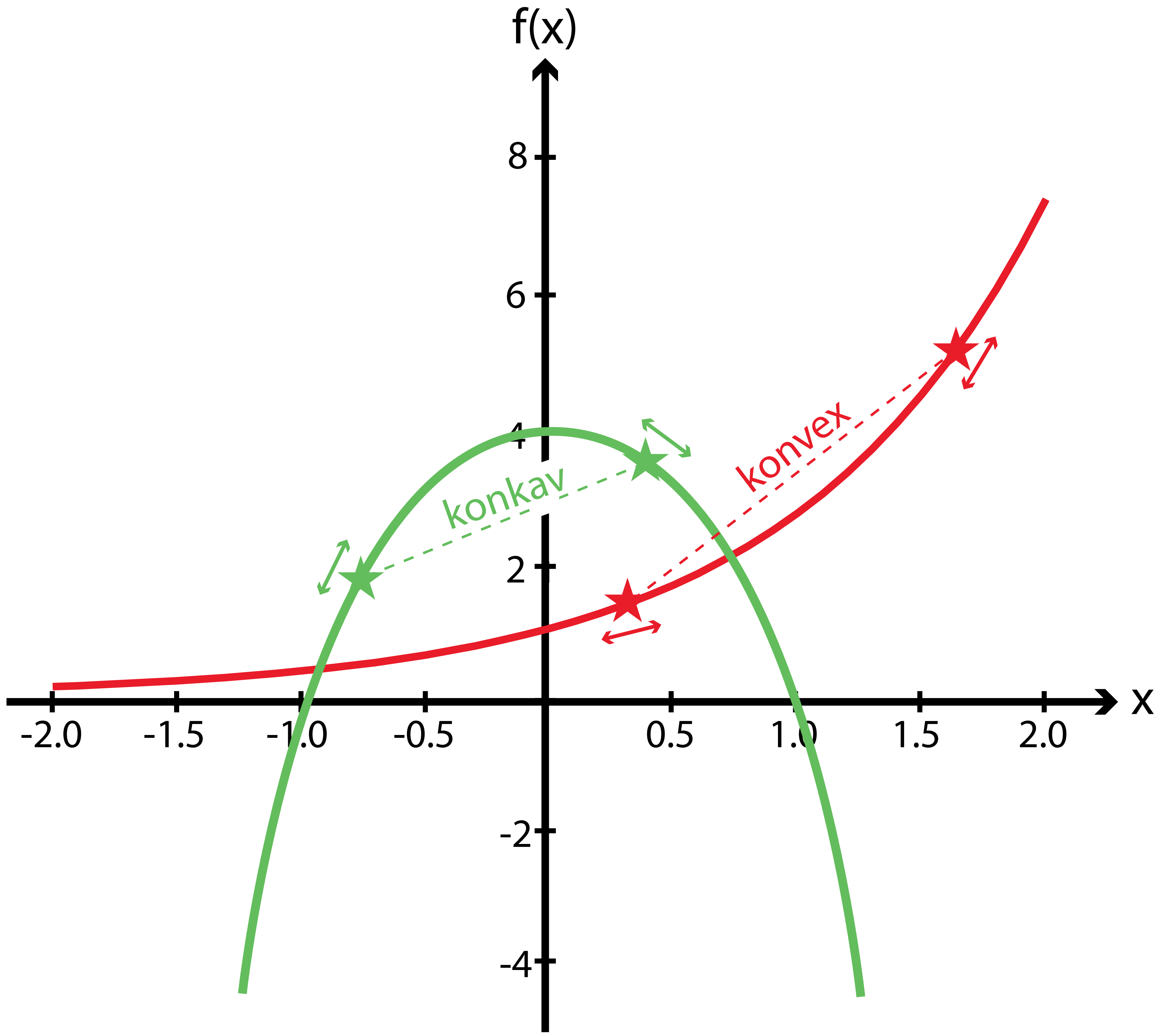
Konvexität

Eine Funktion f(x) ist dann konvex in der Variable x im Intervall I, wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$f''(x) \geq 0 \ \forall \ x \in I$$

Eine Funktion f(x) ist dann konkav in der Variable x im Intervall I, wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$f''(x) \leq 0 \ \forall \ x \in I$$



Untersuche die folgenden Funktionen auf Monotonie und Konvexität

$f(x) = 4\text{-}4x^2$

$f'(x) = -8x$

Wenn $x>0$ dann $f'(x)<0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist streng monoton fallend in $(0,\infty)$

Wenn $x<0$ dann $f'(x)>0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist streng monoton steigend in $(-\infty,0)$

$f''(x) = -8$ ist immer negativ!

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist konkav in $\mathbb{R}$

$g(x) = e^x$

$g'(x) = e^x$

ist positiv für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $g(x)$ ist streng monoton steigend in $\mathbb{R}$

$g''(x) = e^x$ ist positiv $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $g(x)$ ist konvex in $\mathbb{R}$

Kettenregel mit
äußerer Fkt $\ln(x)$
innerer Fkt x^2

$h(x) = \ln(x^2)$

$h'(x) = 2x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$

$h''(x) = -\frac{2}{x^2} = -2x^{-2}$

Erste Ableitung immer positiv für $x>0$
negativ für $x<0$

$\Rightarrow$ Str. monoton fallend in $(-\infty,0)$, steigend in $(0,\infty)$

Zweite Ableitung immer negativ

$\Rightarrow$ Funktion konkav auf Definitionsbereich

Einheit V

In der "Analysis II" erweitern wir den ersten Teil der Analysis um:

Funktionen mit mehreren Variablen, dem damit verbundenen Konzept der partiellen Ableitung und dem Lagrange Verfahren.

Die Integralrechnung als Gegenstück der Differenzialrechnung.

Analysis II

- Mehrere Variablen
- Partielle Ableitungen
- Extremstellen
- Lagrangeverfahren

V

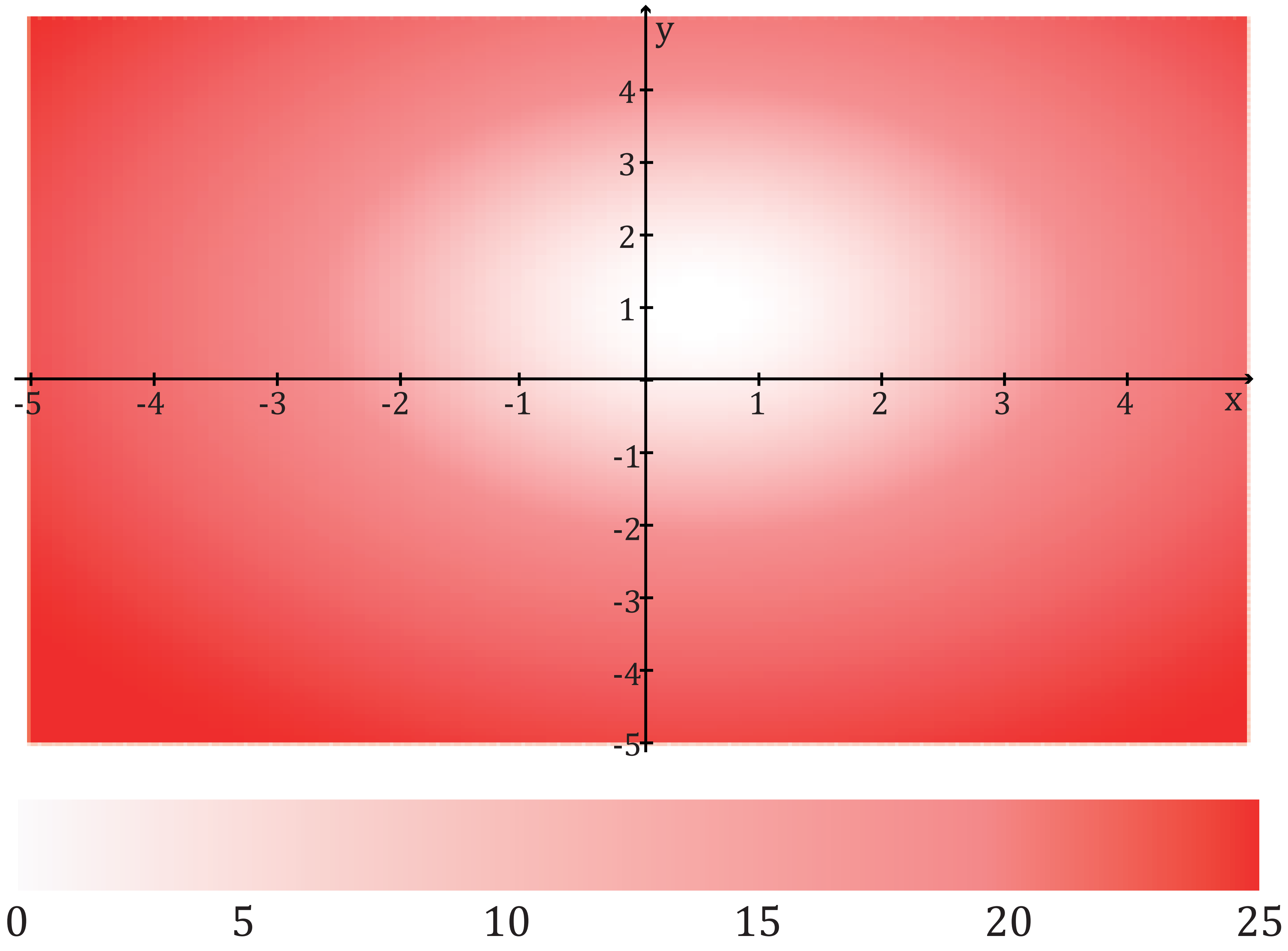
Mehrdimensionale Funktionen

Funktionen können von zwei oder mehr Variablen abhängig sein. Ein Beispiel:

$$f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20$$

Bei zwei Variablen ist die grafische Darstellung als Flächendiagramm oder als Heatmap möglich.

Ab drei Variablen lässt sich die Funktion i. d. R. nicht mehr visualisieren.



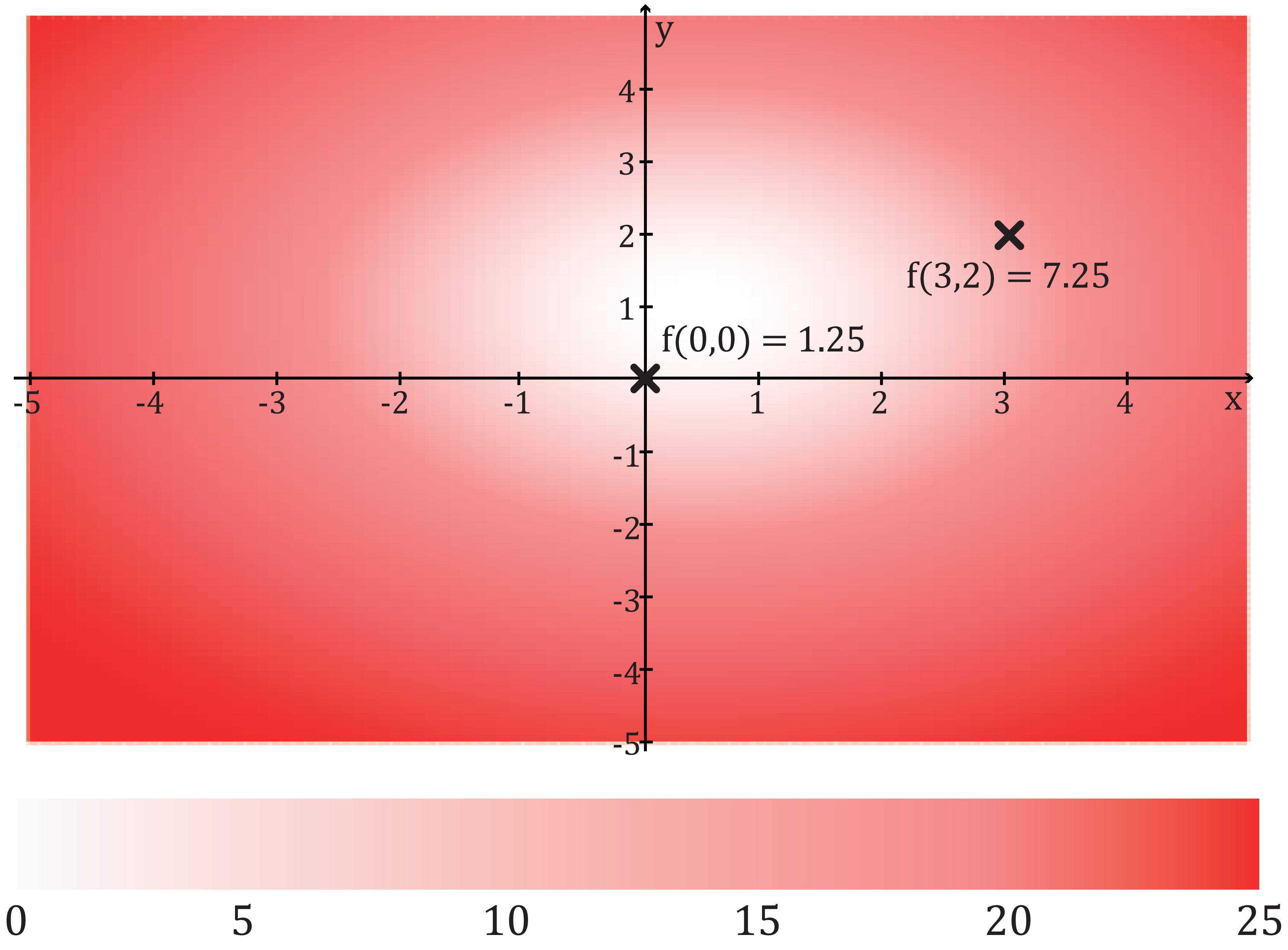
Mehrdimensionale Funktionen

Funktionswerte erhalten wir, indem wir für alle Variablen Werte einsetzen.

$$f(x,y) = x^2 - x + y^2 - 2y + 1.25$$

$$f(0,0) = 0^2 - 0 + 0^2 - 2 \cdot 0 + 1.25 = 1.25$$

$$f(3,2) = 3^2 - 3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 1.25 = 7.25$$



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Mehrdimensionale Funktionen

Nullstellen von Funktionen mit mehreren Variablen finden wir durch Nullsetzen der Funktion und lösen der entstehenden Gleichung.

Häufig ist die Lösung keine Kombination von Zahlenwerten, sondern eine Gleichung, die uns sagt in welchem Verhältnis die Variablen stehen müssen.

Dieselbe Besonderheit ergibt sich bei Schnittstellen von zwei Funktionen mit mehreren Variablen.

$$f(x,y) = x^2 - y \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

$$g(x,y) = xy - 1 \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

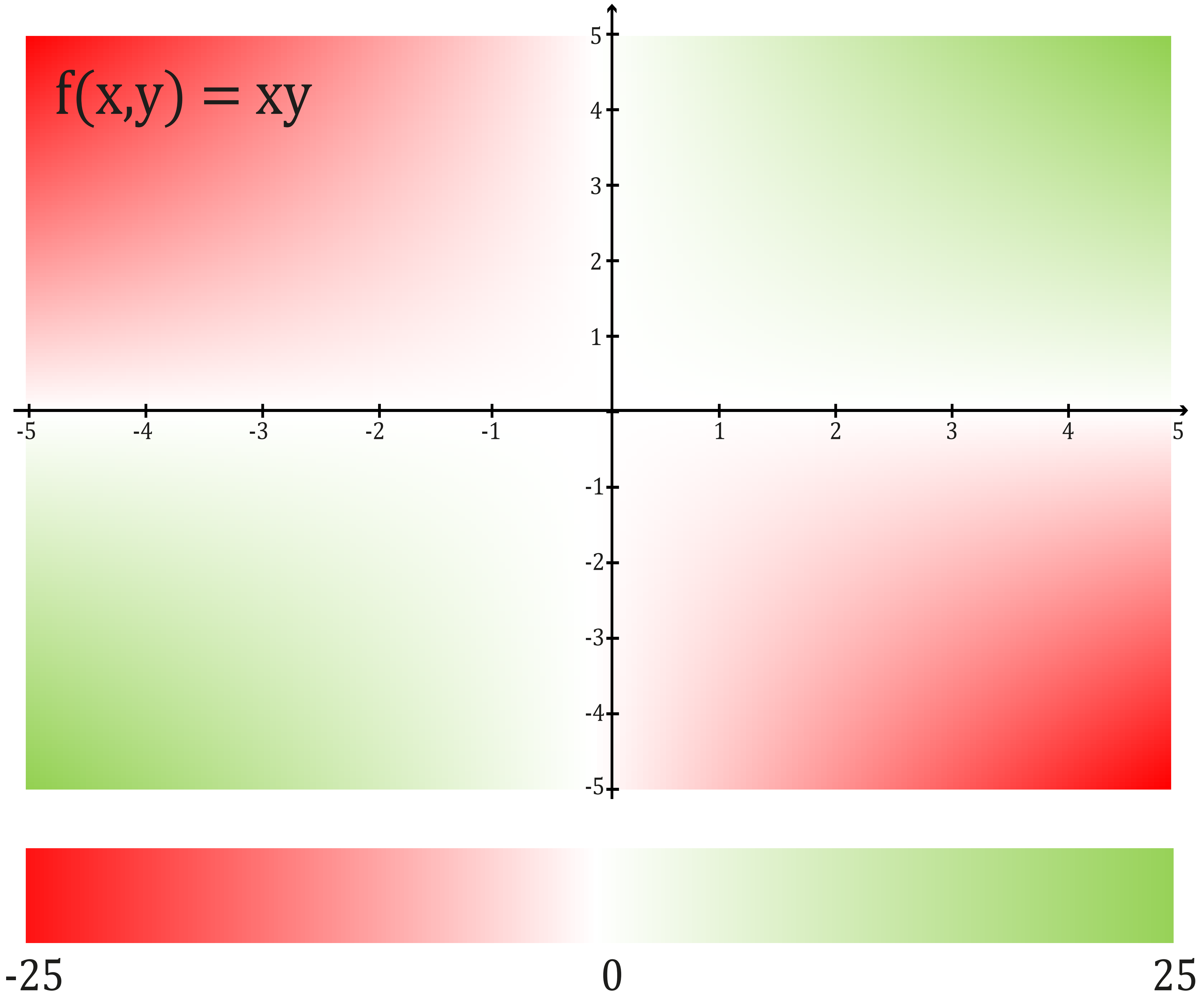
$$h(x,y) = x^2 + y^2 \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ und } y = 0$$

Mehrdimensionale Funktionen

Bei Grenzwerten müssen wir nun aufpassen, welche Variable wir gegen einen bestimmten Wert bzw. unendlich laufen lassen.

Das Ergebnis des Grenzwerts kann von den Werten anderer Variablen abhängen!

$$\lim_{x \to \infty} f(x,y) = \begin{cases} \infty & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \\ -\infty & \text{für } y < 0 \end{cases}$$



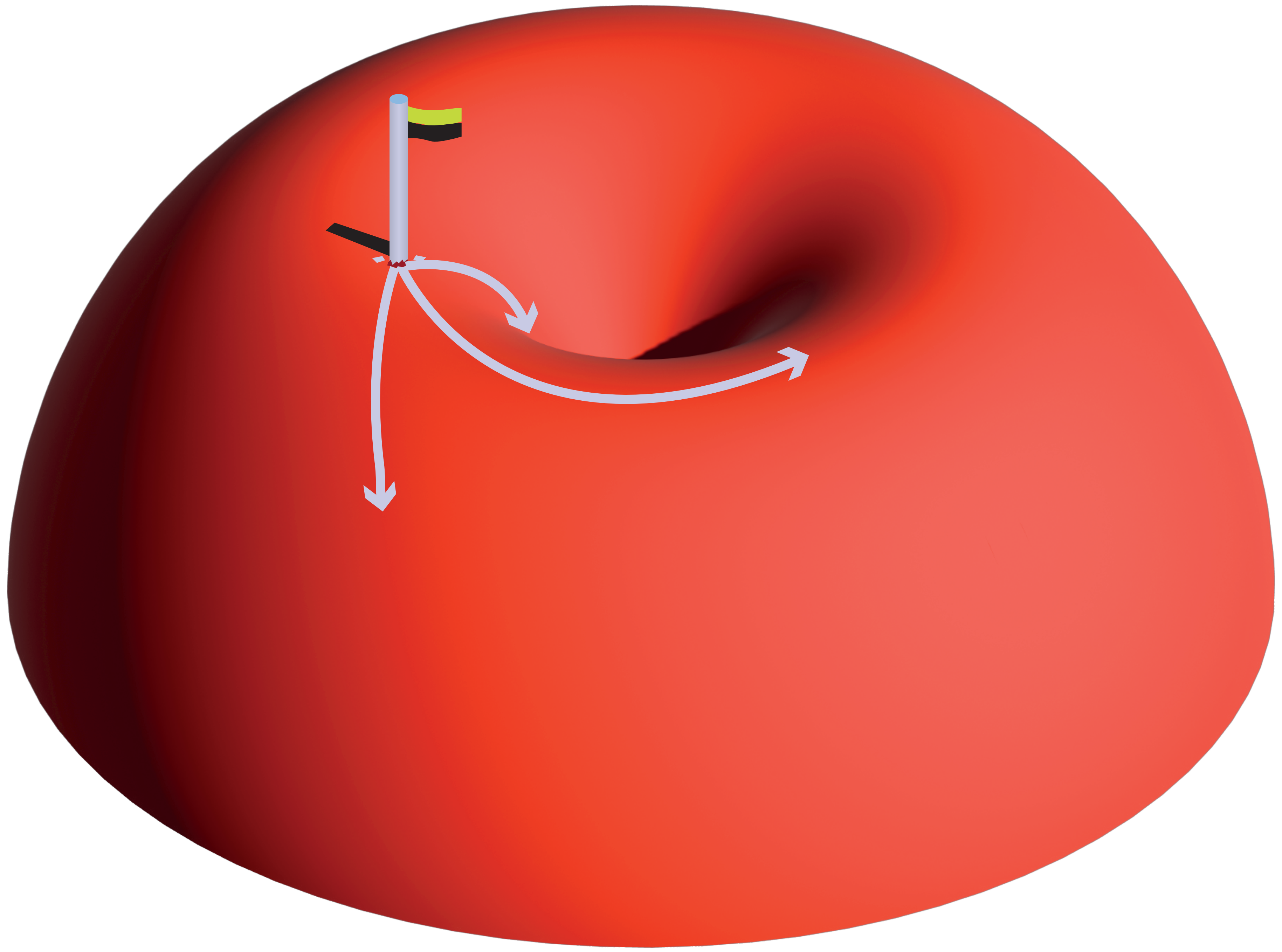
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Mehrdimensionale Funktionen

Die Ableitung einer mehrdimensionalen Funktion gibt ihre Steigung an. Betrachten wir dazu die rechts dargestellte Funktion.

Wie steil ist die Funktion an der Fahne?

- Gehen wir nach "rechts", geht es steil nach unten in das Loch.
- Gehen wir nach "vorne", ist es erst flach und wird dann steiler.
- Gehen wir im Kreis um den Krater, ist es komplett flach.

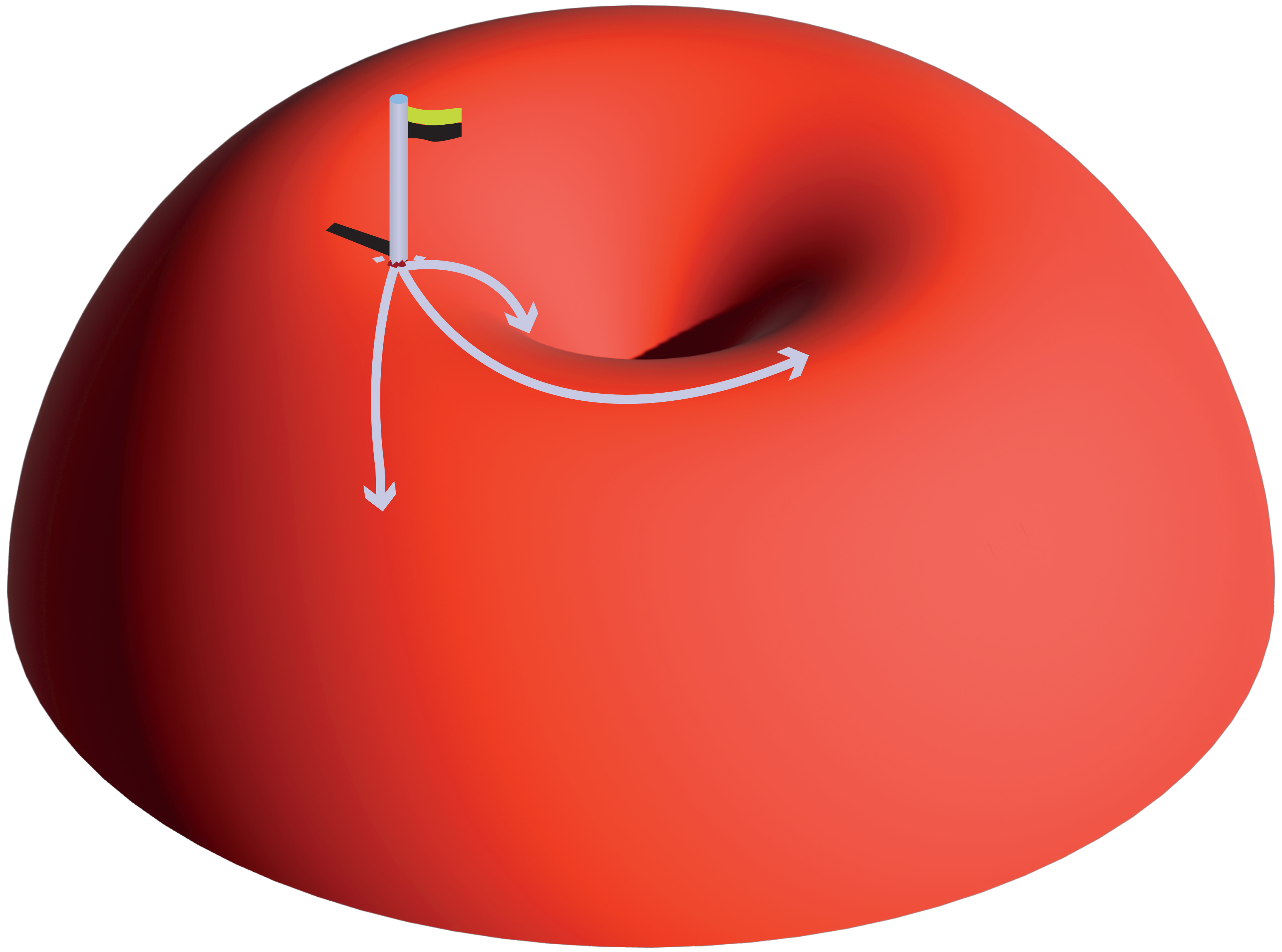


Partielle Ableitungen

Je nachdem wie weit wir in Richtung x oder y gehen erhalten wir einen anderen Wert für die Steigung.

Sei dx die Änderung in Richtung x und dy die Änderung in Richtung y. Dann ist das totale Differenzial df definiert als:

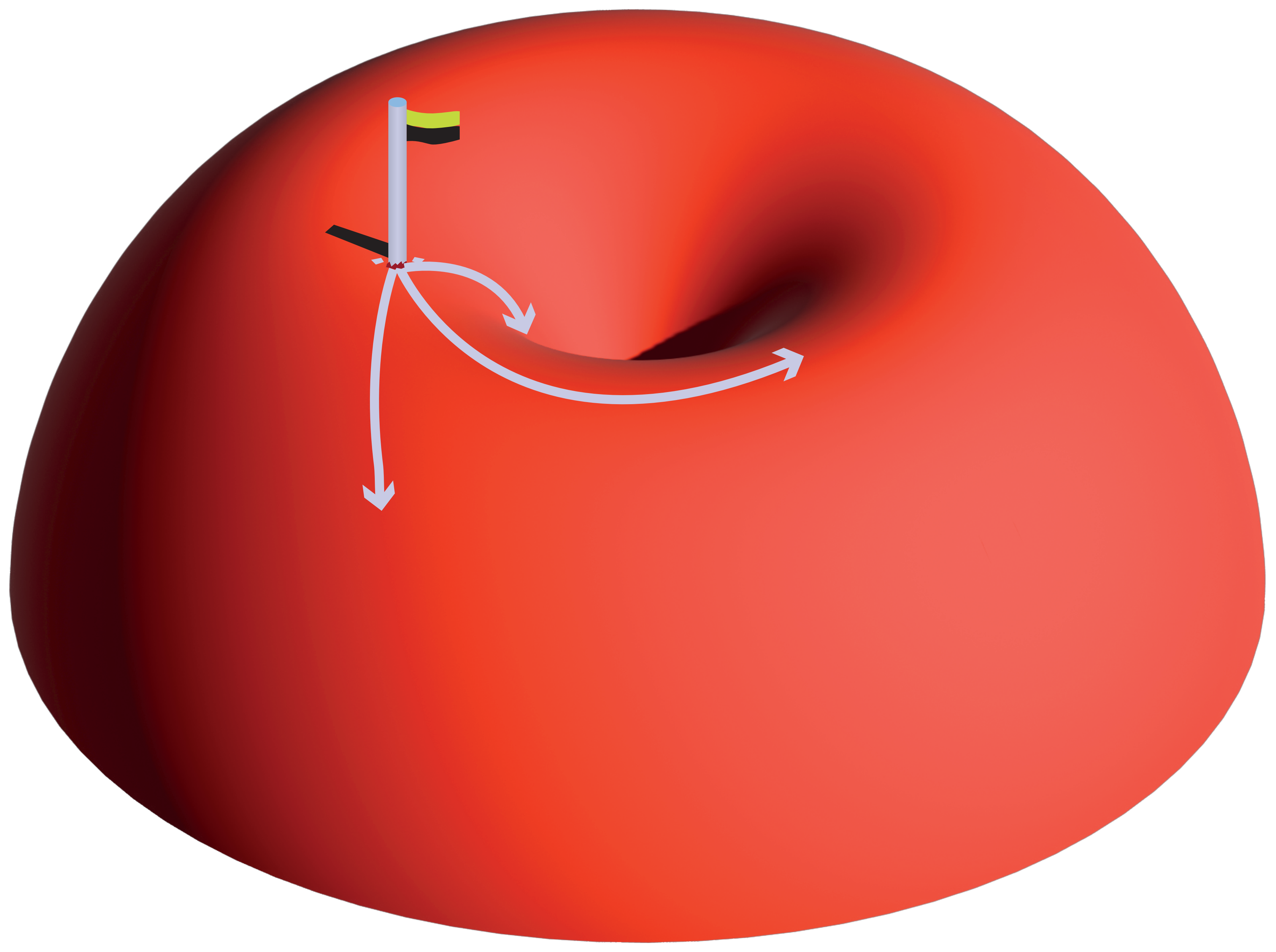
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Partielle Ableitungen

$$\mathrm{df} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{dy}$$



Die blau markierten Ausdrücke sind die partiellen Ableitungen der Funktion nach den Variablen x und y.

Die Rechenregeln sind dieselben wie bisher: Potenzregel, Summenregel, Produktregel usw. gelten auch partiell.

Wichtig Leiten wir partiell nach einer Variable ab, gelten alle anderen Variablen als Konstanten!

Partielle Ableitungen

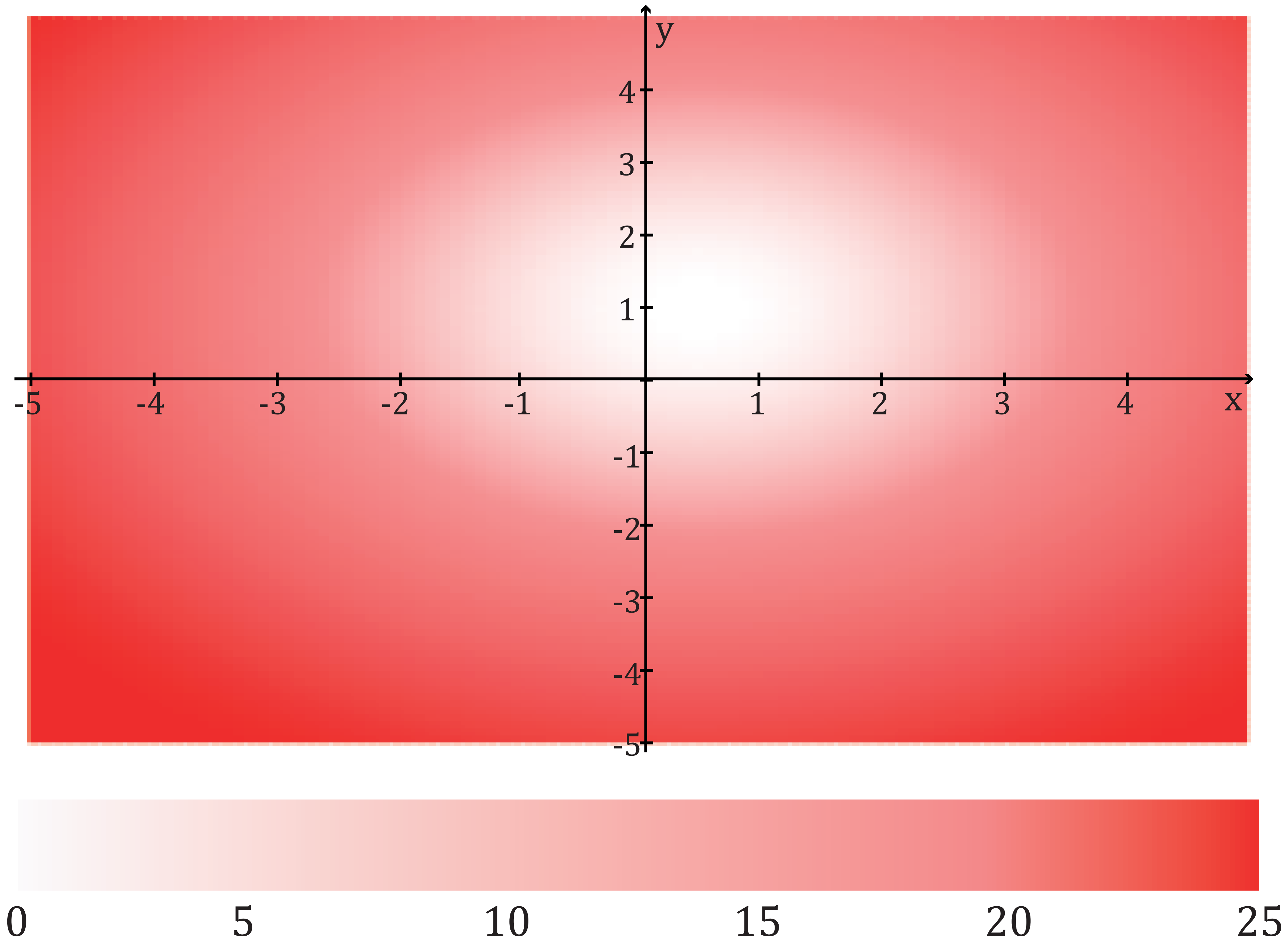
Bei der Beispielfunktion ...

$$f(x,y) = x^2 - x + y^2 - 2y + 1.25$$

...haben wir folgende partielle Ableitungen:

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$$



Berechnen Sie jeweils alle ersten partiellen Ableitungen!

$k(x) = \sqrt{x} = x^{0,5} \quad k'(x) = 0{,}5x^{-0,5} = \frac{1}{2}x^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\underline{\sqrt{xy} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}$

$$f(x,y) = \underline{x} - xy^3 + x^2y$$

$$f'_x(x,y) = 1 - y^3 + 2xy$$

$$f'_y(x,y) = -3xy^2 + x^2$$

$4x \to 4 \qquad 4x^2 \to 4\cdot 2\cdot x$

$8x \to 8 \qquad 8x^2 \to 8\cdot 2\cdot x$

$y^3x \to y^3 \qquad yx^2 \to 2yx$

$$g(x,y) = y\sqrt{x} + \sqrt{xy}$$

$$g'_x(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$g'_y(x,y) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$$

$$h(x,y) = xy\ln(x) - xe^{y^2}$$

$$h'_x(x,y) = y\cdot\ln(x) + \cancel{x}y\cdot\frac{1}{\cancel{x}} - e^{y^2}$$

$$= y\,(1+\ln(x)) - e^{y^2}$$

$$h'_y(x,y) = x\cdot\ln(x) - 2y\cdot e^{y^2}\cdot x$$

$$= x\cdot\ln(x) - x\cdot 2y\cdot e^{y^2}$$

Produktregel $f(x) = g(x)\cdot h(x) \quad f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$

$g(x) = x\cdot y \qquad g'(x) = y$

$h(x) = \ln(x) \qquad h'(x) = \frac{1}{x}$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg **Ravensburg**

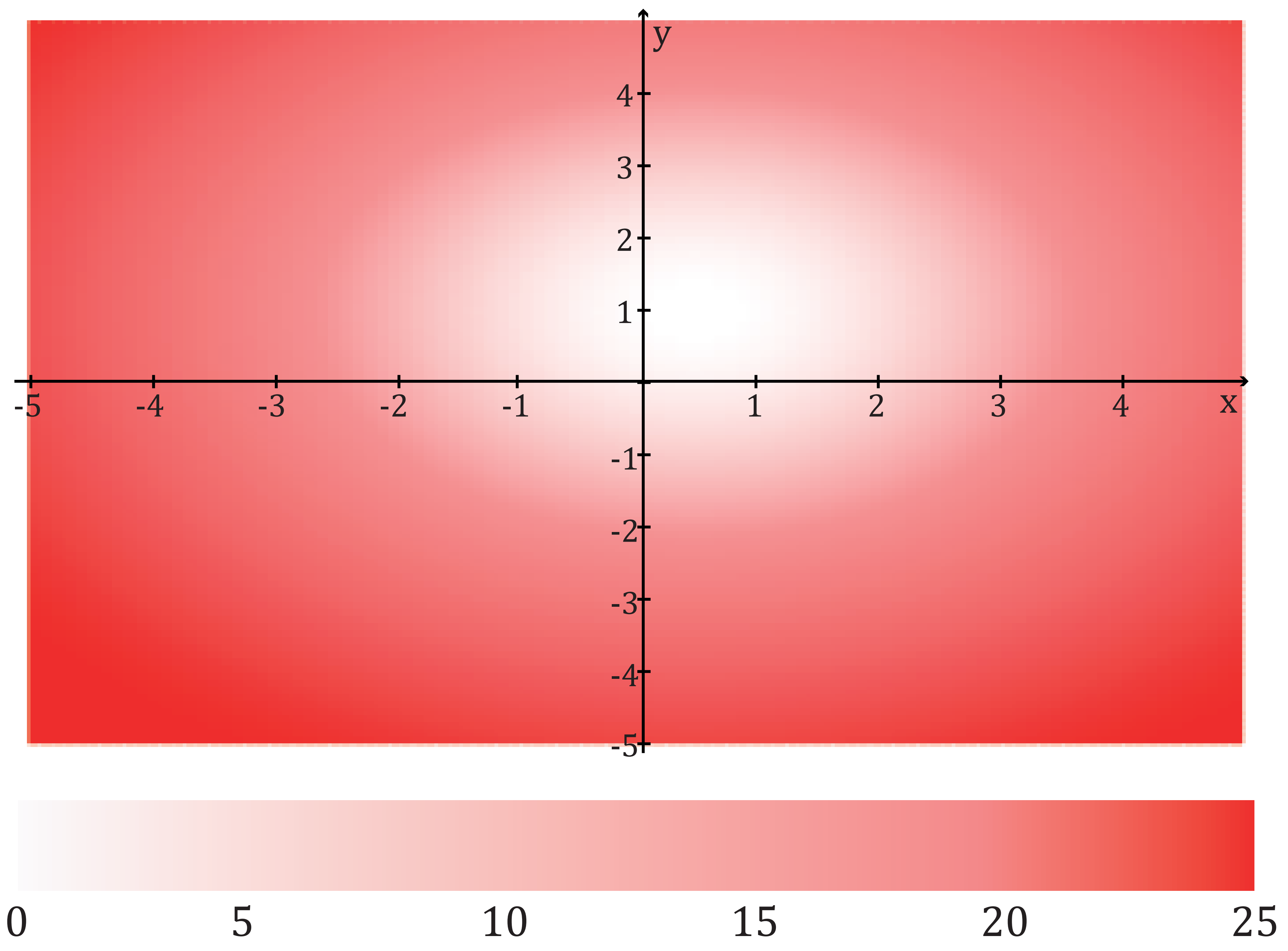
Extremstellen

Ähnlich wie bei eindimensionalen Funktionen können wir mit partiellen Ableitungen die Extremstellen von mehrdimensionalen Funktionen finden.

Notwendige Bedingung An einem Extrempunkt einer Funktion müssen die partiellen Ableitungen alle 0 sein.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 \overset{!}{=} 0 \implies x = 0.5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 \overset{!}{=} 0 \implies y = 1$$



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Extremstellen

Die **hinreichende Bedingung** ist deutlich komplizierter als bei Funktionen mit einer Variablen. Wir müssten eine sogenannte Hessematrix aufstellen, ihre Eigenwerte berechnen und daraus auf ihre Definitheit schließen.

Wir beschränken uns daher auf die notwendige Bedingung.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(H - \lambda I) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\Rightarrow \text{H positiv definit}$$

$$\Rightarrow \text{Minimum}$$

An welchen Stellen sind die notwendigen Bedingungen für eine Extremstelle erfüllt?

$f(x,y) = x^2y^2 - xy$

$f'_x(x,y) = 2xy^2 - y \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow y(2xy-1)$

$f'_y(x,y) = 2x^2y - x \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x(2xy-1)$

Erfüllt wenn $x = y = 0$ oder wenn $x = \frac{1}{2y}$

$g(x,y) = x^4y^2$

$g'_x(x,y) = 4x^3y^2 \overset{!}{=} 0$

$g'_y(x,y) = 2x^4y \overset{!}{=} 0$

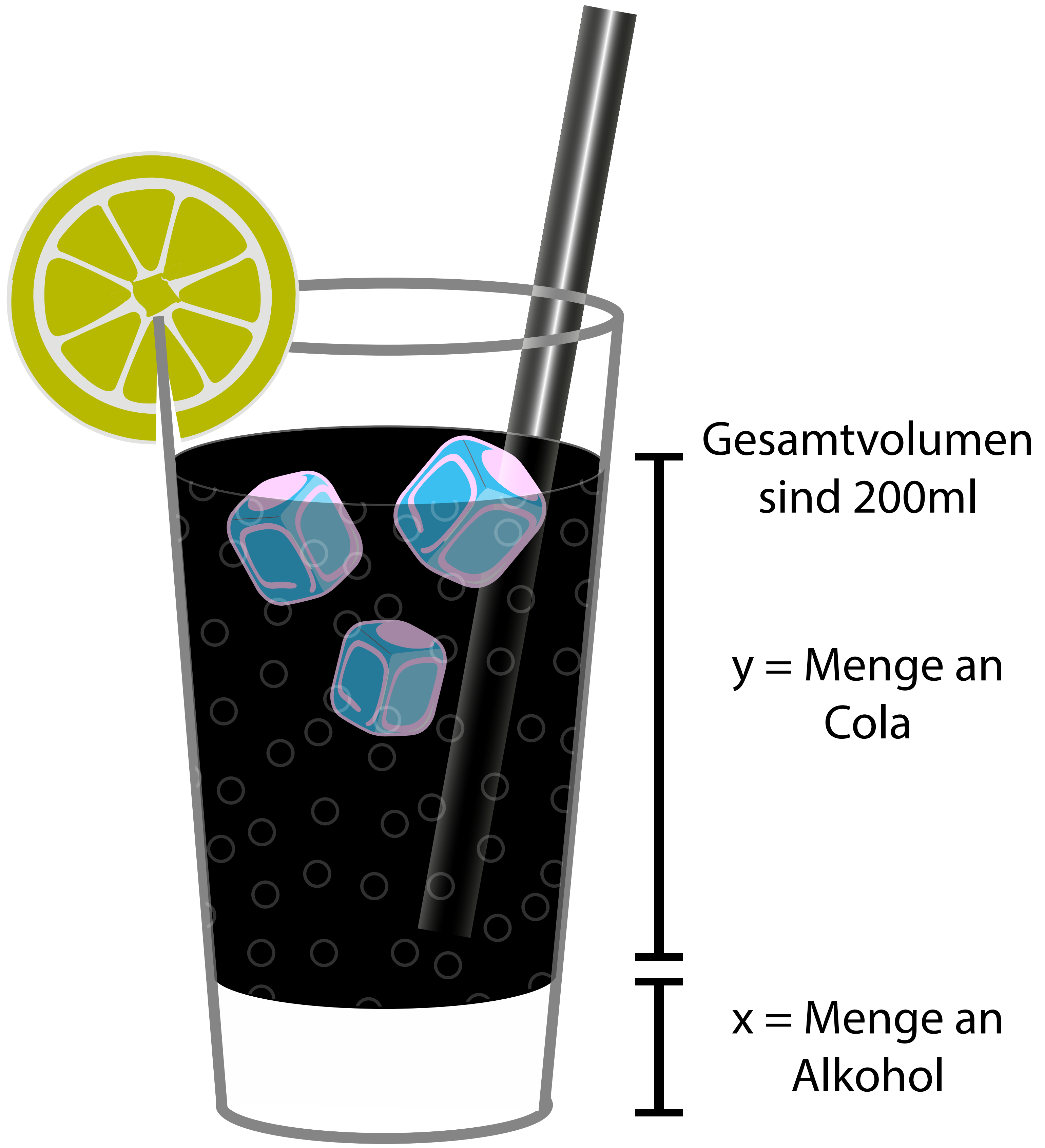
Erfüllt wenn $x = 0$ oder $y = 0$

Lagrange Verfahren

Idee Wir suchen ein Minimum/Maximum einer Funktion, wobei wir nur Stellen der Funktion berücksichtigen die bestimmte Bedingungen erfüllen.

Beispiel Ein Student möchte ein Glas Mische bestehend aus x cl Alkohol und y cl Cola trinken. Seine Nutzenfunktion wird durch $u(x,y) = xy^3$ beschrieben und in sein Glas passen 20cl.

Welche Mischung gibt ihm den höchsten Nutzen?



Lagrange Verfahren

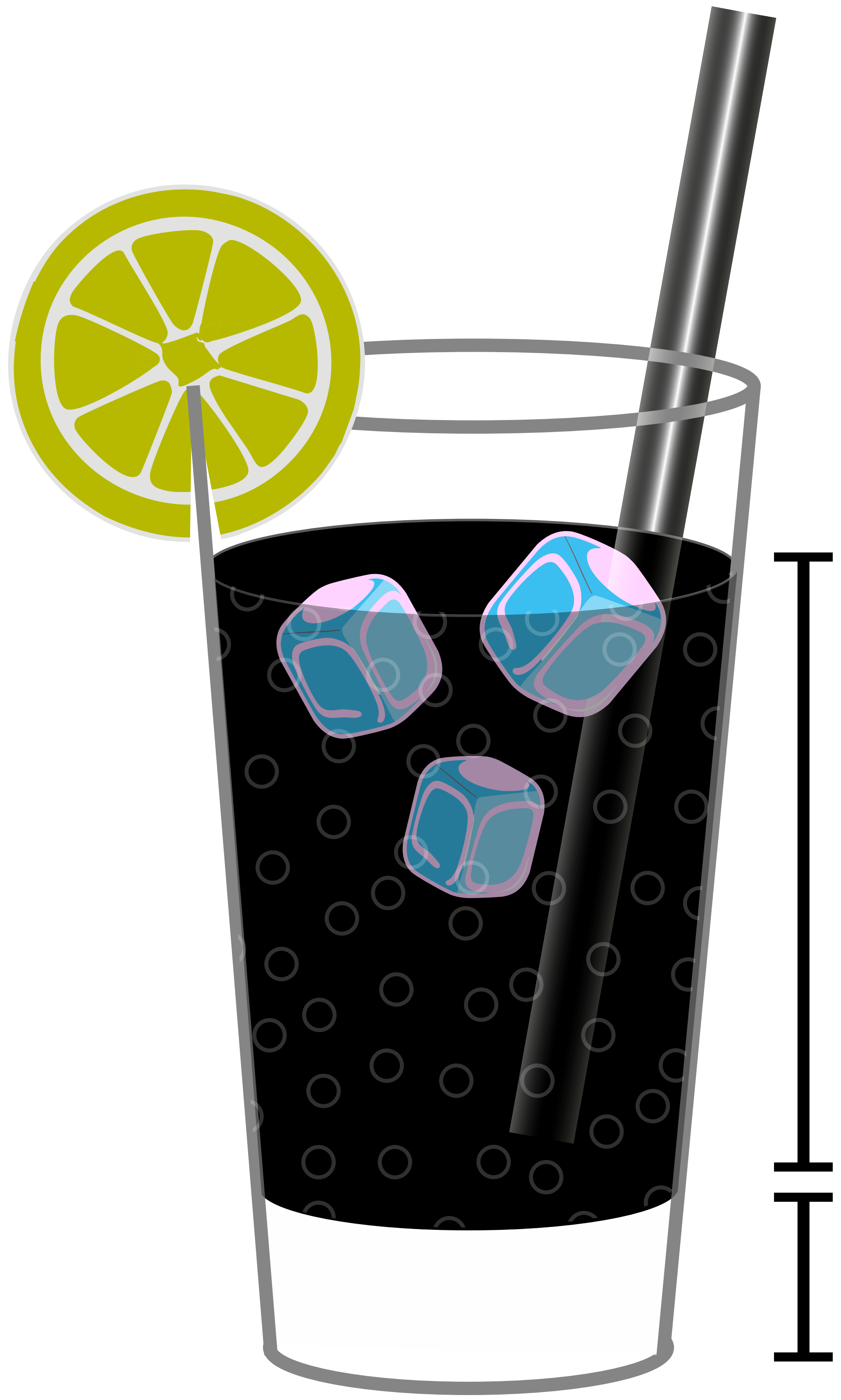
Naiver Lösungsansatz Wir berechnen die beiden partiellen Ableitungen der Nutzenfunktion und setzen diese 0.

Wir erhalten dabei aber eine Art Minimum. Wenn er nichts trinkt, hat er gar keinen Nutzen. Warum finden wir kein Maximum?

$$f(x,y) = xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 \overset{!}{=} 0 \implies y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 \overset{!}{=} 0 \implies x = 0 \text{ oder } y = 0$$

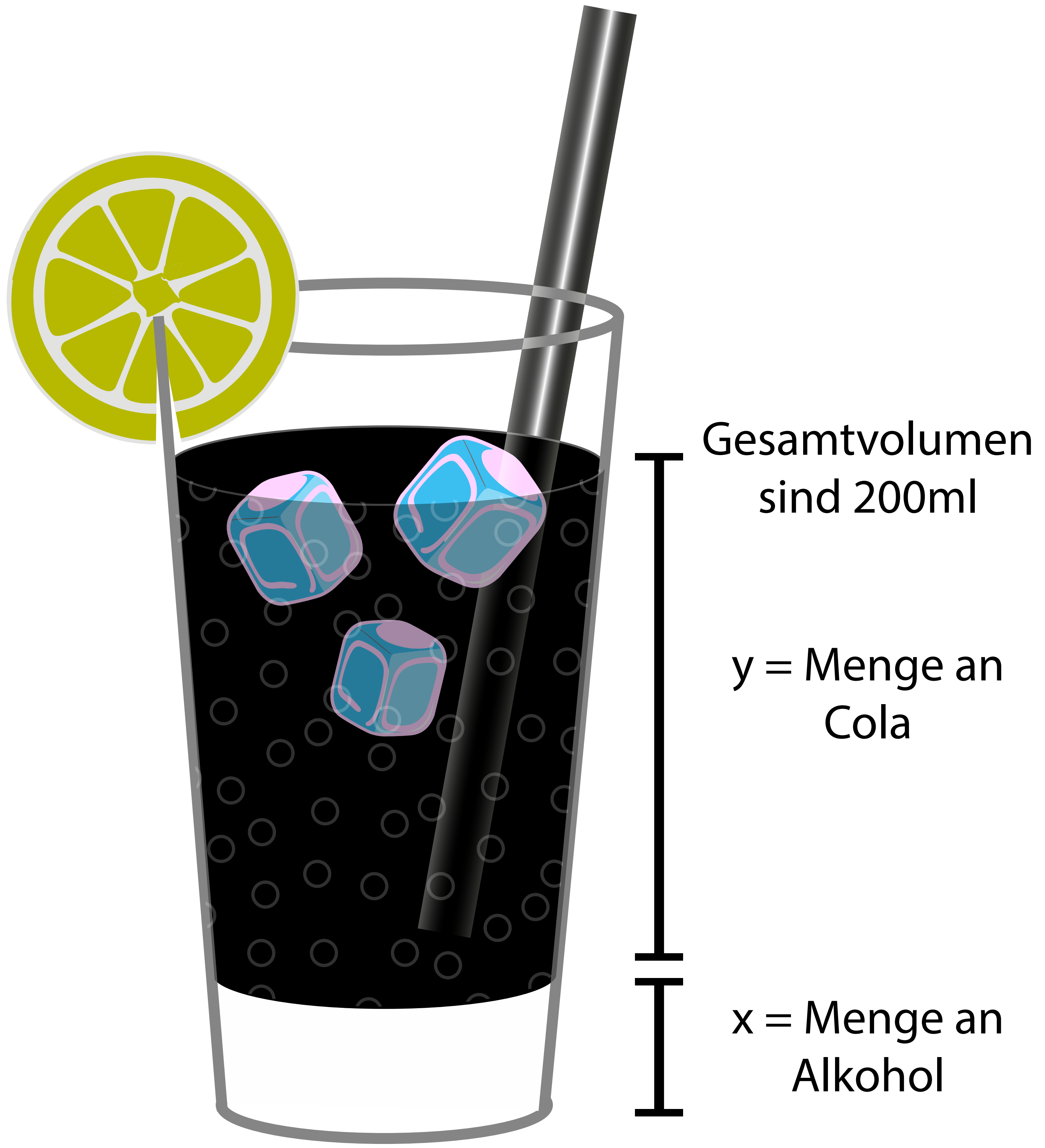


Lagrange Verfahren

Die Funktion u(x,y) weiß nichts von der Bedingung, dass nur 20 cl in das Glas passen.

Bei den partiellen Ableitungen wird diese Bedingung folglich auch nicht berücksichtigt und daher kann es auch kein Maximum geben.

Ohne Berücksichtigung der Bedingung kann der Student theoretisch immer noch mehr und noch mehr von beiden Flüssigkeiten in sein Glas gießen.



Lagrange Verfahren

Mit dem Lagrange Verfahren können wir die Zielfunktion, die wir maximieren/minimieren möchten mit einer Nebenbedingung verknüpfen.

Suche das Maximum/Minimum einer Funktion, gegeben dieser Einschränkung!

Wir durchlaufen dabei die rechts gezeigten Schritte!

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda"

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Lagrange Verfahren

Die ersten beiden haben wir in Gedanken bereits mit der Aufgabenstellung abgearbeitet. Wir müssen sie nur noch mathematisch notieren:

$$\begin{array}{ll} \max & u(x,y) = xy^3 \\ \text{s.t.} & x + y \leq 20 \end{array}$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda"

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Lagrange Verfahren

Beim dritten Schritt bringen wir die 20 auf die linke Seite, damit rechts die gewünschte 0 steht.

$$\max \quad u(x,y) = xy^3$$

$$\text{s.t.} \quad x + y \leq 20 \quad | -20$$

$$\Leftrightarrow \quad x + y - 20 \leq 0$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda“

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Lagrange Verfahren

Beim vierten Schritt multiplizieren wir beide Seiten der Nebenbedingung mit dem griechischen Buchstaben "Lambda". Da rechts eine Null steht, ändert sich dort nichts.

$$\max \quad u(x,y) = xy^3$$

$$\text{s.t.} \quad x + y \leq 20 \quad | -20$$

$$\Leftrightarrow \quad x + y - 20 \leq 0 \quad | \cdot\lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda(x + y - 20) \leq 0$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda“

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Lagrange Verfahren

Jetzt addieren wir den Term auf der linken Seite auf unsere Zielfunktion. Dadurch entsteht die sogenannte Lagrangefunktion, in der die Nebenbedingung berücksichtigt wird!

$$
\begin{array}{lll}
\max & u(x,y) = xy^3 & \\
\text{s.t.} & x + y \leq 20 & \mid -20 \\
\Leftrightarrow & x + y - 20 \leq 0 & \mid \cdot\lambda \\
\Leftrightarrow & \underbrace{\lambda(x + y - 20)} \leq 0 &
\end{array}
$$

$+$

$$L(x,y,\lambda) = xy^3 + \lambda(x + y - 20)$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda"

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Lagrange Verfahren

Im sechsten Schritt berechnen wir alle partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion.

$$L(x,y,\lambda) = xy^3 + \lambda(x + y - 20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y^3 + \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 3xy^2 + \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 20$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda"

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Lagrange Verfahren

Im siebten Schritt setzen wir alle partiellen Ableitungen gleich 0 und erhalten dadurch ein Gleichungssystem!

$$L(x,y,\lambda) = xy^3 + \lambda(x + y - 20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y^3 + \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 3xy^2 + \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 20 \stackrel{!}{=} 0$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda"

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Lagrange Verfahren

$$L(x,y,\lambda) = xy^3 + \lambda(x + y - 20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y^3 + \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 3xy^2 + \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$y^3 + \lambda = 3xy^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow y^3 = 3xy^2$$

$$\Rightarrow y = 3x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 20 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow x + 3x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 4x = 20$$

$$\Rightarrow x = 5\,,\, y = 15$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda"

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

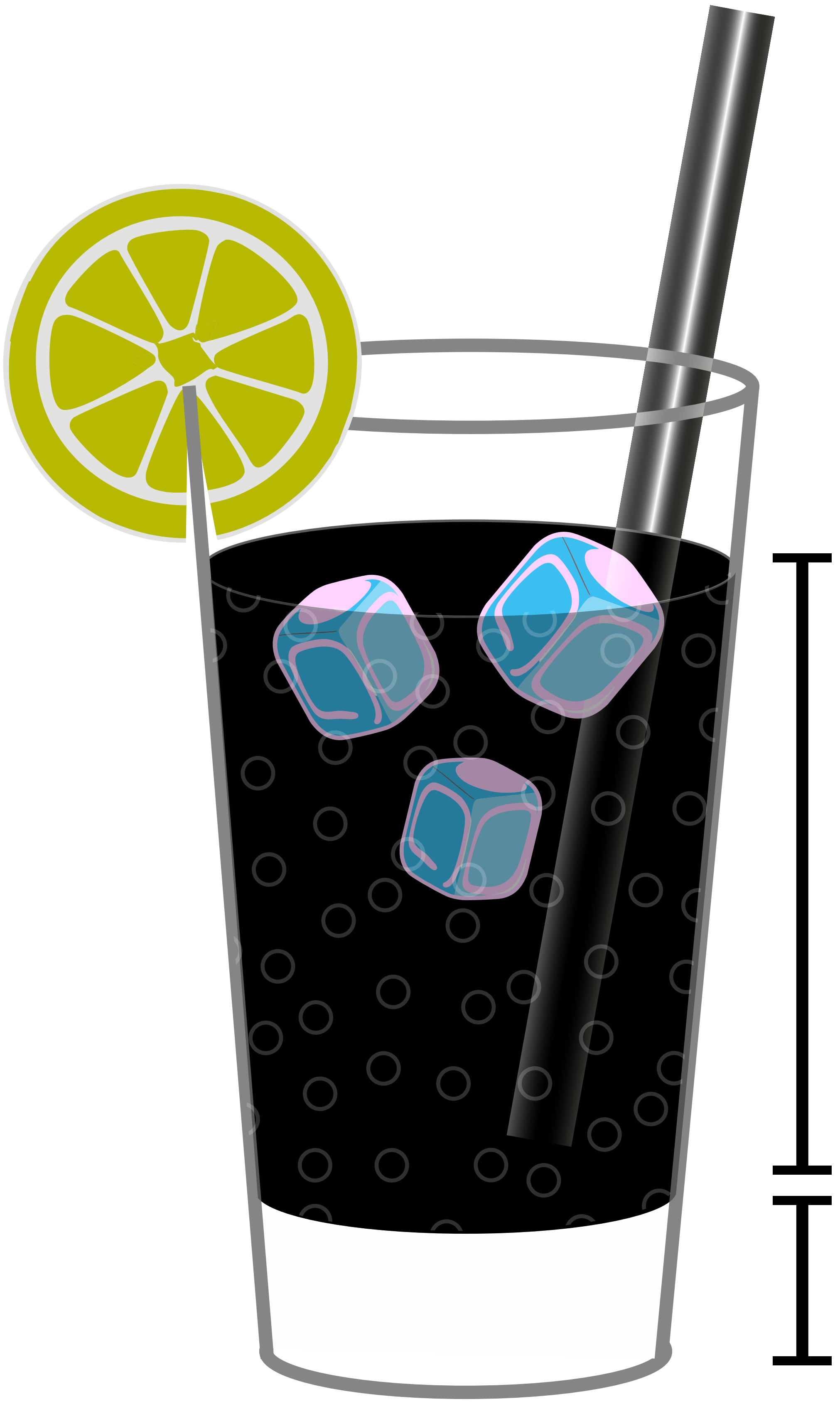
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Lagrange Verfahren

Beispiel Ein Student möchte ein Glas Mische bestehend aus x cl Alkohol und y cl Cola trinken. Seine Nutzenfunktion wird durch $u(x,y) = xy^3$ beschrieben und in sein Glas passen 20cl.

Welche Mischung gibt ihm den höchsten Nutzen?

Unter Berücksichtigung der Nebenbedingung liegt das Nutzen-maximum bei 5cl Alkohol und 15cl Cola.



$$\max \quad u(x,y) = x \cdot y + \leftarrow$$

$$\text{s.t.} \quad 1x + 2y \leq 30 \quad | -30$$

$$\iff 1x + 2y - 30 \leq 0 \quad | \cdot \lambda$$

$$\iff \lambda(x + 2y - 30) \leq 0$$

$u(x,y)$ Nutzenfunktion

x wie viel kaufe ich von Gut X

y wie viel kaufe ich von Gut Y

30 Budget des Haushaltes

1 Preis von Gut X

2 Preis von Gut Y

Wenn ich $10\,X$ und $3\,Y$ kauf
gebe ich $1 \cdot 10$ für X aus
gebe ich $3 \cdot 2$ für Y aus

$$y + \lambda = x + 2\lambda$$

$$L(x,y,\lambda) = x \cdot y + \lambda(\underline{x + 2y - 30})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 30 \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{array}{rl} & x + 0y + 2\lambda = 0 \\ - & (y + \lambda) = 0 \\ - & (y + \lambda) = 0 \\ \hline & x - 2y = 0 \\ \iff & \boxed{x = 2y} \end{array}$$

$$2y + 2y - 30 = 0 \iff 4y = 30 \Rightarrow y = 7.5 \quad x = 15$$

Einheit VI

In der "Analysis II" erweitern wir den ersten Teil der Analysis um:

Funktionen mit mehreren Variablen, dem damit verbundenen Konzept der partiellen Ableitung und dem Lagrange Verfahren.

Die Integralrechnung als Gegenstück der Differenzialrechnung.

Analysis II

- Integralrechnung
- Stammfunktionen
- Bestimmte Integrale
- Partielle Integration
- Substitution

VI

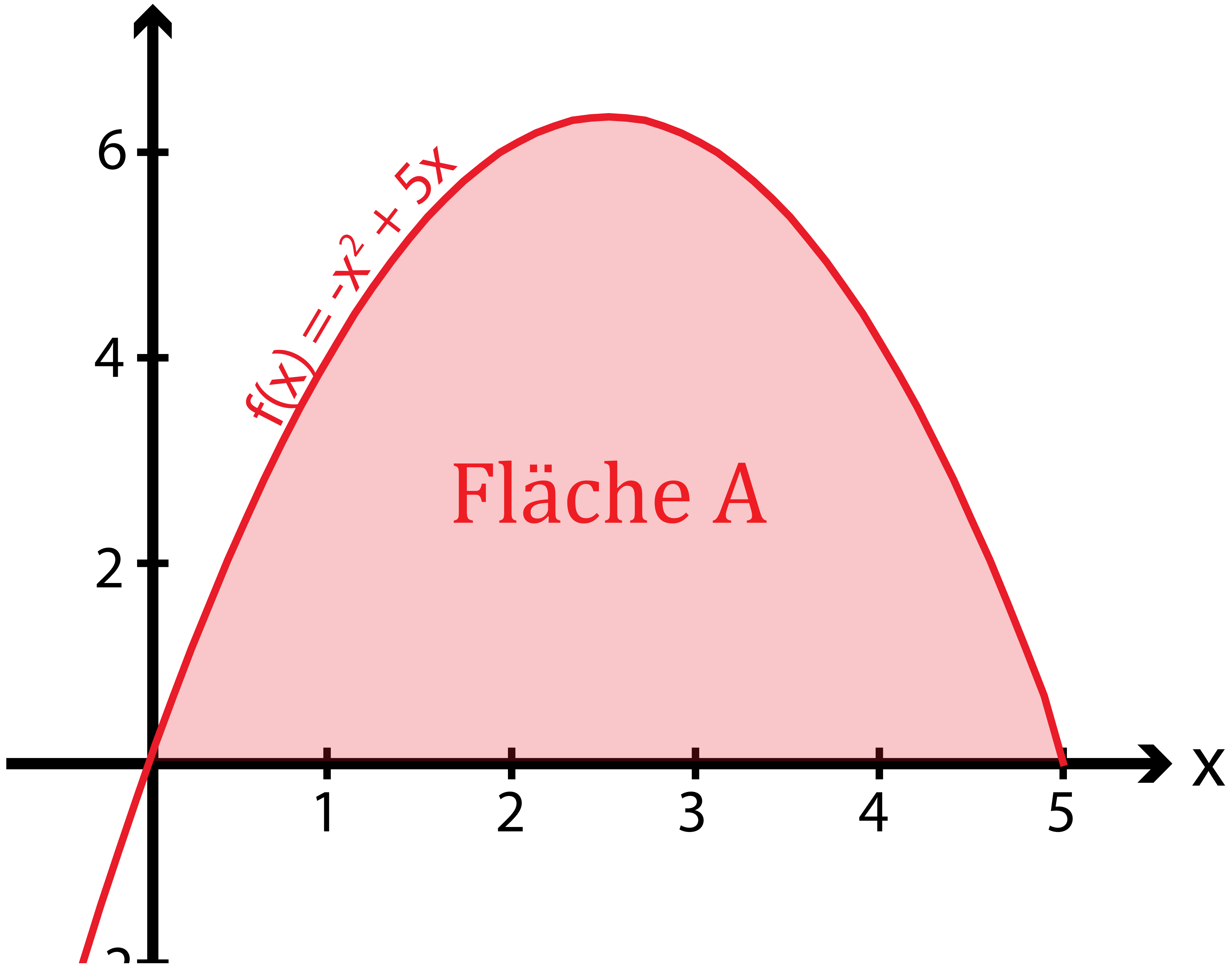
Integralrechnung

Wir wollen die Fläche unter einer Funktion berechnen.

$$f(x) = -x^2 + 5x \text{ auf dem Intervall } [0,5]$$

Wie können wir die Fläche A berechnen?

Für geometrische Formen wie Rechtecke gäbe es Formeln ...



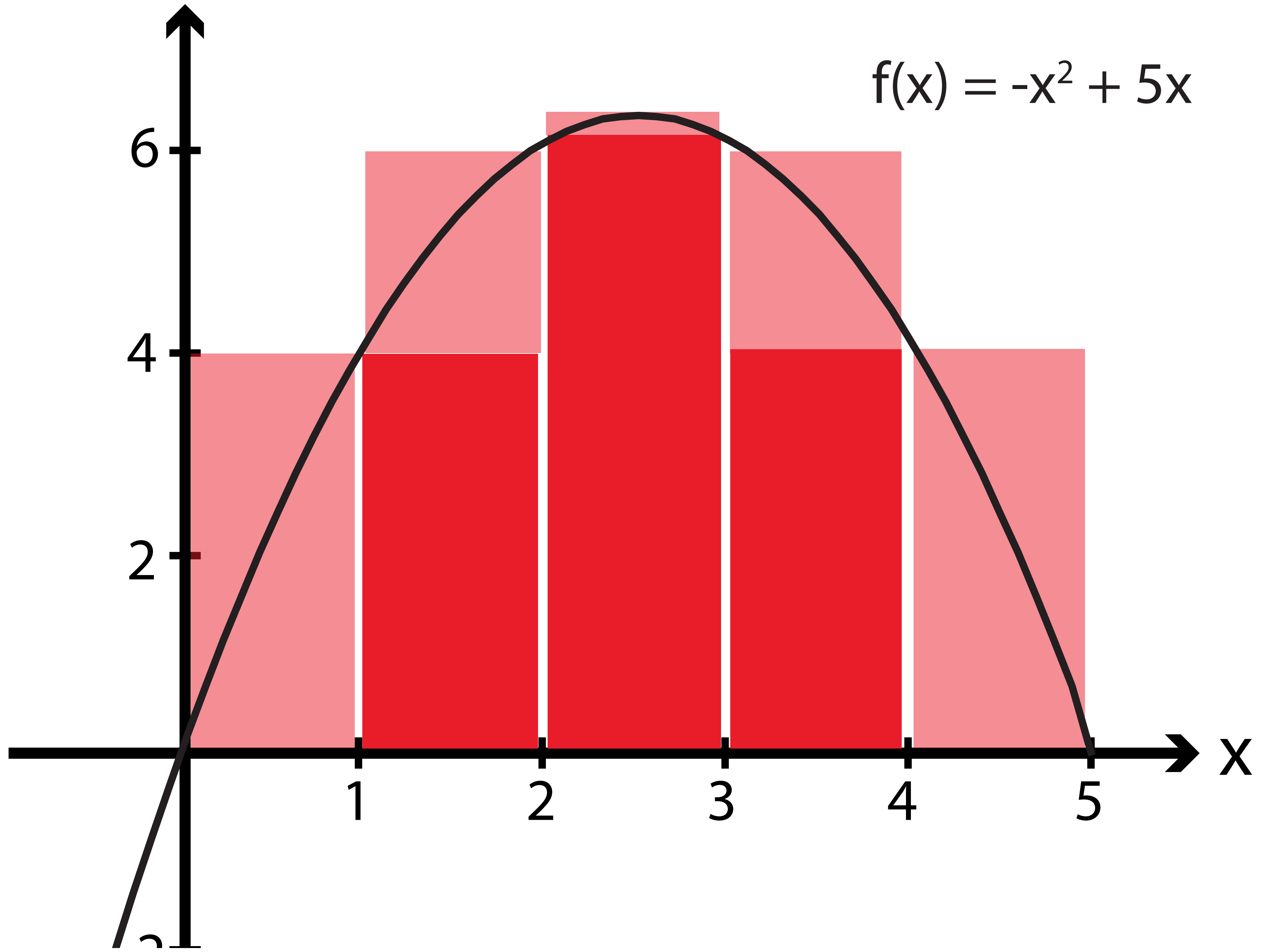
Integralrechnung

... und daher ist folgender Ansatz naheliegend: Wir teilen die Fläche in Rechtecke, auf deren Fläche wir berechnen können!

Die Breite können wir frei wählen. Wählen wir wie rechts gezeigt die Breite 1 teilen wir die Fläche in 5 Rechtecke auf.

Bei der Höhe gibt es zwei Varianten:

- Maximum der Funktion im Bereich (hell- & dunkelrote Flächen)
- Minimum der Funktion im Bereich (nur dunkelrote Flächen)



Integralrechnung

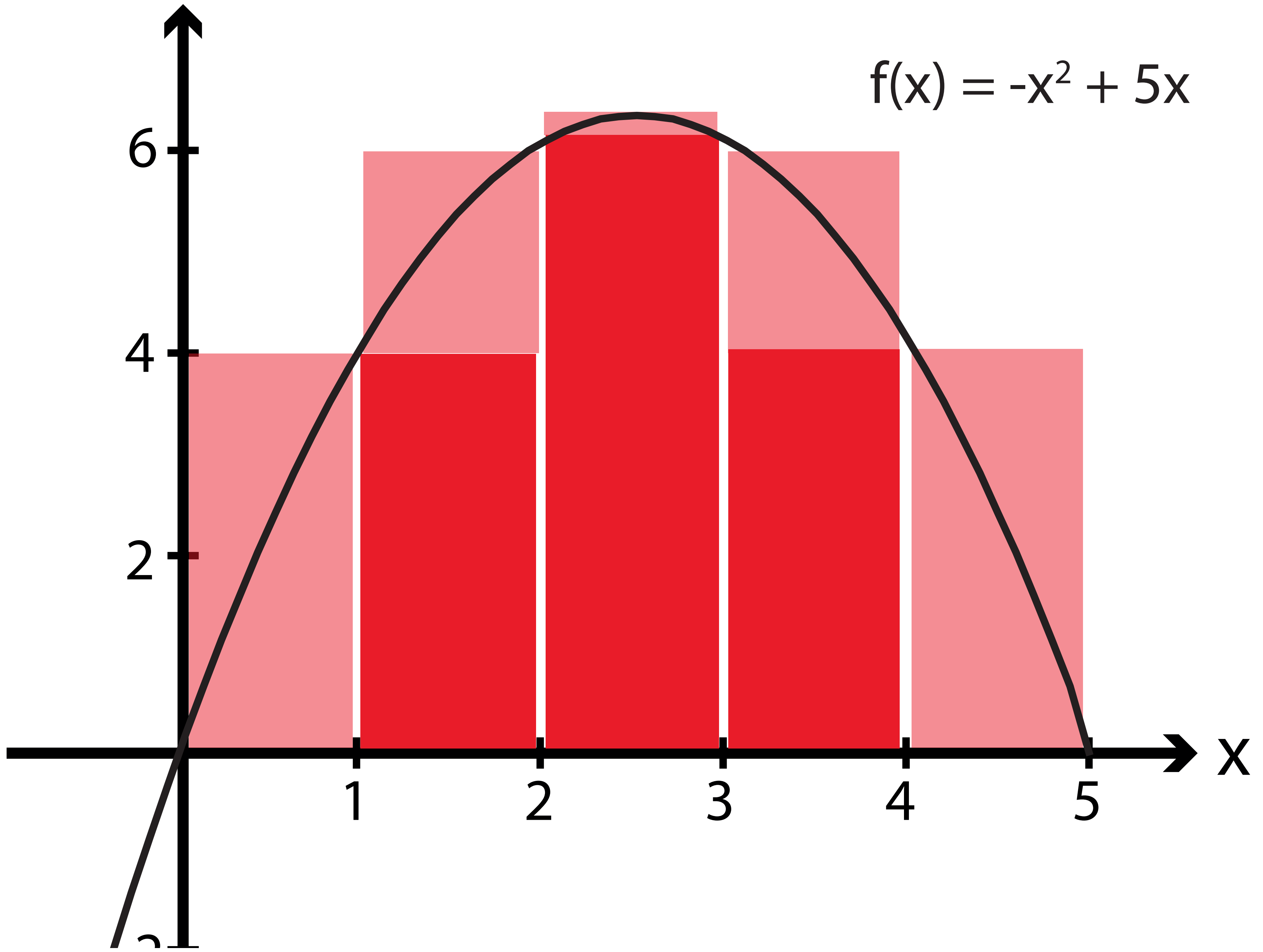
Wir erhalten die folgenden Näherungen:

$$\text{Obersumme } A \approx 4 + 6 + 6.25 + 6 + 4 = 26.25$$

$$\text{Untersumme } A \approx 0 + 4 + 6 + 4 + 0 = 14$$

Die Obersumme überschätzt die wahre Fläche tendenziell, da ihre Flächen über die Kurve hinausragen.

Die Untersumme unterschätzt die wahre Fläche tendenziell, da ihre Flächen die Kurve nicht vollständig ausfüllen.

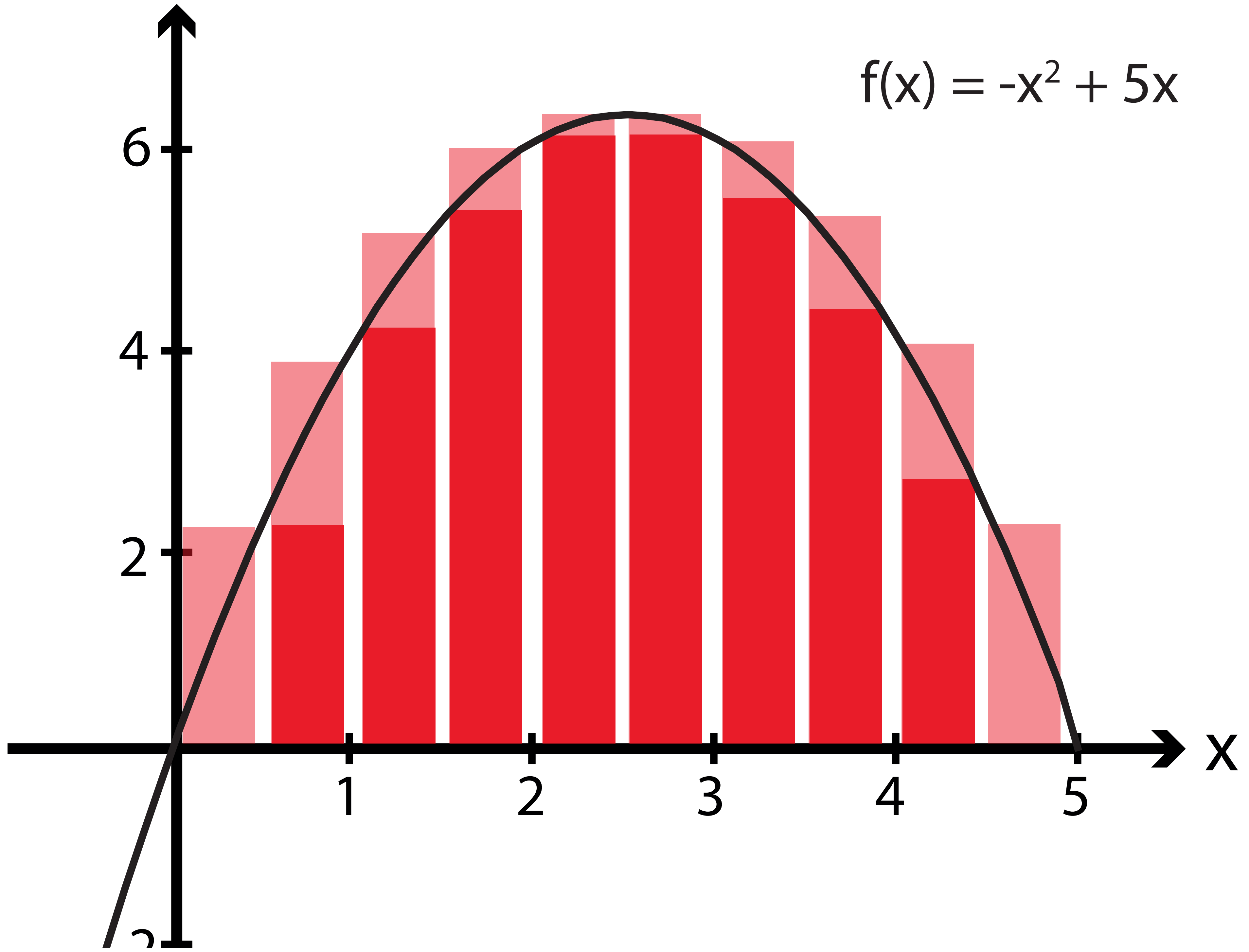


Integralrechnung

Die Näherung wird genauer, wenn wir die Breite der Rechtecke kleiner wählen.

Die Obersumme überschätzt die wahre Fläche weniger, da ihre Flächen weniger über die Kurve hinausragen.

Die Untersumme unterschätzt die wahre Fläche weniger, da ihre Flächen die Kurve vollständiger ausfüllen.



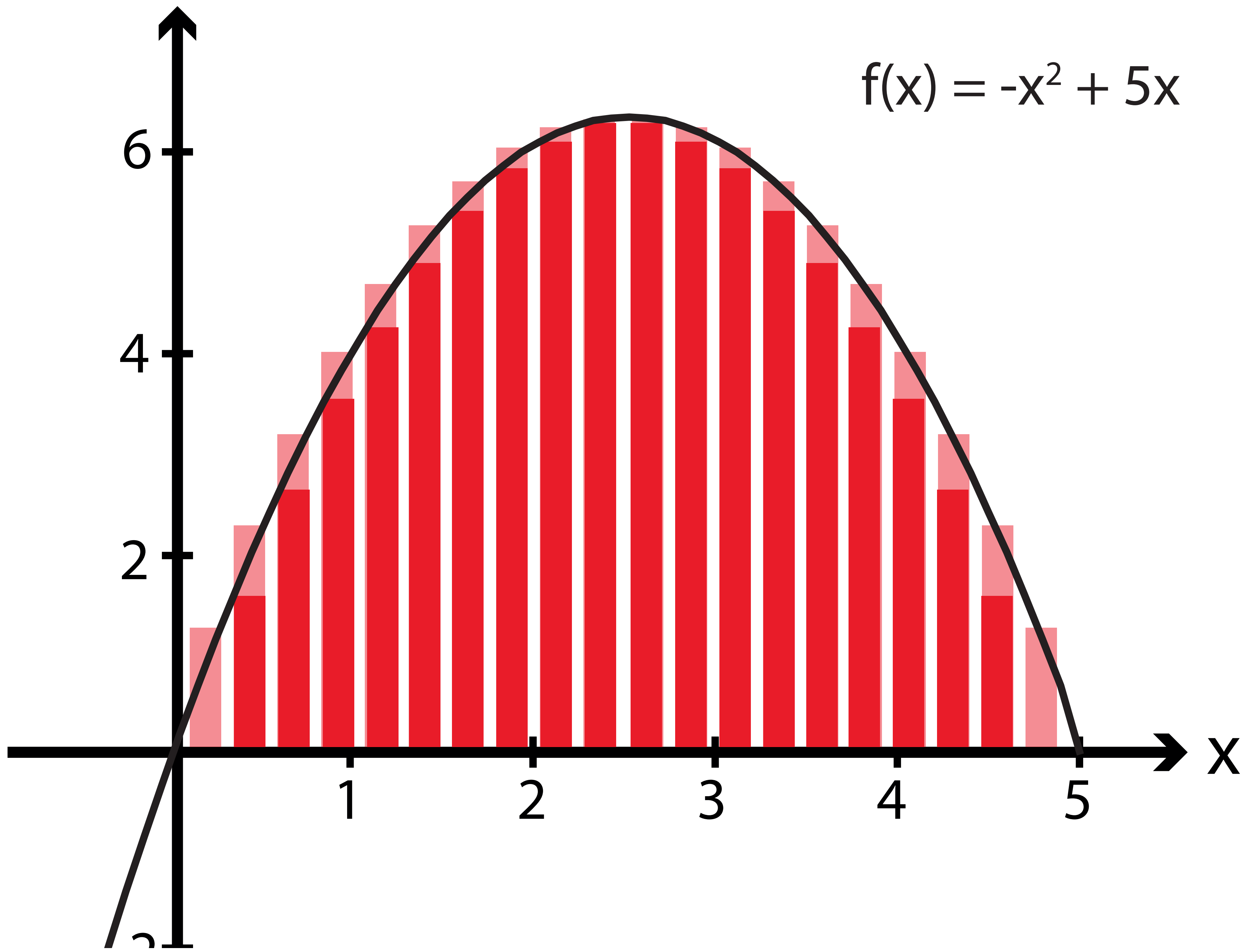
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Integralrechnung

Wir können für die Breite nicht 0 einsetzen, denn sonst haben wir unendlich viele Rechtecke mit Fläche 0.

Wir können aber untersuchen, gegen welchen Wert die Näherung geht, wenn wir die Breite der Rechtecke gegen 0.

Ähnlich wie bei der Differenzialrechnung berechnen wir diesen Grenzwert nicht jedes Mal von Hand, sondern arbeiten regelbasiert ...



Stammfunktionen

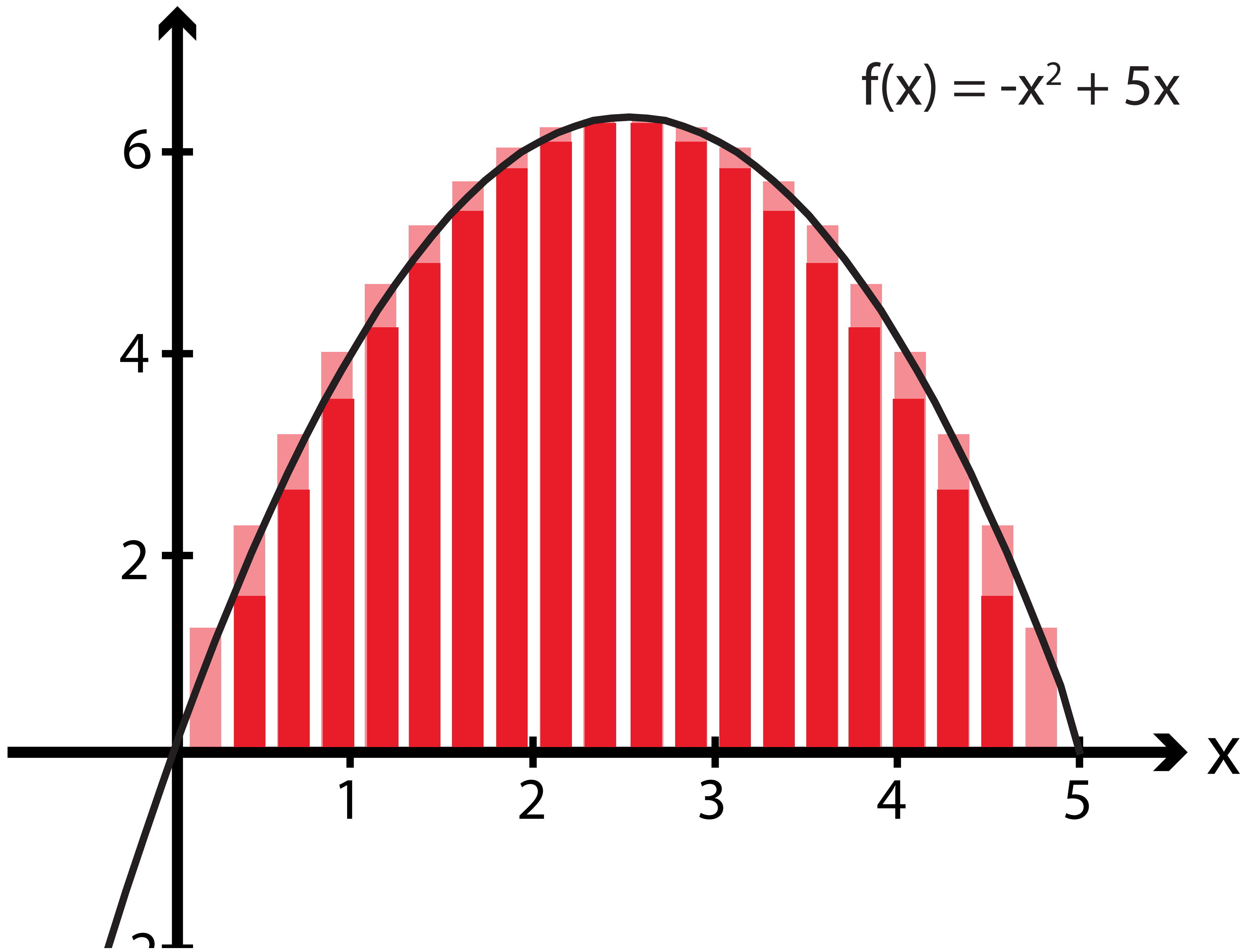
Um die Fläche unter Kurve zu berechnen, benötigen wir eine so-genannte Stammfunktion von f(x).

Wir suchen eine Funktion, deren Ableitung genau f(x) ergibt!

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Wir schreiben die Stammfunktion als:

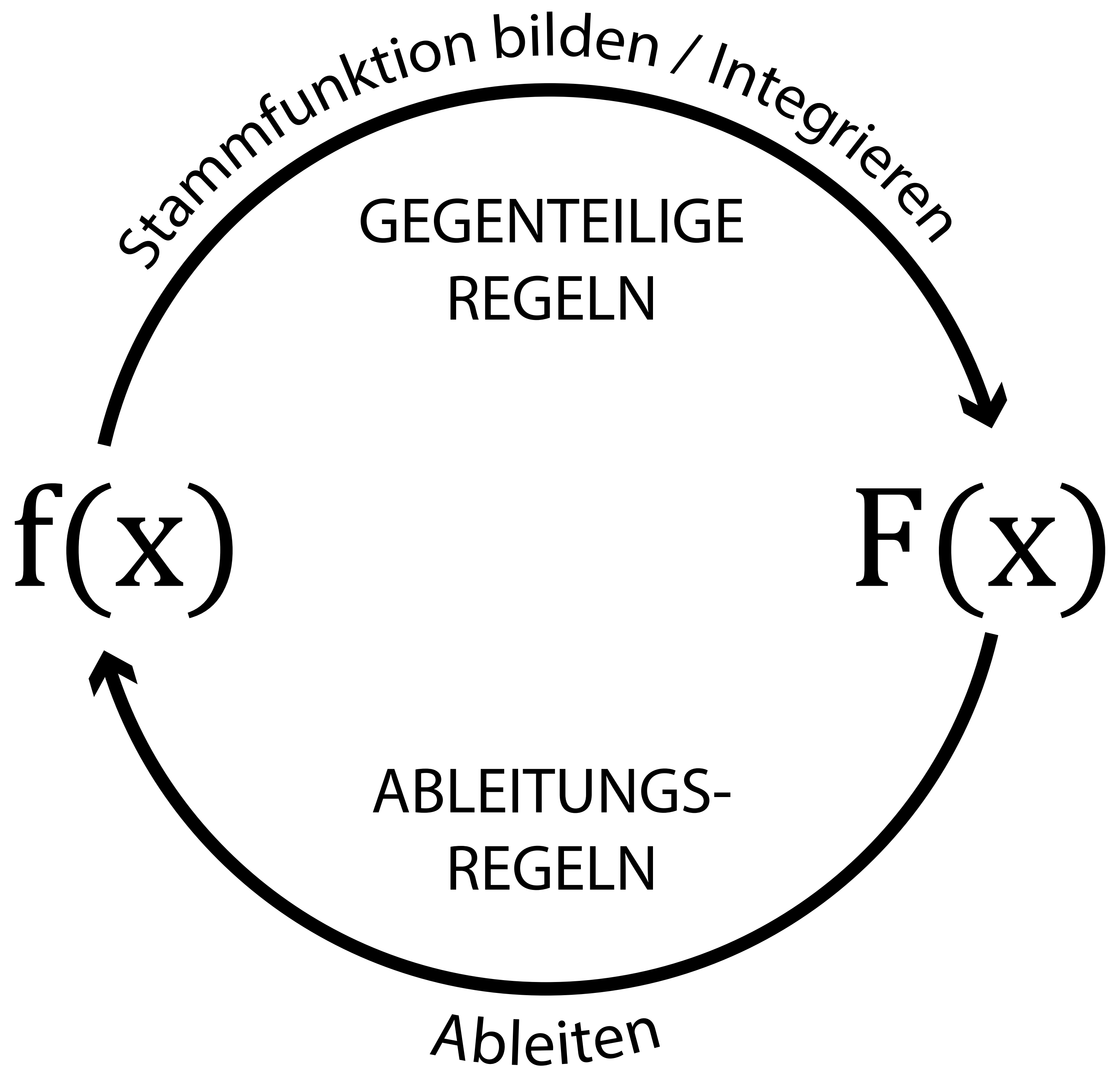
$$F(x) = \int f(x)\,dx$$



Stammfunktionen

Problem Wir wissen, wie wir Funktionen ableiten, aber wie machen wir das Gegenteil davon?

Lösung Wir nehmen unsere Ableitungsregeln und kehren sie ins Gegenteil um.



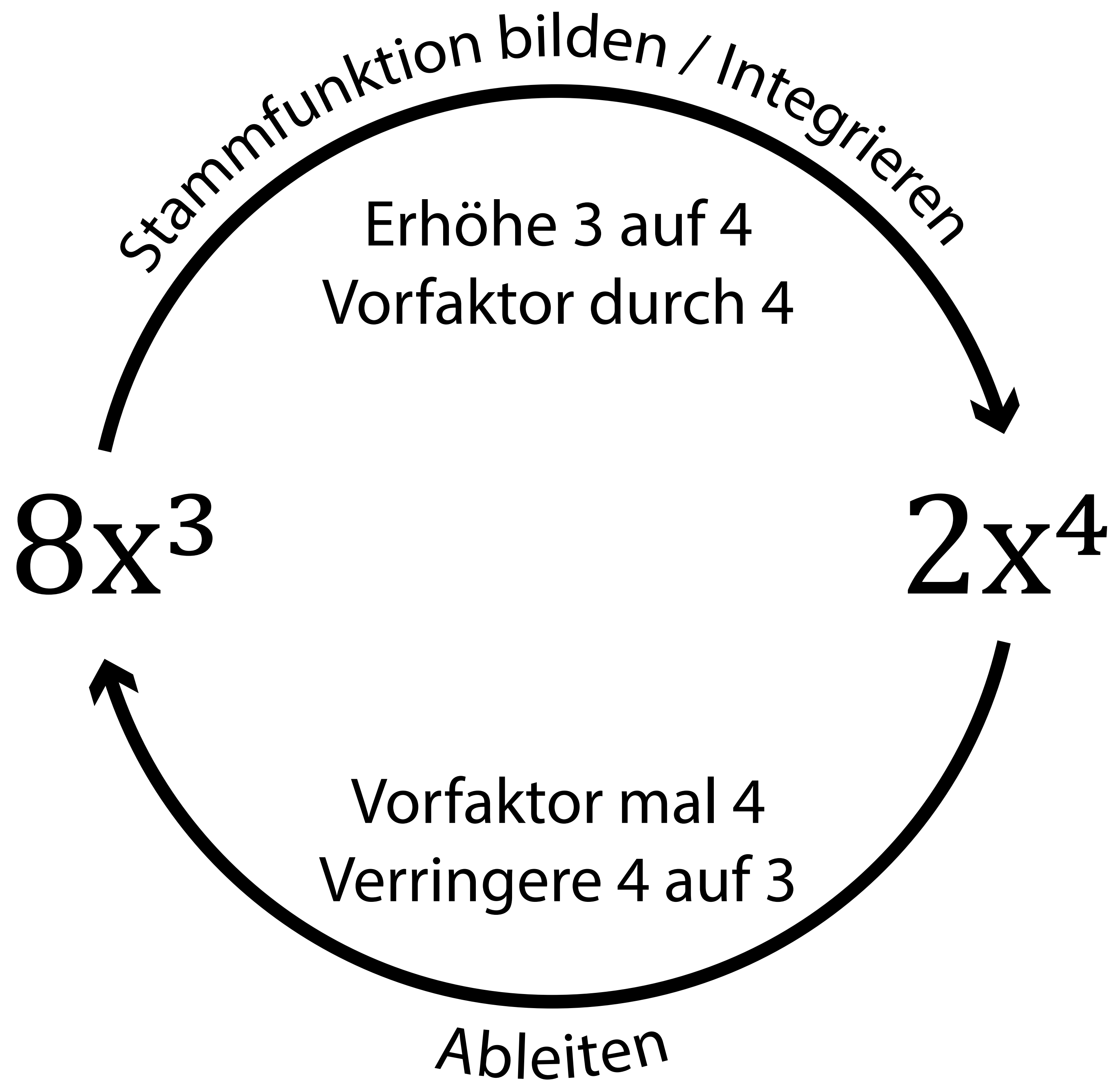
Stammfunktionen

Terme der Form ax^b haben wir mit der Potenzregel abgeleitet. Diese besteht aus zwei Rechenschritten.

- Multipliziere Vorfaktor mit Exponent
- Verringere Exponent um 1

Um Terme der Form ax^b zu integrieren, machen wir genau das Gegenteil in umgekehrter Reihenfolge.

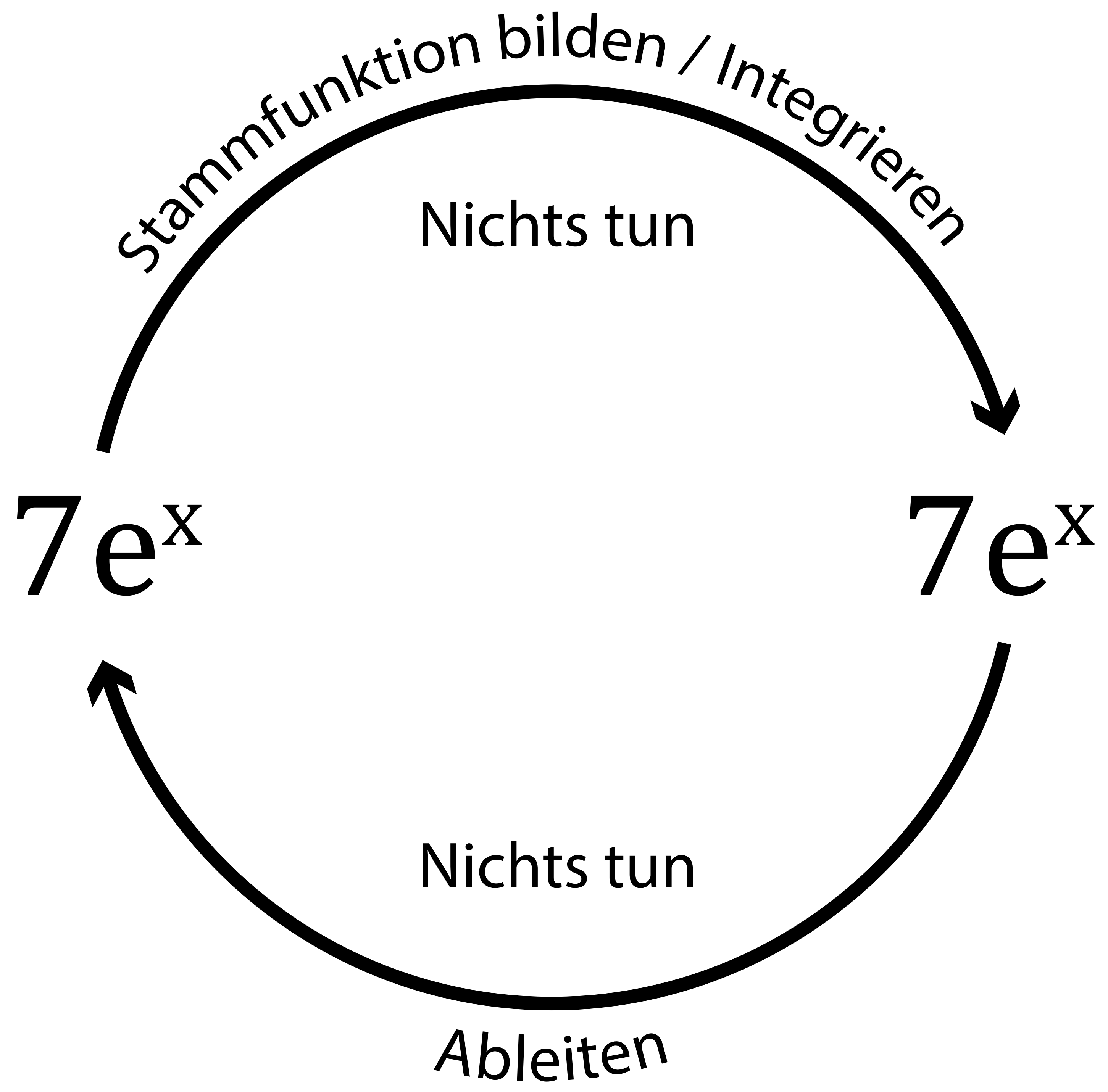
- Erhöhe Exponent um 1
- Teile Vorfaktor durch den Exponenten



Stammfunktionen

Den Term ae^x haben wir bei der Ableitung unverändert gelassen.

Das Gegenteil von Nichtstun ist hier tatsächlich Nichtstun. Um den Term ax^b zu integrieren, lassen wir ihn ebenfalls unverändert.

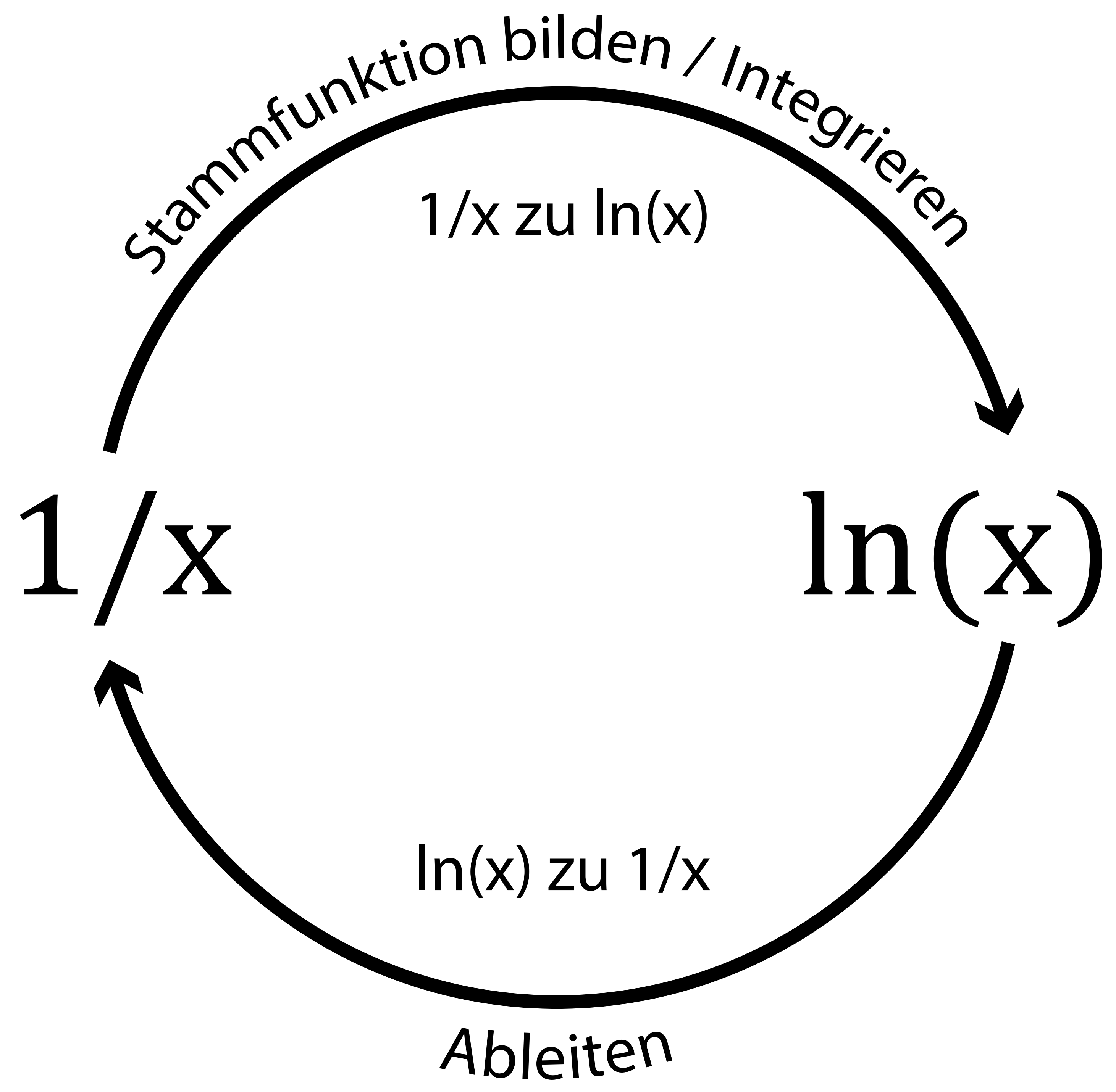


Stammfunktionen

Aus dem Logarithmus ln(x) wurde bei der Ableitung 1/x.

Wir können daraus zwar nicht auf die Stammfunktion von ln(x) schließen, aber wir finden folgende gegenläufige Regel:

Die Stammfunktion von 1/x ist ln(x).



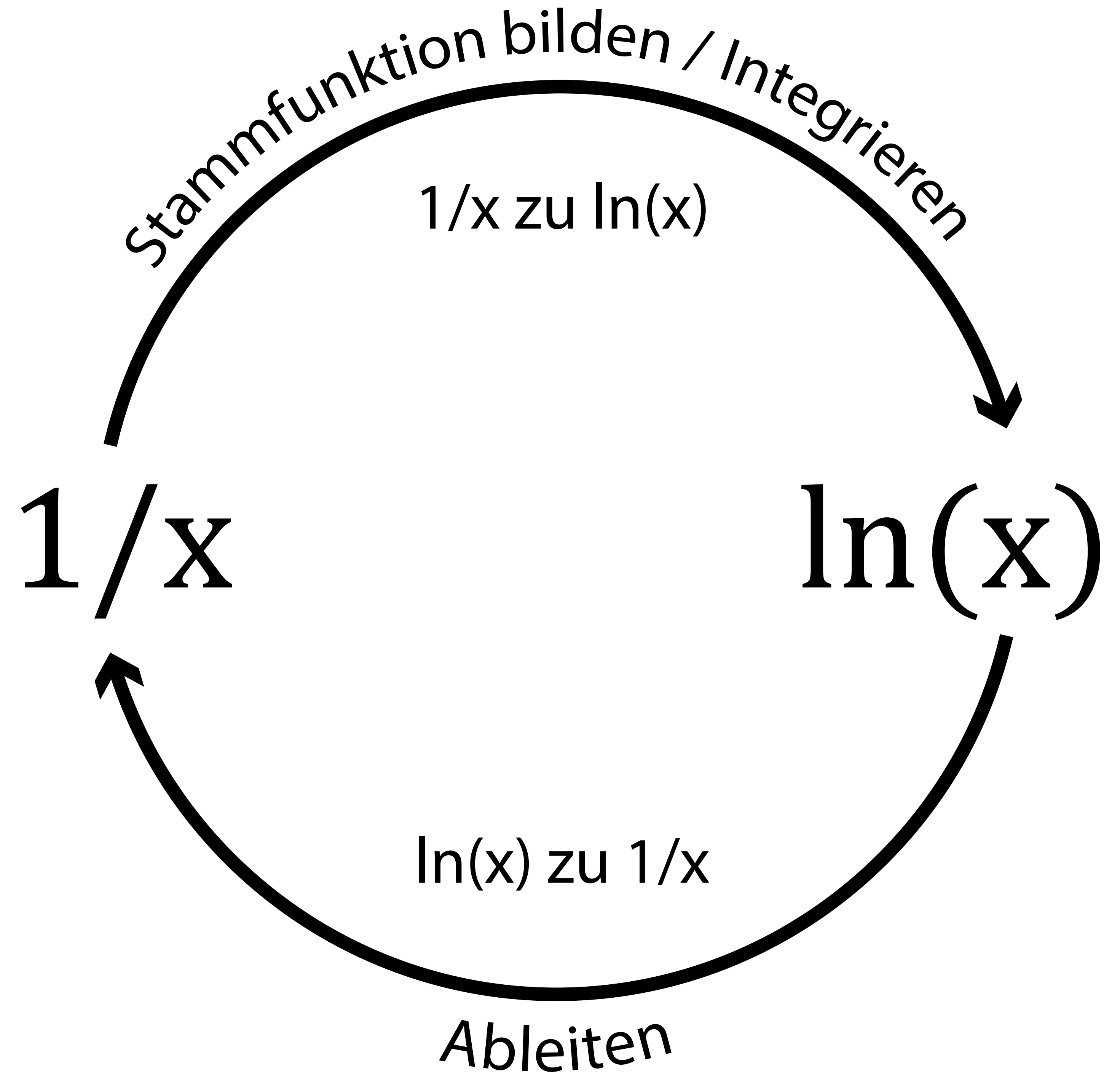
DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Stammfunktionen

Da stimmt etwas nicht! Der Term 1/x ist doch eine Potenz und sollte somit mit der ins Gegenteil verkehrten Potenzregel integriert werden:

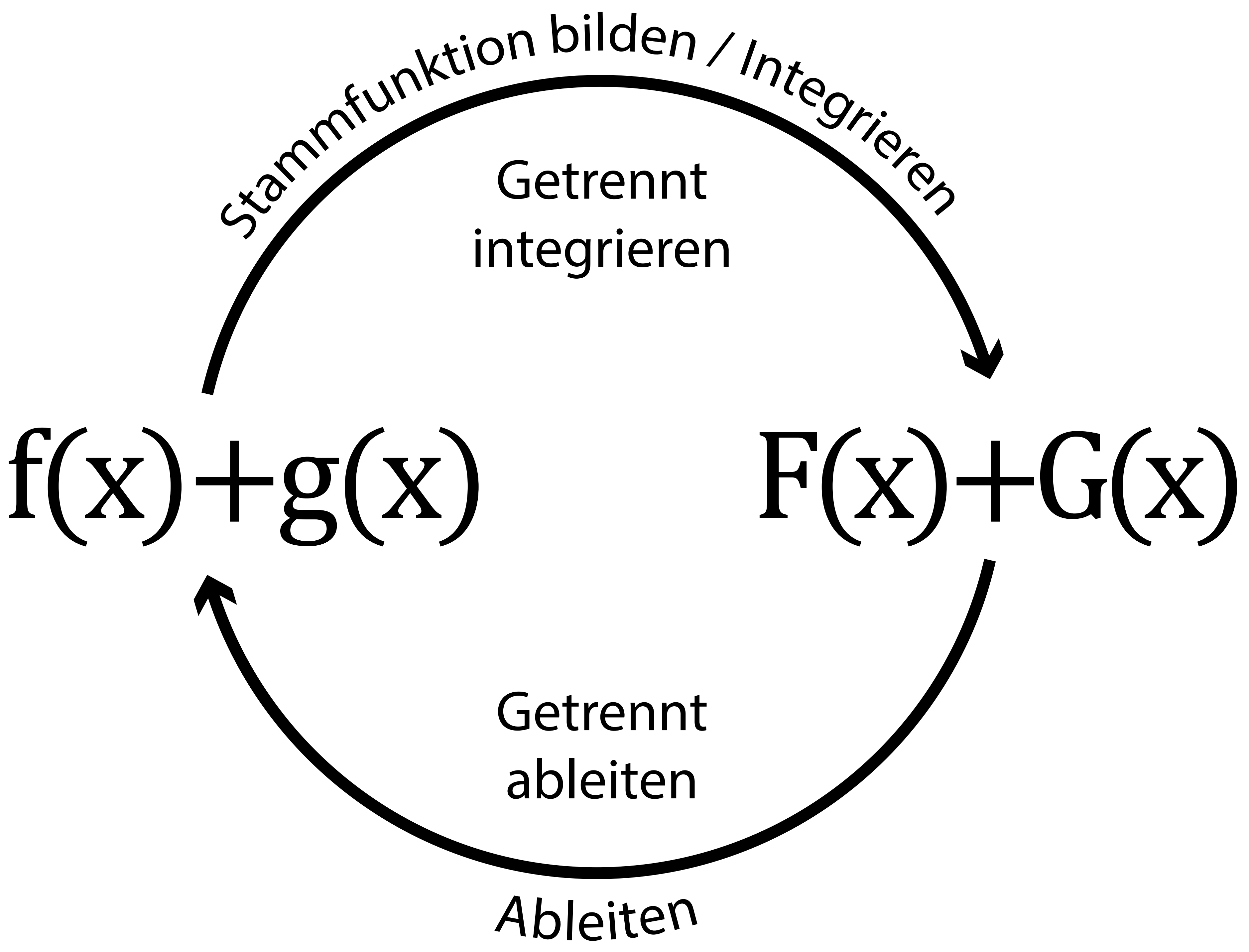
- Erhöhe Exponent um 1
- Teile Vorfaktor durch den Exponenten

Tatsächlich ist 1/x eine Ausnahme, bei der diese Regel durch 0 teilen und damit versagen würde!



Stammfunktionen

Die Summenregel lässt sich auch umkehren. Da wir mit ± verbundene Terme getrennt ableiten müssen, wir auch getrennt integrieren.

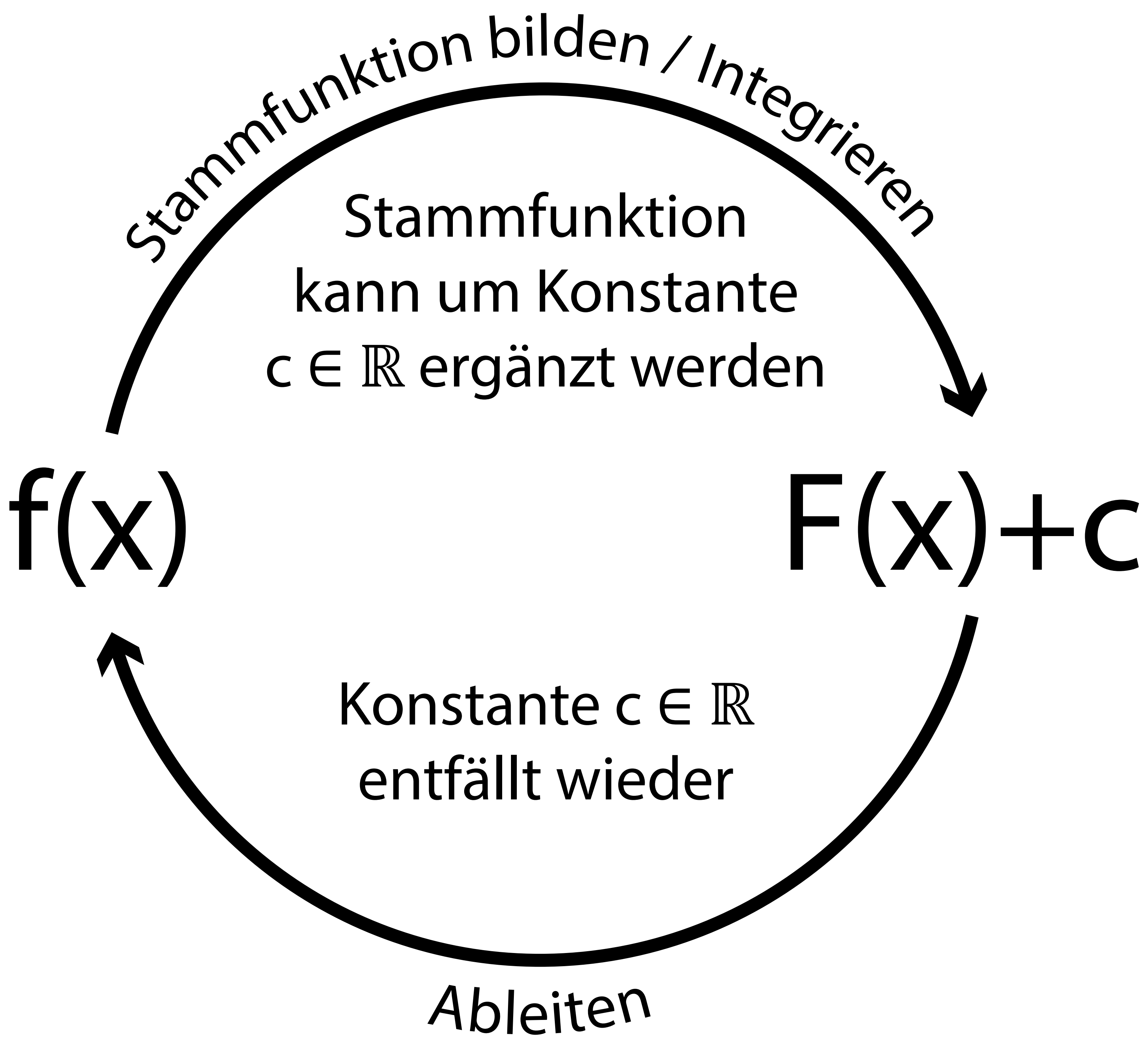


Stammfunktionen

Unabhängig davon wie f(x) aussieht, können wir die Stammfunktion F(x) um eine frei wählbare Konstante ergänzen.

Beim Ableiten fällt diese Konstante wieder weg, sodass das Kriterium f(x) ist Ableitung von F(x) nicht verletzt wird.

Bei der Berechnung der Fläche unter der Kurve nimmt die Konstante ebenfalls keinen Einfluss.



Berechne die Stammfunktionen der folgenden Funktionen

$$f(x) = x^2 + 5e^x - 2$$

$$F(x) = \int x^2 + 5e^x - 2x^0 \, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 5e^x - 2x$$

$$g(x) = 4x^7 - \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}$$

$$= 4x^7 - x^{0,5} - x^{2/3}$$

$$G(x) = \int 4x^7 - x^{0,5} - x^{2/3} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^8 - \frac{1}{3/2}x^{1,5} - \frac{1}{5/3}x^{5/3}$$

$$= \frac{1}{2}x^8 - \frac{2}{3}x^{1,5} - \frac{3}{5}x^{5/3}$$

$$h(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$$

$$= \underline{2 \cdot x^{-1}} + \underline{4x^{-2}}$$

$$H(x) = \int h(x)\,dx = 2 \cdot \ln(x) + \frac{4}{-1}x^{-1}$$

$$= 2 \cdot \ln(x) - 4 \cdot x^{-1}$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

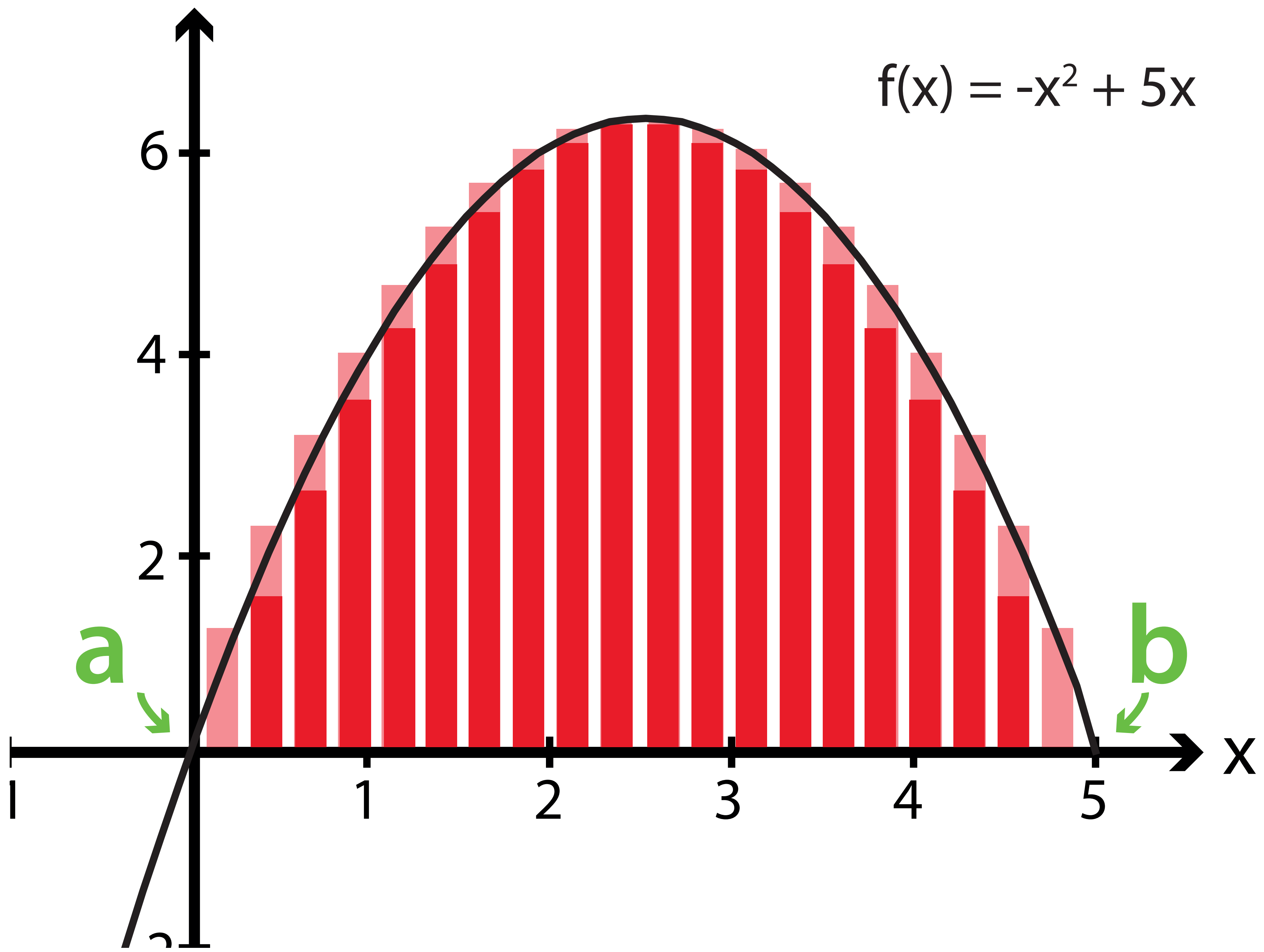
Bestimmte Integrale

Zurück zur ursprünglichen Frage nach der Fläche unter $f(x) = -x^2+5x$.
Die Stammfunktion ist noch kein Flächeninhalt!

$$F(x) = \int -x^2 + 5x \, dx = -\frac{1}{3}x^3 + 2.5x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Um die Fläche zu berechnen, müssen wir die Stammfunktion an zwei Stellen auswerten.

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$



DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

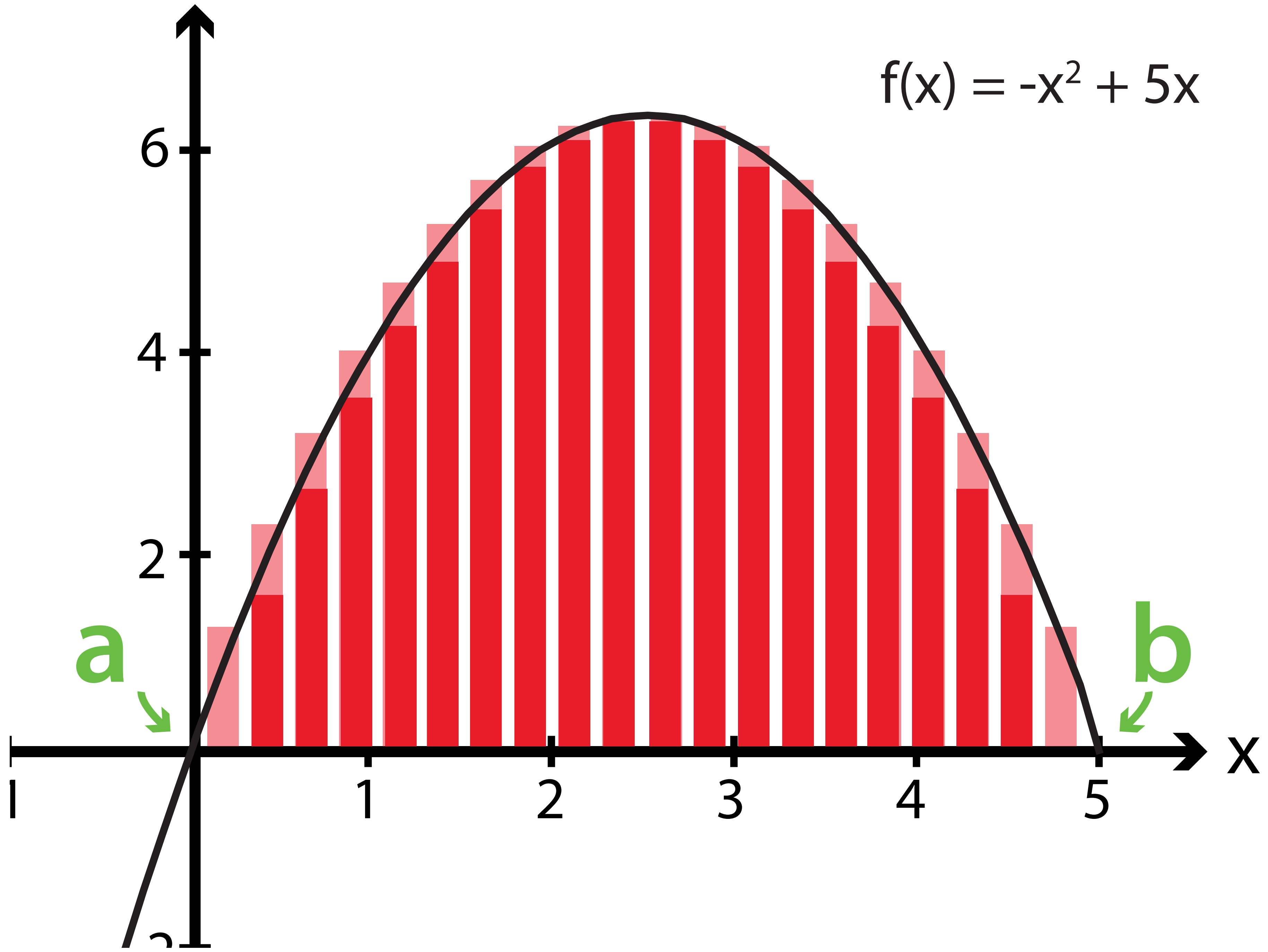
Bestimmte Integrale

Die Konstante c kann dabei weggelassen werden. Ihr Wert spielt keine Rolle:

$$A = \int_0^5 -x^2 + 5x \, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2.5x^2 + c\right]_0^5$$

$$= \left[-\frac{1}{3}5^3 + 2.5 \cdot 5^2 + c\right] - \left[-\frac{1}{3}0^3 + 0 \cdot 5^2 + c\right]$$

$$= 20.83$$



Berechne die Werte folgender bestimmter Integrale

$\ln(x) = \log_e(x)$

$\to$ Sonderfall x^{-1}

$$\int_0^2 x^3 + 2x \, dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 + \cancel{\tfrac{2}{2}}x^2\right]_0^2$$
$$= \left[\tfrac{1}{4}2^4 + 2^2\right] - \left[\tfrac{1}{4}0^4 + 0^2\right]$$
$$= 4 + 4 - (0 + 0) = 8$$

$$\int_1^2 5x^4 - 10 \, dx = \left[x^5 - 10x\right]_1^2$$
$$= \left[2^5 - 10 \cdot 2\right] - \left[1^5 - 10 \cdot 1\right]$$
$$= [32 - 20] - [1 - 10]$$
$$= 12 - (-9) = 21$$

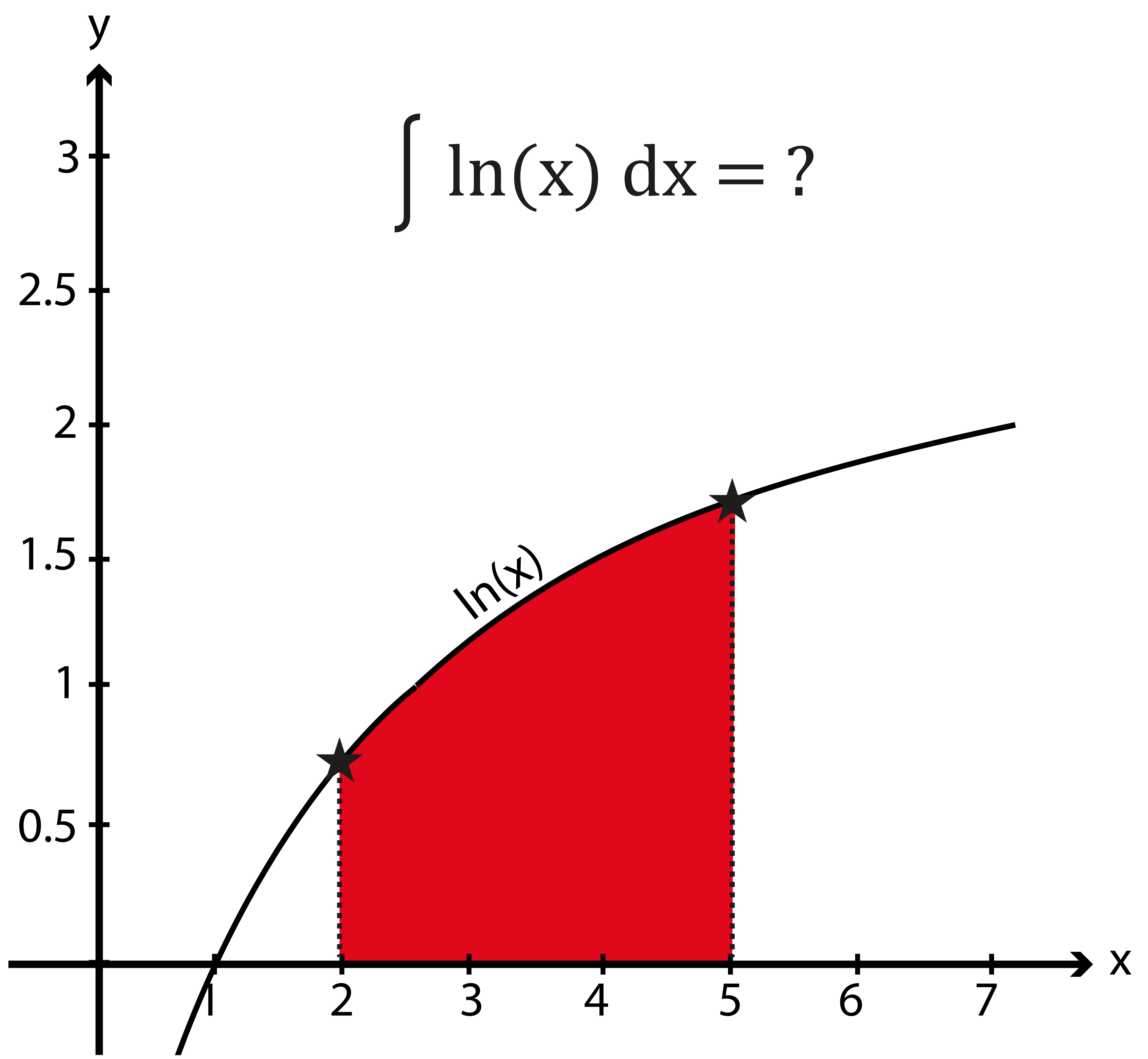
$$\int_1^e 1 + \frac{1}{x} \, dx = \left[x + \ln(x)\right]_1^e$$
$$= \left[e + \ln(e)\right] - \left[1 + \ln(1)\right]$$
$$= [e + 1] - [1 + 0] = e$$

Partielle Integration

Viele Stammfunktionen lassen sich nur mit diversen Tricks berechnen. Zu den wichtigsten zählen die partielle Integration und die Substitution.

Die partielle Integration hilft, wenn wir über ein Produkt von zwei Funktionen integrieren, bei denen wir nur von einer die Stammfunktion kennen:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx = \Big[f(x) \cdot g(x) \Big] - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx$$



DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

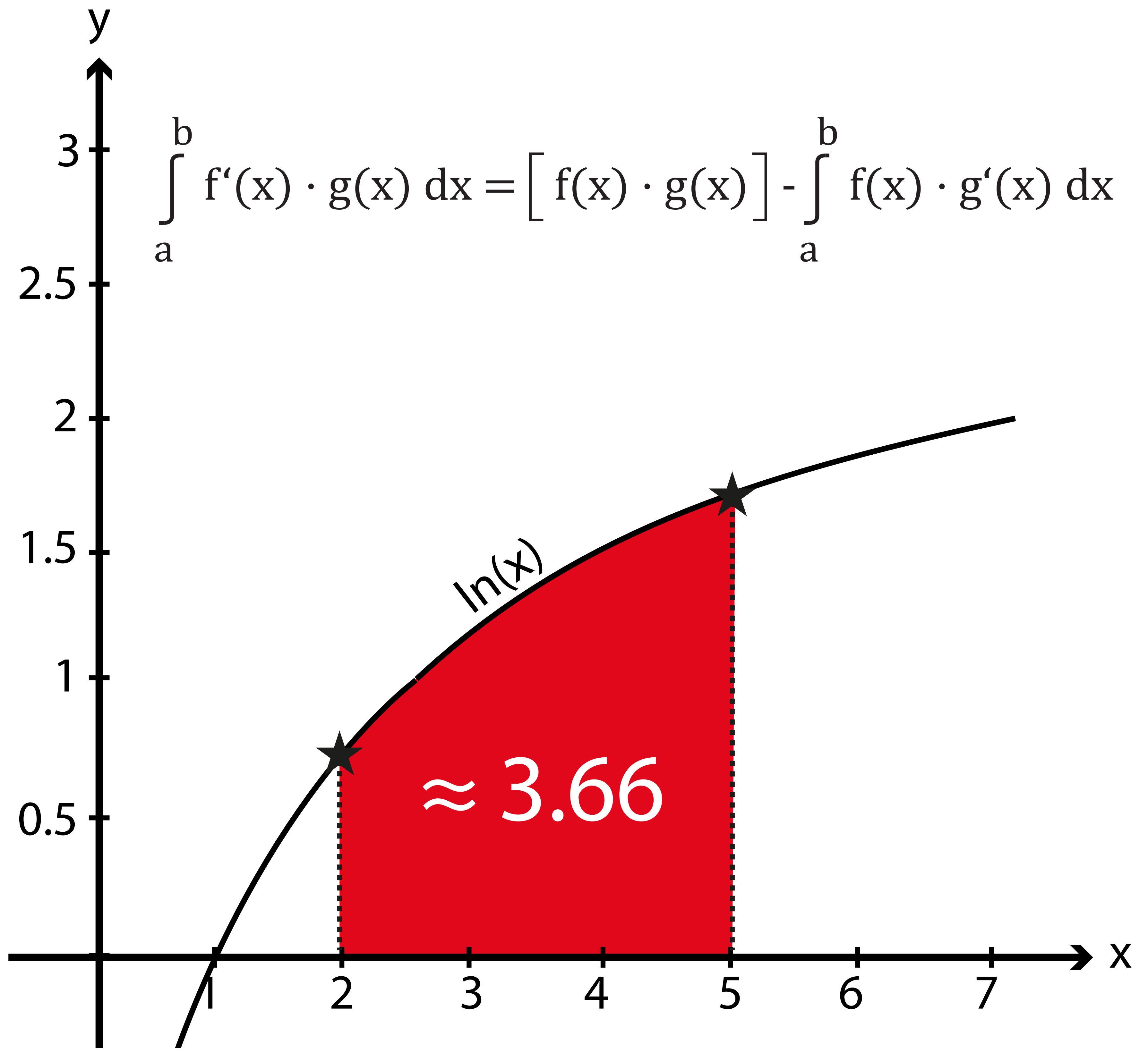
Partielle Integration

Mit der partiellen Integration können wir den Logarithmus integrieren!

$$h(x) = \ln(x) = \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}$$

$$H(x) = \left[x \cdot \ln(x)\right] - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = \left[x \cdot \ln(x)\right] - \int dx$$

$$= x \cdot \ln(x) - x$$

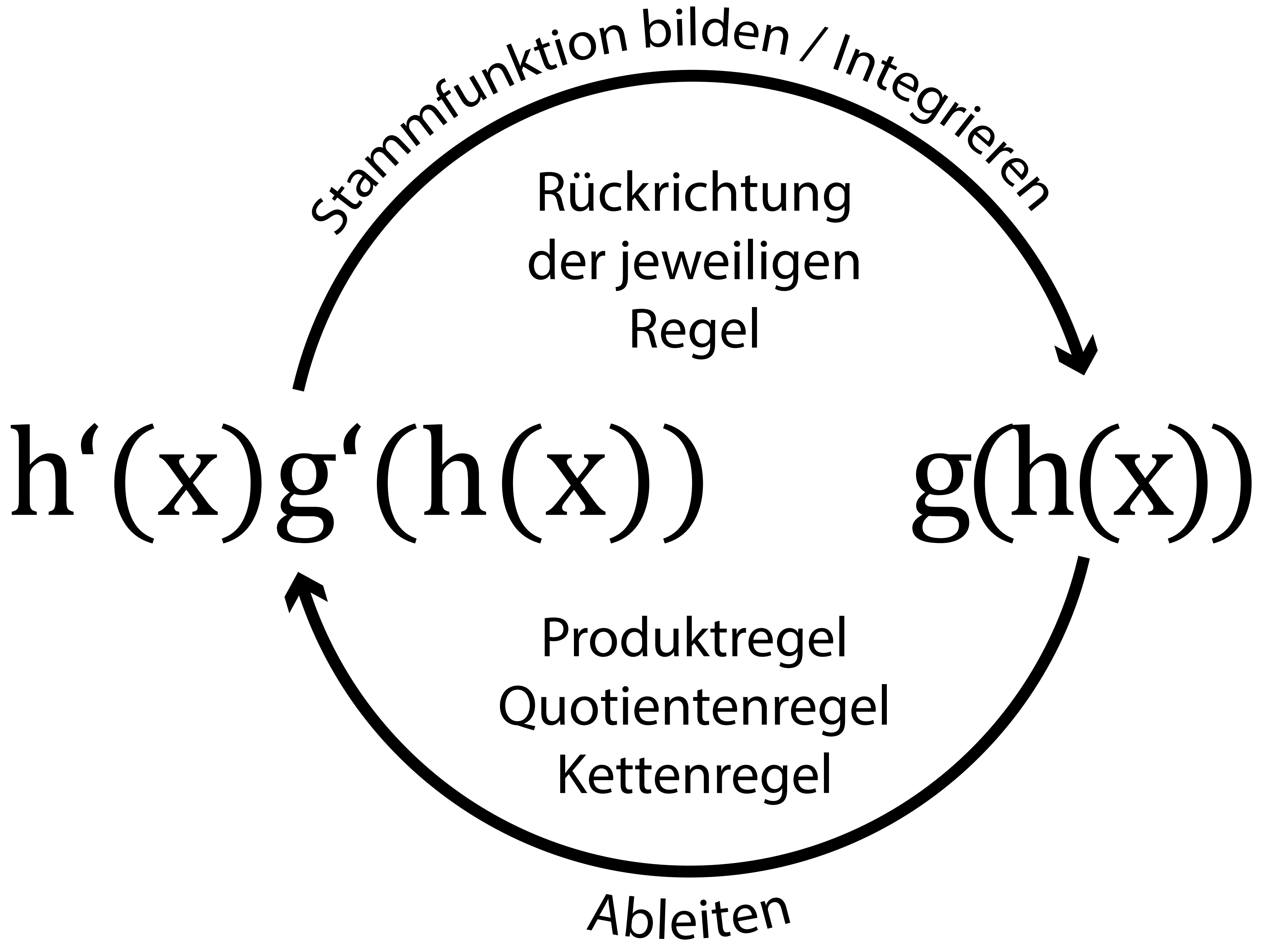


DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Integration durch Substitution

Bei der Integration durch Substitution kehren wir die Kettenregel der Ableitung um:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$



DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Integration durch Substitution

Substitution: $\int \underbrace{2x}_{g'(x)}\underbrace{(x^2+1)^5}_{f(g(x))}\,dx = \int 2x\,(u)^5 \frac{du}{2x} = \int u^5\,du = \frac{1}{6}u^6$

Nebenrechnung: $u = g(x) = x^2 + 1 \qquad \frac{du}{dx} = 2x \iff dx = \frac{du}{2x}$

Rücksubstitution: $\frac{1}{6}u^6 = \frac{1}{6}(x^2+1)^6$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Einheit VII

In der "Linearen Algebra" behandeln wir Skalare, Vektoren, Matrizen sowie die Möglichkeiten diese miteinander zu verrechnen.

Außerdem lernen wir, wie wir lineare Gleichungssysteme durch Matrixinversion lösen können!

Lineare Algebra

- Skalare vs. Vektoren
- Kreuz- und Skalarprodukt
- Matritzen
- Matrixmultiplikation
- Matrixinversion

VII

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Skalare

In der linearen Algebra bezeichnen wir Zahlen aus dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Skalare.

Umgangssprachlich könnten wir den Skalar also als einzelne reelle Zahl definieren.

3, 8, -2, 5.5, π und e sind alles Skalare!

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen	Als Bruch* darstellbar
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen	„Kommazahl“

*Genauer: Ganzzahliger Bruch a/b mit a,b $\in \mathbb{Z}$

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Vektoren

Vektoren bestehen aus einer fest vorgegebenen Anzahl von Skalaren. Abhängig von dieser Anzahl gehören unsere Vektoren zu den Vektorräumen $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ usw.

Wir können Vektoren als Zeilen- oder als Spaltenvektor schreiben. Der Standard in der linearen Algebra ist der Spaltenvektor.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = (15\,, 20\,, 10)$$

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5,... \}$
$\mathbb{N}_0$	Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}_0 = \{ 0, 1, 2, 3, 4,... \}$
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{ ... , -1, 0, 1, ... \}$
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen	Als Bruch* darstellbar
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen	„Kommazahl“

*Genauer: Ganzzahliger Bruch a/b mit a,b $\in \mathbb{Z}$

Vektoren

Über das Formelzeichen erhalten wir den ganzen Vektor.

Oft wird dabei ein kleiner Pfeil über das Vektorzeichen geschrieben, um zu verdeutlichen, dass wir es mit einem Vektor zu tun haben.

Die einzelnen Skalare im Vektor erhalten wir, indem wir über ein Subskript ein Element des Vektors angeben.

Beispiel: $v_1 + v_2 = 35$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$v_1 = 15$

$v_2 = 20$

$v_3 = 10$

Ganzer Vektor

$$\vec{v} = (15\,, 20\,, 10)$$

$v_3 = 10$

$v_2 = 20$

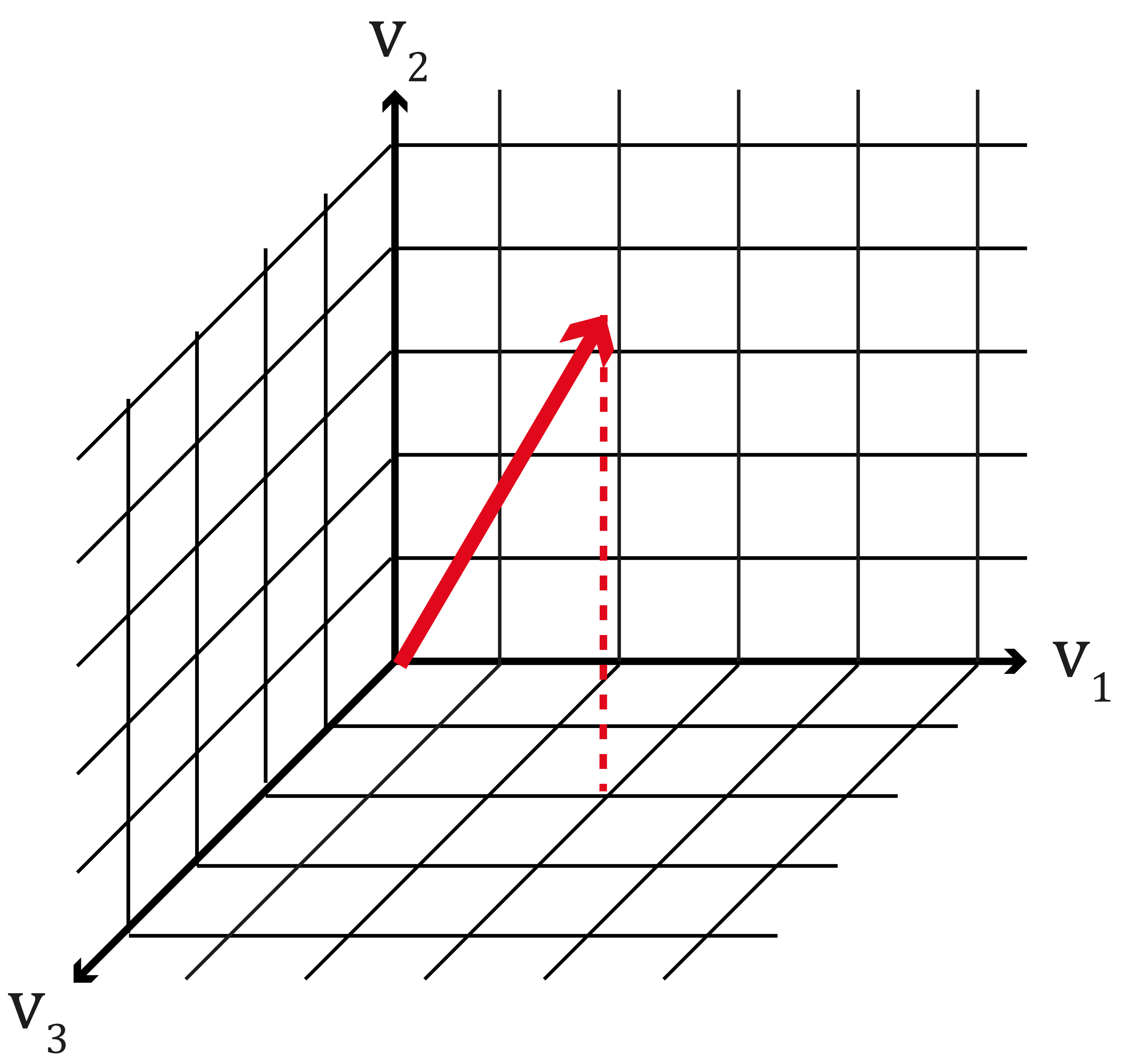
$v_1 = 15$

Ganzer Vektor

Vektoren

Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ können als Punkte oder Pfeile auf einer Fläche bzw. in einem Raum verstanden werden.

Diese Interpretation begegnet uns allerdings eher bei den Ingenieuren und Physikern!



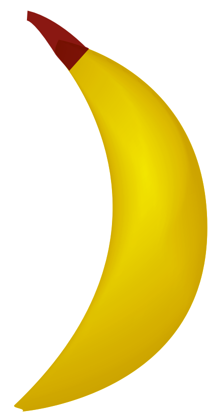
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{15 nach rechts} \\ \to \text{20 nach oben} \\ \to \text{10 nach vorne} \end{array}$$

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

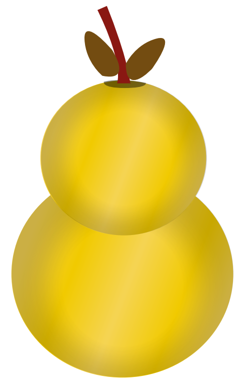
Vektoren

Vektoren können aber auch dazu genutzt werden, um mehrere Merkmale verschiedener Merkmalsträger in einem mathematischen Objekt zusammenzufassen.

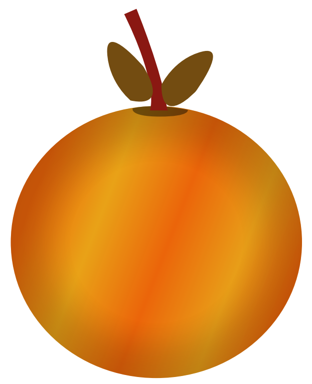
Beispiel: Gehalt verschiedener Vitamine in jeweils 100g einer Obstsorte.



$$\text{Banane} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{15mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{10mg Vitamin C} \end{array}$$



$$\text{Birne} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{40mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{5mg Vitamin C} \end{array}$$



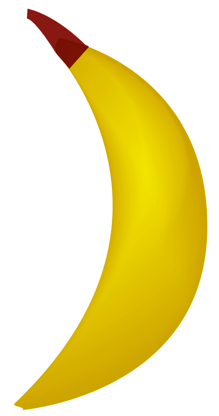
$$\text{Apfel} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 50 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{5mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{5mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{50mg Vitamin C} \end{array}$$

Rechnen mit Vektoren

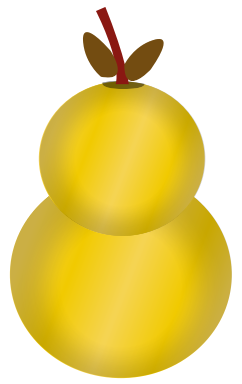
Wir können zwei Vektoren miteinander addieren und subtrahieren, indem wir die Rechenoperation elementweise ausführen.

Beispiel: Vitamingehalt von einer Birne und einem Apfel

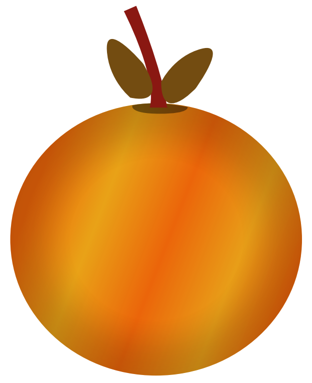
$$\begin{pmatrix}40\\20\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\5\\50\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}45\\25\\55\end{pmatrix}$$



$$\text{Banane} = \begin{pmatrix}15\\20\\10\end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{15mg Vitamin A}\\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B}\\ \rightarrow \text{10mg Vitamin C}\end{array}$$



$$\text{Birne} = \begin{pmatrix}40\\20\\5\end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{40mg Vitamin A}\\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B}\\ \rightarrow \text{5mg Vitamin C}\end{array}$$



$$\text{Apfel} = \begin{pmatrix}5\\5\\50\end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{5mg Vitamin A}\\ \rightarrow \text{5mg Vitamin B}\\ \rightarrow \text{50mg Vitamin C}\end{array}$$

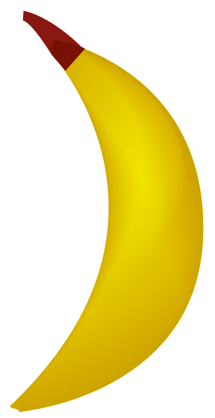
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Rechnen mit Vektoren

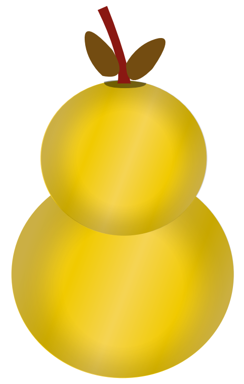
Die Addition oder Subtraktion eines Vektors mit einem Skalar ist in der linearen Algebra nicht definiert.

Es gibt zwar Mathematiksoftware (z. B. R) die in diesem Fall die Addition oder Subtraktion auf alle Elemente des Vektors anwendet. Mathematisch korrekt ist das aber nicht.

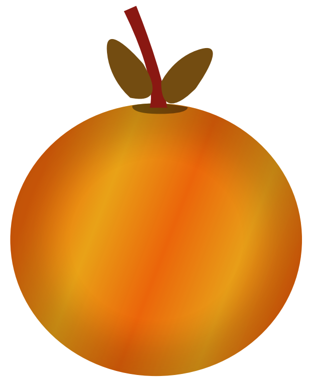
$$\begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} + 25 = \cancel{\begin{pmatrix} 65 \\ 45 \\ 30 \end{pmatrix}}$$



$$\text{Banane} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{15mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{10mg Vitamin C} \end{matrix}$$



$$\text{Birne} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{40mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{5mg Vitamin C} \end{matrix}$$



$$\text{Apfel} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 50 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{5mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{5mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{50mg Vitamin C} \end{matrix}$$

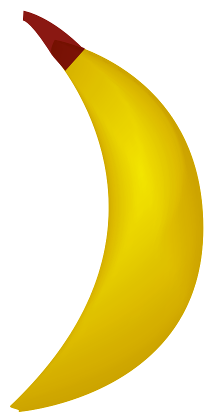
Rechnen mit Vektoren

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar ist dagegen sehr wohl definiert.

Hier ist es korrekt, die Multiplikation auf jedes Element des Vektors anzuwenden.

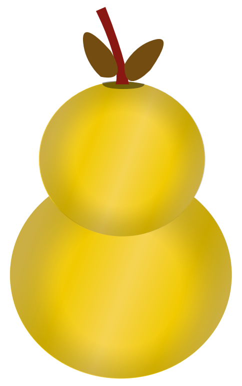
Beispiel: Vitamingehalt von 3 Bananen

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$$



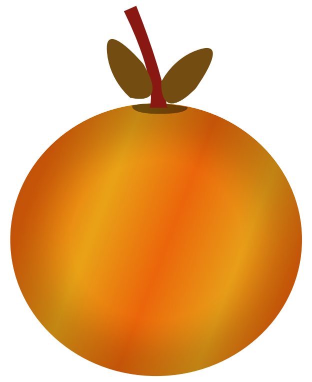
$$\text{Banane} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

15mg Vitamin A
20mg Vitamin B
10mg Vitamin C



$$\text{Birne} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

40mg Vitamin A
20mg Vitamin B
5mg Vitamin C



$$\text{Apfel} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 50 \end{pmatrix}$$

5mg Vitamin A
5mg Vitamin B
50mg Vitamin C

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

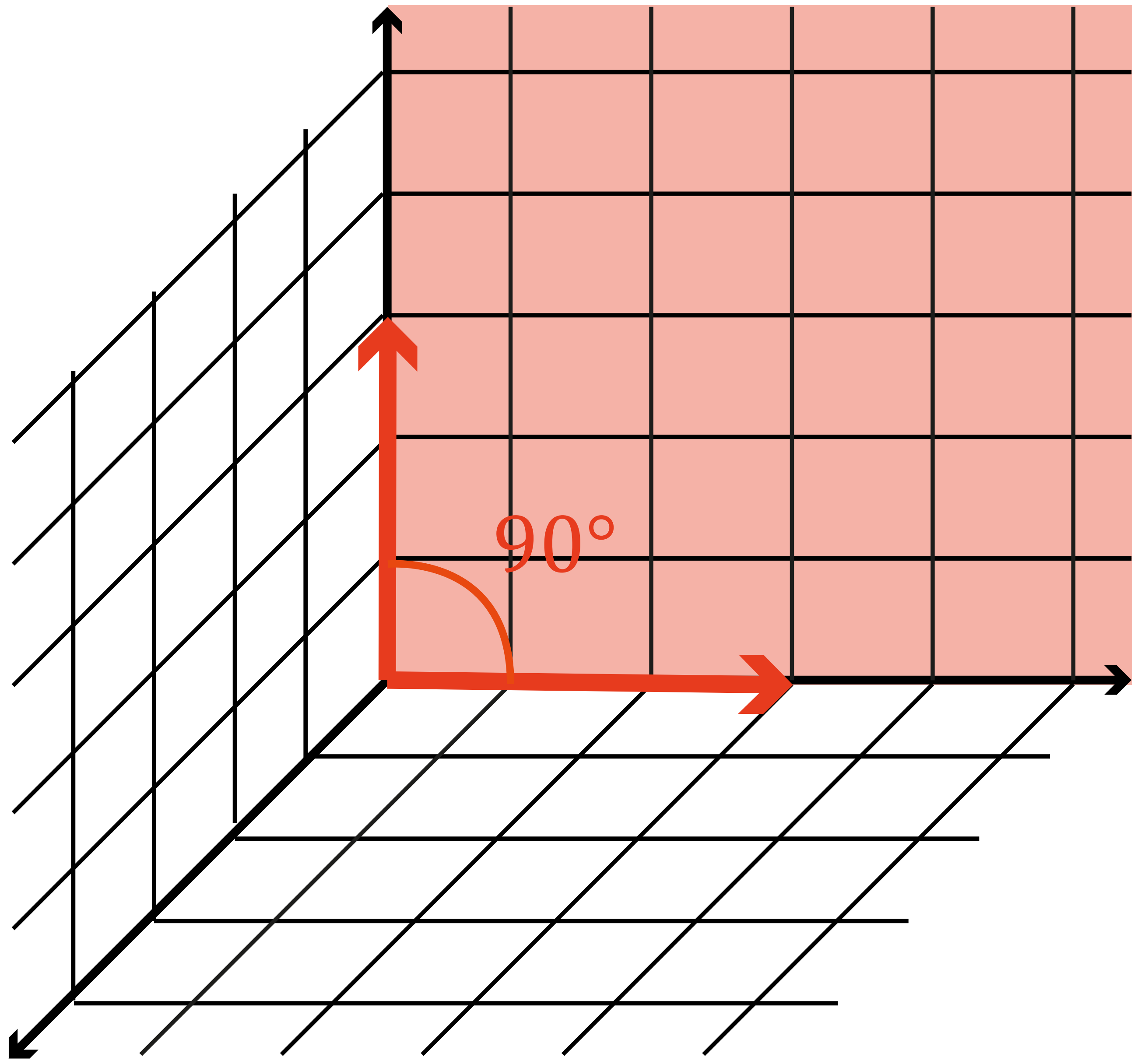
Rechnen mit Vektoren

Bei der Multiplikation von zwei Vektoren unterscheiden wir zwischen dem "Skalarprodukt" und dem "Kreuzprodukt".

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren ist definiert als ...

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Aus dem Skalarprodukt lässt sich der Öffnungswinkel zwischen zwei Vektoren berechnen. Bei 90° ist das Skalarprodukt genau 0.



$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\cdot 0+0\cdot 3+0\cdot 0 = 0$$

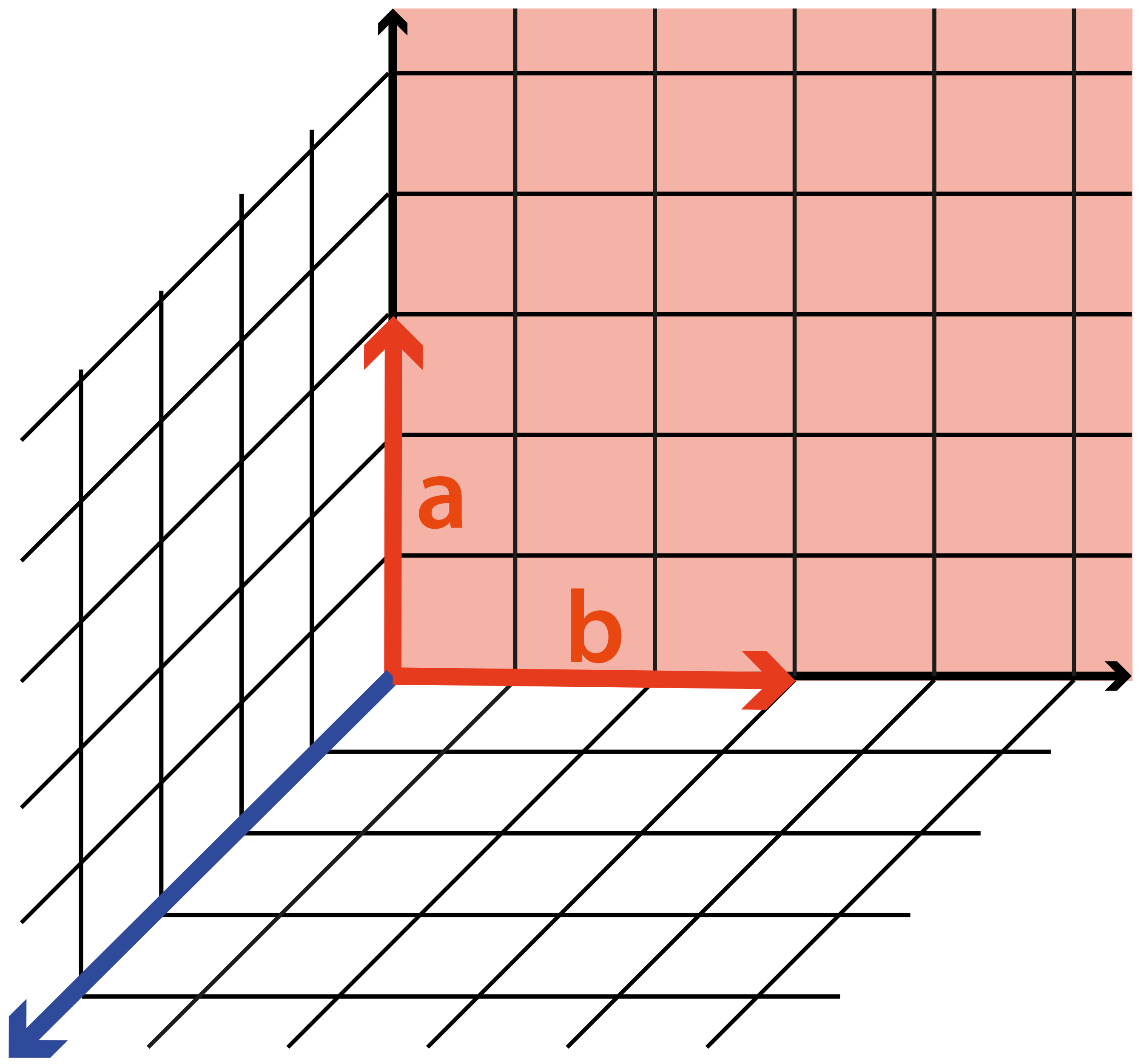
Rechnen mit Vektoren

Bei der Multiplikation von zwei Vektoren unterscheiden wir zwischen dem "Skalarprodukt" und dem "Kreuzprodukt".

Das Kreuzprodukt zwischen zwei Vektoren ist definiert als ...

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Geometrisch betrachtet liefert uns das Kreuzprodukt von a und b einen Vektor, der senkrecht auf diesen beiden steht!



$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 9 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

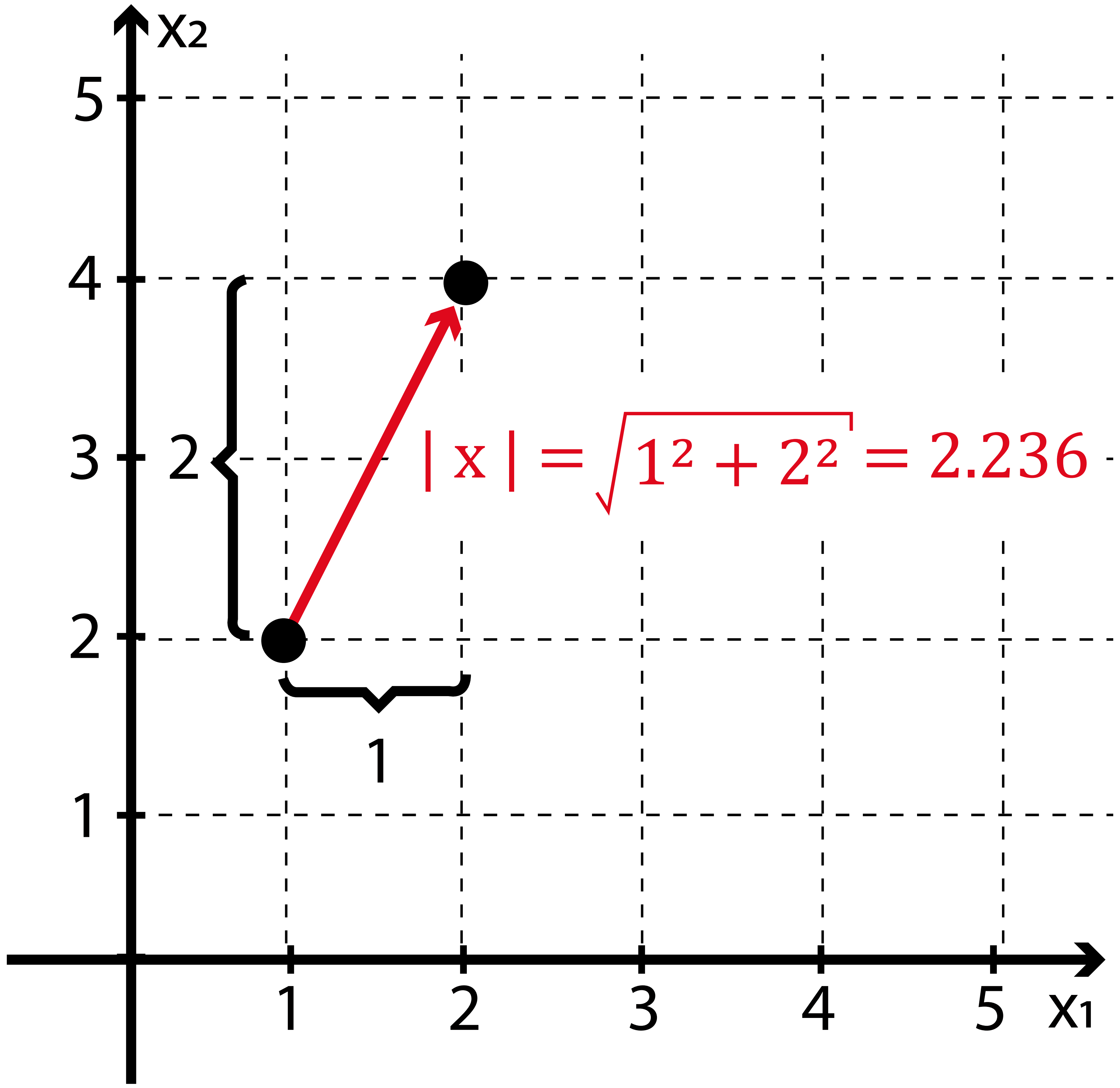
Rechnen mit Vektoren

Eine Norm für einen Vektorraum ist eine Abbildung, die jedem Vektor aus diesem Vektorraum eine reelle Zahl zuordnet.

$$|x| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Für unsere Zwecke verwenden wir die euklidische Norm. Ist x ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$, dann ist die euklidische Norm die "geometrische Länge" des Vektors:

$$|x| = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2}}$$



DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Berechne die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{pmatrix}15\\20\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\30\\25\end{pmatrix}$$

$$5\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\12\\16\end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix}/2=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\7\\10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5\\1\\10\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}=\underline{10}+\underline{2}+\underline{40}=52$$

$$\begin{pmatrix}5\\1\\10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-20\\20-20\\10-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16\\0\\8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\text{x}\begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix}=2\cdot1-5\cdot10=-48$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Matrizen

Matrizen sind eine Erweiterung des Vektors. Statt nur Zeilen oder Spalten zu haben, besitzt die Matrix beides.

Die Anzahl an Zeilen muss nicht zwingend der Anzahl an Spalten entsprechen.

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten wird als m x n Matrix bezeichnet und enthält m · n Elemente.

$$a \in \mathbb{R}^{3x3}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3x3 Matrix mit 9 Elementen

Matrizen

Das Formelzeichen für ein Element aus einer Matrix ist das Formelzeichen der Matrix plus ein Subskript, in dem zuerst die Zeilennummer und dann die Spaltennummer genannt wird:

$$a_{1,2} = 8 \quad a_{2,2} = 7 \quad a_{3,2} = 2$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3x3 Matrix
mit 9 Elementen

Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Matrizen

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen gleicher Größe können elementweise addiert werden.

$$a + b = \begin{pmatrix} 1+1 & 8+0 & 0+0 \\ 2+0 & 7-5 & 5+0 \\ 3+0 & 2+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen können mit Skalaren multipliziert werden. Die Multiplikation wird auf alle Elemente angewendet.

$$2a = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 8 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 7 & 2\cdot 5 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 & 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 0 \\ 4 & 14 & 10 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Matrizen

Matrizen können gedreht werden. Bei der sogenannten Transponierung werden Zeilen zu Spalten und umgekehrt.

Tipp: Die Elemente auf der Diagonalen bleiben identisch.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

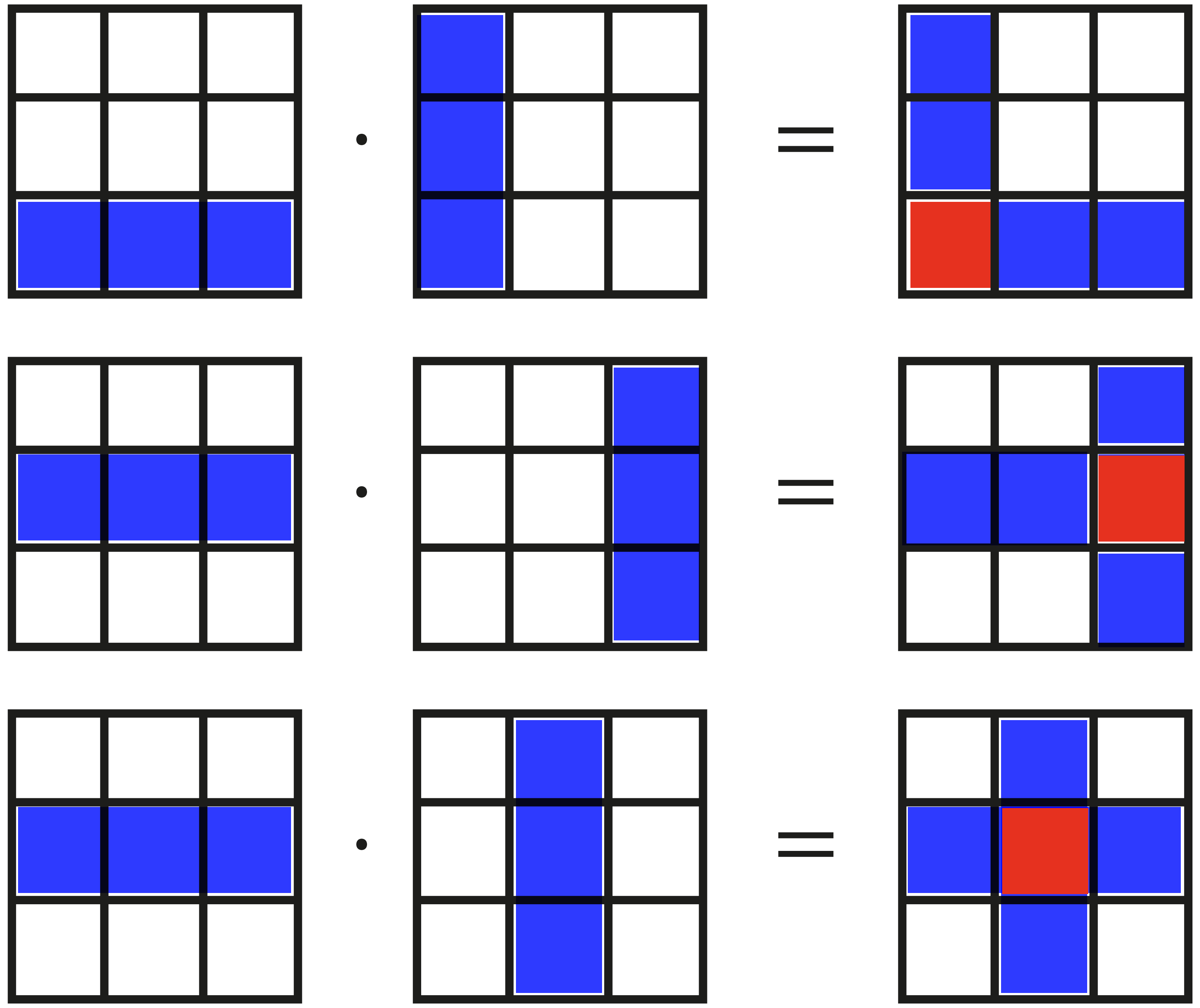
$$a^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad b^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen

Matrizen können mit Matrizen multipliziert werden. Das Produkt ist eine Matrix, deren Größe von den beiden Faktoren abhängt. Die Elemente des Produkts $m_{i,k}$ ergeben sich aus den Skalarprodukten der i-ten Zeile mit der k-ten Spalte.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 23 & 8 \end{pmatrix}$$



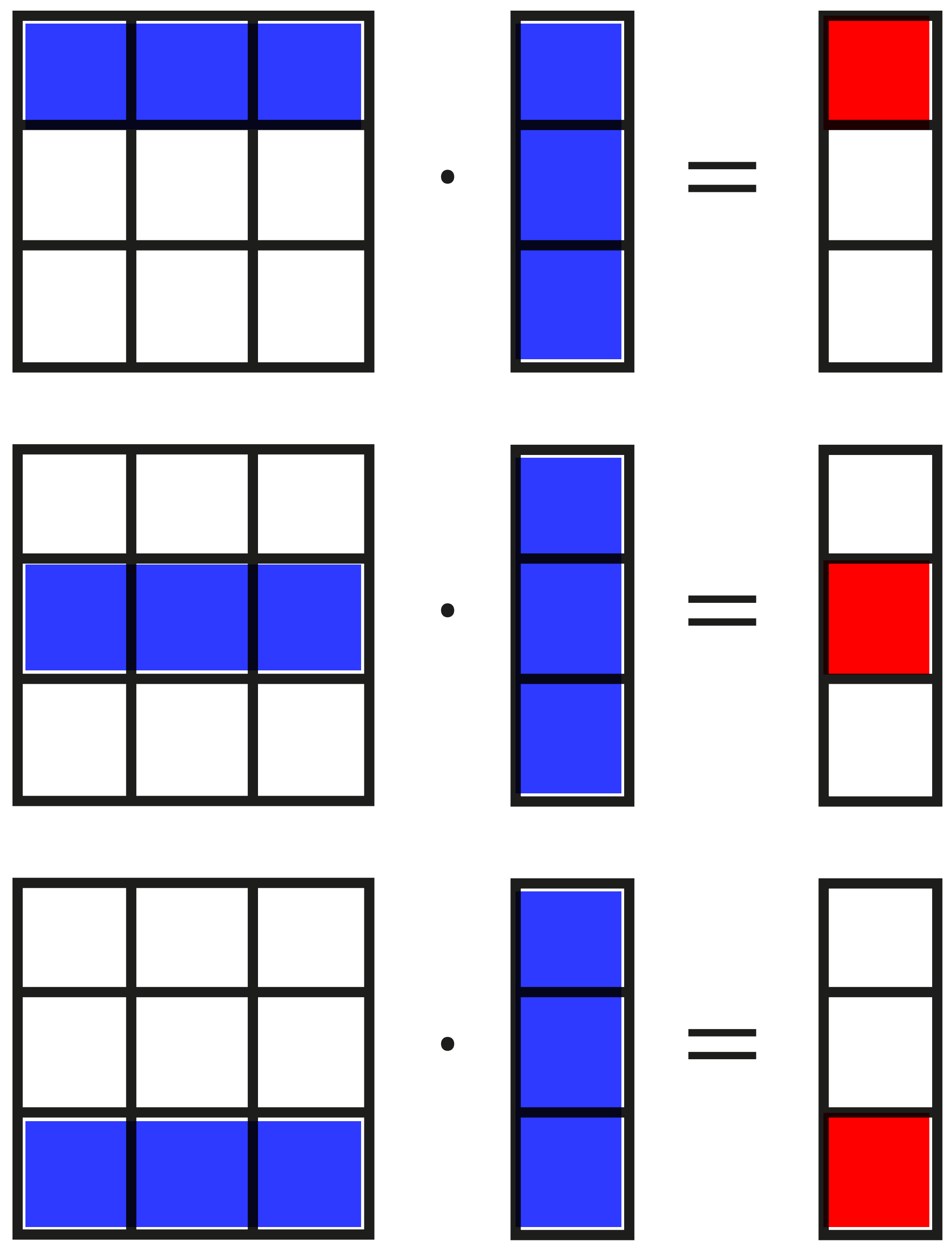
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg **Ravensburg**

Matrizen

Matrizen können mit Vektoren multipliziert werden. Das Produkt ist ein Vektor, dessen Größe von den beiden Faktoren abhängt. Die Elemente des Produkts $m_{i,k}$ ergeben sich aus den Skalarprodukten der i-ten Zeile mit der k-ten Spalte.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 23 \end{pmatrix}$$



DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Berechne die folgenden Ausdrücke:

$\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}4\\10\end{smallmatrix}\right) = 4+20 = 24$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 5 \\ 52 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 5 & 20 & 5 \\ 5 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$ unverändert!

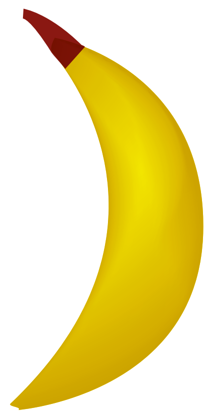
„Einheitsmatrix"

Gauss-Jordan Algorithmus

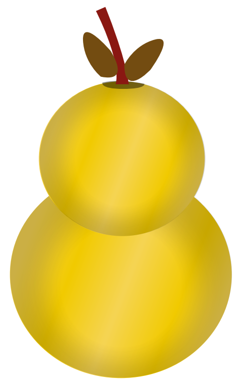
Angenommen wir suchen eine Kombination aus Obst die uns mit 115mg Vitamin A, 80mg Vitamin B und 220mg Vitamin C versorgt.

Die Aufgabe entspricht einem linearen Gleichungssystem:

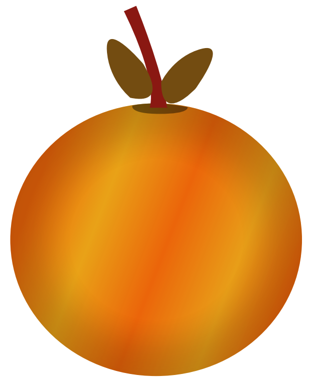
$$
\begin{aligned}
15\,\text{Banane} + 40\,\text{Birne} + 5\,\text{Apfel} &= 115\\
20\,\text{Banane} + 20\,\text{Birne} + 5\,\text{Apfel} &= 80\\
10\,\text{Banane} + 5\,\text{Birne} + 50\,\text{Apfel} &= 220
\end{aligned}
$$



$$\text{Banane} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{15mg Vitamin A} \\ \to \text{20mg Vitamin B} \\ \to \text{10mg Vitamin C} \end{array}$$



$$\text{Birne} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{40mg Vitamin A} \\ \to \text{20mg Vitamin B} \\ \to \text{5mg Vitamin C} \end{array}$$



$$\text{Apfel} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 50 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{5mg Vitamin A} \\ \to \text{5mg Vitamin B} \\ \to \text{50mg Vitamin C} \end{array}$$

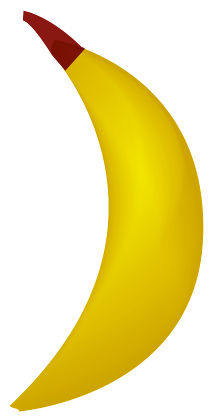
DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Gauss-Jordan Algorithmus

Dasselbe Gleichungssystem in Matrixschreibweise:

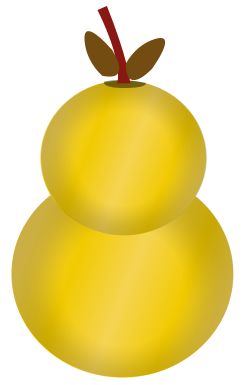
$$\begin{pmatrix} 15 & 40 & 5 \\ 20 & 20 & 5 \\ 10 & 5 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 \\ 80 \\ 220 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 40 & 5 & 115 \\ 20 & 20 & 5 & 80 \\ 10 & 5 & 50 & 220 \end{array}\right)$$



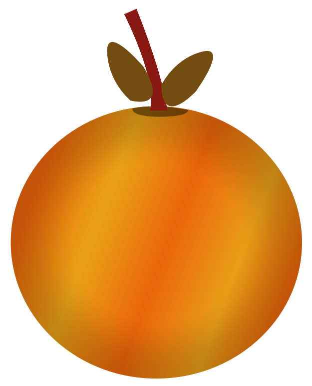
$$\text{Banane} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

15mg Vitamin A
20mg Vitamin B
10mg Vitamin C



$$\text{Birne} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

40mg Vitamin A
20mg Vitamin B
5mg Vitamin C



$$\text{Apfel} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 50 \end{pmatrix}$$

5mg Vitamin A
5mg Vitamin B
50mg Vitamin C

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Gauss-Jordan Algorithmus

Beim Gauss-Jordan Algorithmus wenden wir Äquivalenzumformungen auf die Zeilen an.

Das Ziel ist, dass auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht. Haben wir dies geschafft, können wir das Ergebnis auf der rechten Seite ablesen.

START

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 40 & 5 & 115 \\ 20 & 20 & 5 & 80 \\ 10 & 5 & 50 & 220 \end{array}\right)$$

ZIEL

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Gauss-Jordan Algorithmus

Um dieses Ziel systematisch und ohne Umwege zu erreichen, gehen wir wie folgt vor:

- Eliminieren der grünen Einträge
- Eliminieren der roten Einträge
- Eliminieren der gelben Einträge
- Eliminieren der blauen Einträge

Der Vorteil dieser Reihenfolge wird klar, wenn wir das Beispiel durchrechnen!

START

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 40 & 5 & 115 \\ 20 & 20 & 5 & 80 \\ 10 & 5 & 50 & 220 \end{array}\right)$$

ZIEL

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 40 & 5 & 115 \\ \boxed{20} & 20 & 5 & 80 \\ \boxed{10} & 5 & 50 & 220 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \cdot 3 \end{array} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 40 & 5 & 115 \\ 60 & \underline{60} & \underline{15} & 240 \\ 30 & 15 & 150 & 660 \end{array}\right)\begin{array}{l} \text{4 mal abziehen} \\ \\ \text{2 mal abziehen} \end{array}$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 40 & 5 & 115 \\ 0 & -100 & -5 & -220 \\ 0 & \boxed{-65} & 140 & 430 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ :20 \end{array} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 40 & 5 & 115 \\ 0 & 5 & \frac{1}{4} & 11 \\ 0 & -65 & 140 & 430 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \text{13 mal addieren} \\ \end{array}$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 40 & 5 & 115 \\ 0 & 5 & 1/4 & 11 \\ 0 & 0 & 143{,}25 & 573 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 4 \\ :143{,}25 \end{array} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 40 & 5 & 115 \\ 0 & 20 & 1 & 44 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \text{5 mal abziehen} \\ \text{1 mal abziehen} \\ \end{array}$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 40 & 0 & 95 \\ 0 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \text{2 mal abziehen} \\ \\ \end{array} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} :15 \\ :20 \\ \end{array} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Matrixinversion

Bei der Matrixinversion suchen wir eine Matrix M^{-1} für die gilt:

$$M\,M^{-1} = I$$

Die Einheitsmatrix I ist eine Matrix deren Diagonalelemente 1 und deren andere Elemente 0 sind.

Die Lösung unseres Gleichungssystems ist das Produkt aus M^{-1} und Zielvektor.

$$aM=b \Leftrightarrow a=M^{-1}b$$

START

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 40 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 50 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ZIEL

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{39}{955} & \frac{79}{955} & -\frac{4}{955} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{38}{955} & -\frac{28}{955} & -\frac{1}{955} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{955} & -\frac{13}{955} & \frac{20}{955} \end{array}\right)$$

Invertierte Matrix

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Matrixinversion

Der Vorteil ist, dass die invertierte Matrix für alle Zielvektoren eingesetzt werden kann.

Der Nachteil ist der höhere Rechenaufwand, den man i. d. R. nicht mehr von Hand auf sich nimmt.

START

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 40 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 50 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ZIEL

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{39}{955} & \frac{79}{955} & -\frac{4}{955} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{38}{955} & -\frac{28}{955} & -\frac{1}{955} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{955} & -\frac{13}{955} & \frac{20}{955} \end{array}\right)$$

Invertierte Matrix