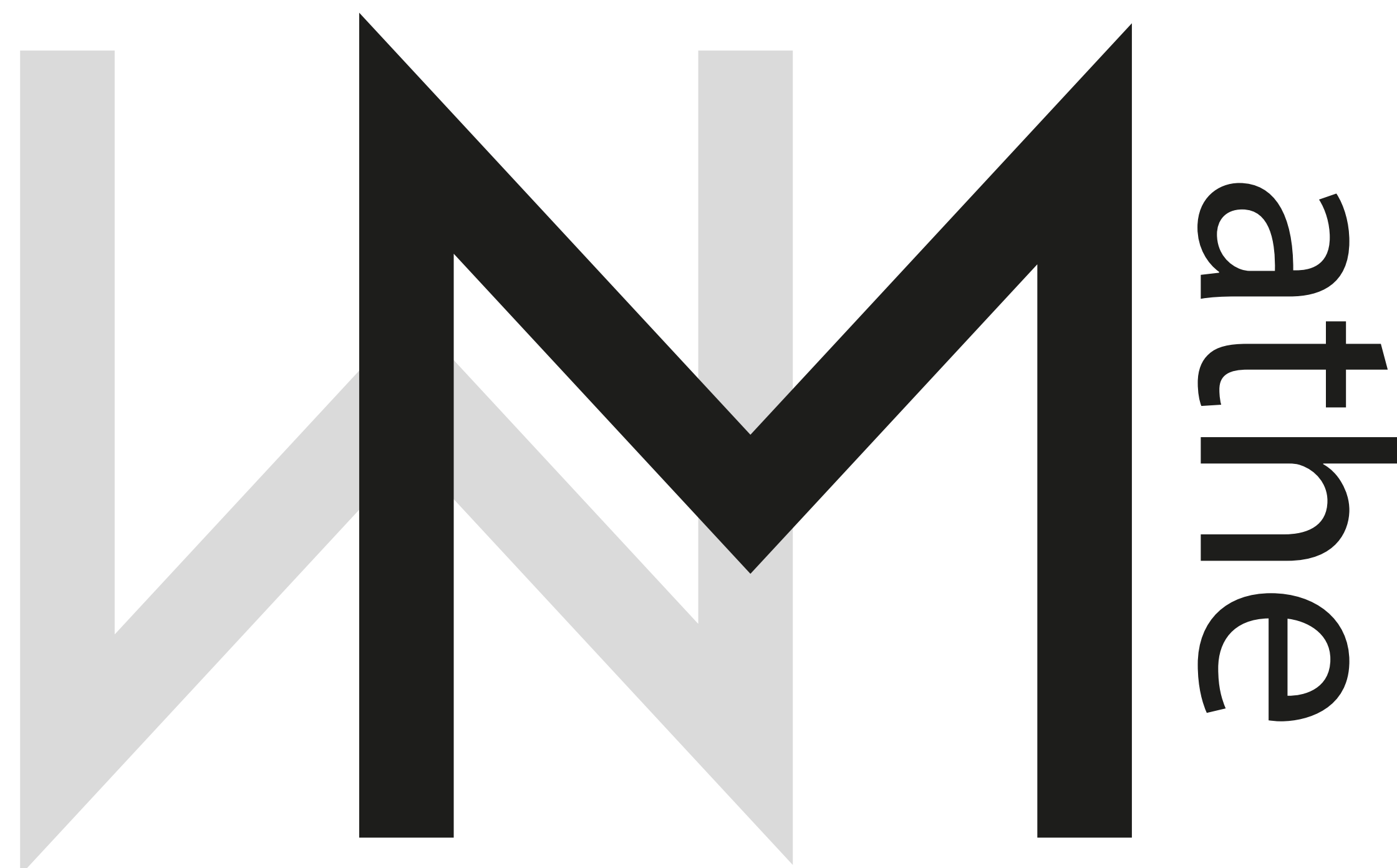




DHBW

Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg



Vorwort

Dieser Foliensatz wird durch das Zentrum für Ökonomik (kurz ZÖK) der DHBW Ravensburg bereitgestellt.

Autoren: Prof. Dr. Daniel Blochinger
Illustration: Prof. Dr. Daniel Blochinger
Stand: 10. März 2025
Lizenz: [CC BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Weitere Lehr- und Lernmaterialien finden Sie auf unserer [Webseite](#).

Fehler gefunden? E-Mail an blochinger@dhbw-ravensburg.de!



Inhaltsverzeichnis

<u>Mengenlehre</u>	4 - 40
<u>Elementare Algebra</u>	41 - 145
<u>Analysis I</u>	146 - 274
<u>Analysis II</u>	275 - 335
<u>Lineare Algebra</u>	336 - 378
<u>Investitionsrechnung</u>	379 - 478
<u>Tilgungsrechnung</u>	479 - 494

Mengenlehre

Wir beginnen mit einem Thema, mit dem viele bisher überhaupt nicht in Kontakt gekommen sind.

Mengenlehre, boolesche Algebra und Logik gehören in keinem Bundesland zum Abiturstoff.

Elementare Grundkenntnisse in diesen Themen sind jedoch nützlich für die späteren mathematischen Inhalte und für spätere Vorlesungen im Bereich Informatik oder Statistik.



Mengenlehre

- Zahlenbereiche
- Mengen
- Teilmengen
- Boolesche Algebra
- Verknüpfungen von Mengen
- Intervalle

Zahlenbereiche

Die umgangssprachliche "Zahl" meint je nach Kontext meistens eine natürliche, ganze oder reelle Zahl.

In der Mathematik unterscheiden wir zwischen verschiedenen Zahlenbereichen; die fünf wichtigsten sind rechts aufgelistet!

\mathbb{N}	Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$
\mathbb{N}_0	Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}_0 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$
\mathbb{Z}	Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{ \dots, -1, 0, 1, \dots \}$
\mathbb{Q}	Rationale Zahlen	Als Bruch* darstellbar
\mathbb{R}	Reelle Zahlen	„Kommazahl“

*Genauer: Ganzzahliger Bruch a/b mit $a, b \in \mathbb{Z}$



Zahlenbereiche

Diese Zahlenbereiche sind nicht unabhängig voneinander, sondern sie bauen aufeinander auf!

Wir beginnen mit den natürlichen Zahlen und erweitern diese wie in der Tabelle rechts gezeigt schrittweise.

Als erstes nehmen wir die 0 dazu, dann alle negativen Zahlen, dann Brüche und schließlich beliebige Kommazahlen.

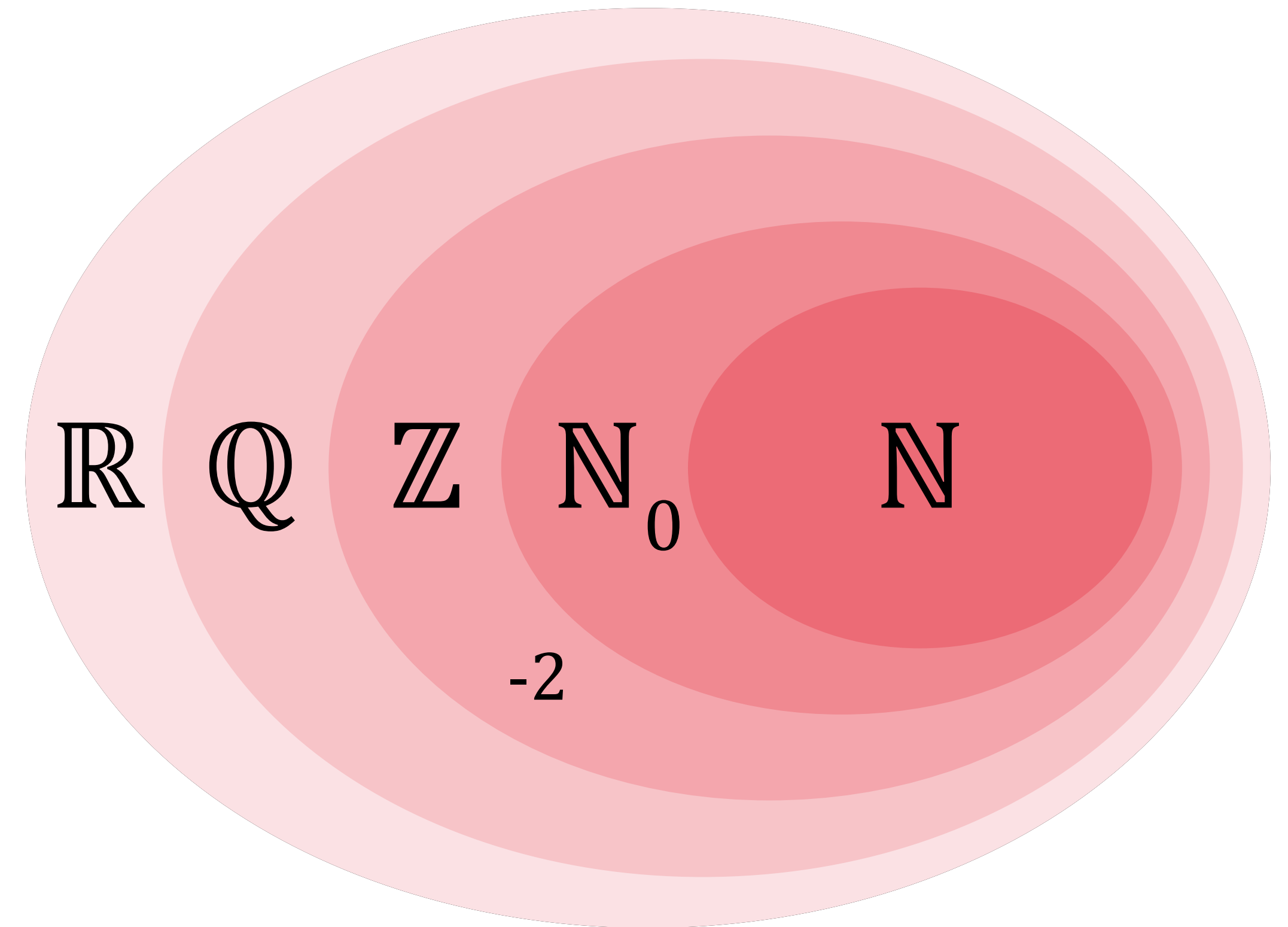
\mathbb{N}	$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$
\mathbb{N}_0	\mathbb{N} und die Zahl 0
\mathbb{Z}	\mathbb{N}_0 und negative Zahlen ohne Komma
\mathbb{Q}	\mathbb{Z} und als Bruch* darstellbaren Zahlen
\mathbb{R}	\mathbb{Q} und nicht als Bruch darstellbare Zahlen

*Genauer: Ganzzahliger Bruch a/b mit $a, b \in \mathbb{Z}$

Zahlenbereiche

Folglich enthalten die erweiterten Zahlenbereiche alle Zahlen aus den "kleineren" Bereichen.

Beispiel Die Zahl -2 ist nicht nur eine ganze Zahl, sondern auch eine rationale Zahl und eine reelle Zahl.



Zahlenbereiche

Ausgehend von den Zahlenbereichen wollen wir uns mit den folgenden zwei Punkten befassen!

Mengenlehre Unsere Zahlenbereiche sind Mengen.

Intervalle Zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen können wir kompakt als Menge schreiben.

\mathbb{N}	Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$
\mathbb{N}_0	Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}_0 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$
\mathbb{Z}	Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{ \dots, -1, 0, 1, \dots \}$
\mathbb{Q}	Rationale Zahlen	Als Bruch* darstellbar
\mathbb{R}	Reelle Zahlen	„Kommazahl“

*Genauer: Ganzzahliger Bruch a/b mit $a, b \in \mathbb{Z}$

Mengen & Elemente

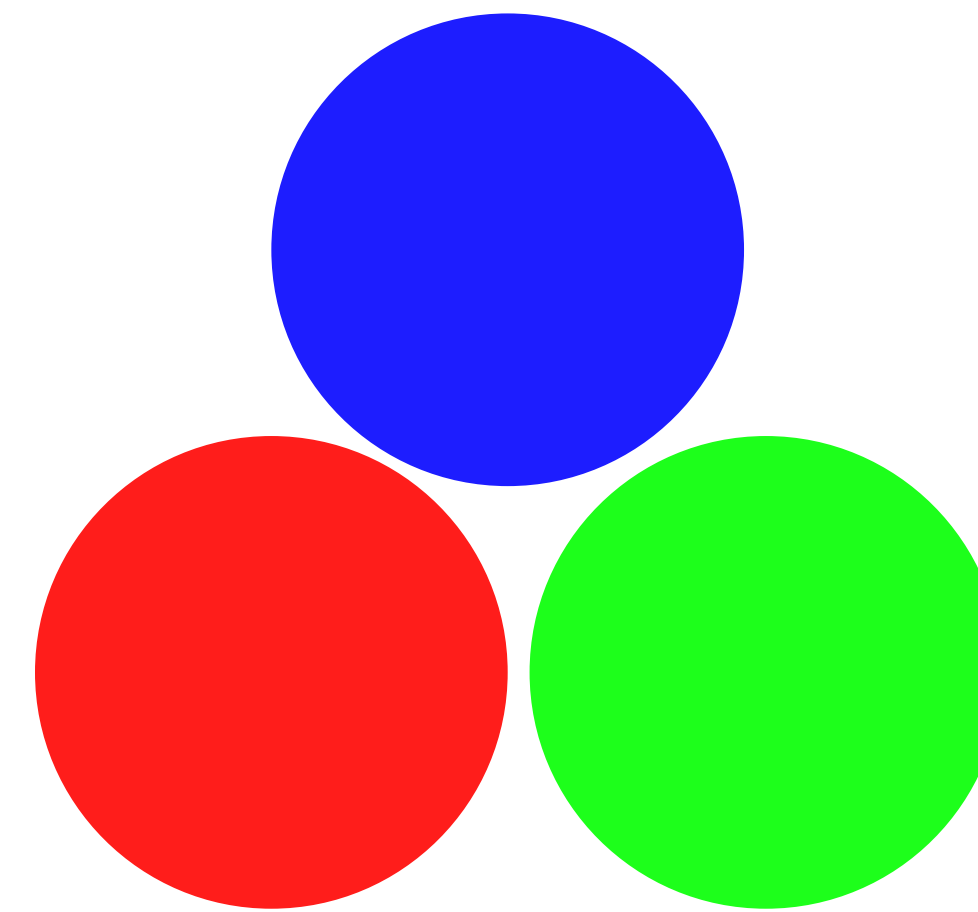
Mengen sind eine Zusammenfassung von Objekten.

Diese Objekte müssen nicht zwingend Zahlen sein, sondern könnten auch Farben, Gegenstände usw. sein.

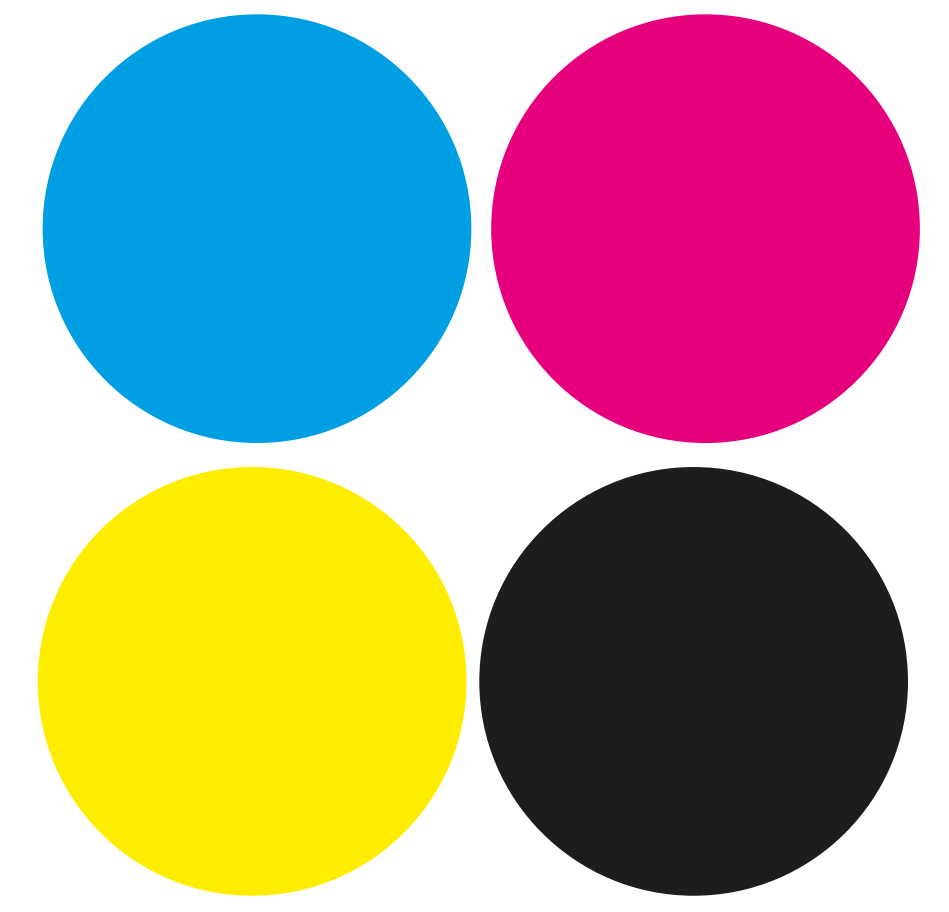
Wir können Mengen durch die Aufzählung ihrer Elemente definieren. Ein Beispiel mit Farben:

RGB = { Rot, Grün, Blau }

CMYK = { Cyan, Magenta, Gelb, Schwarz }



Menge RGB



Menge CMYK



Mengen & Elemente

Die Reihenfolge der Elemente ist bei dieser Aufzählung irrelevant. Die Mengen ...

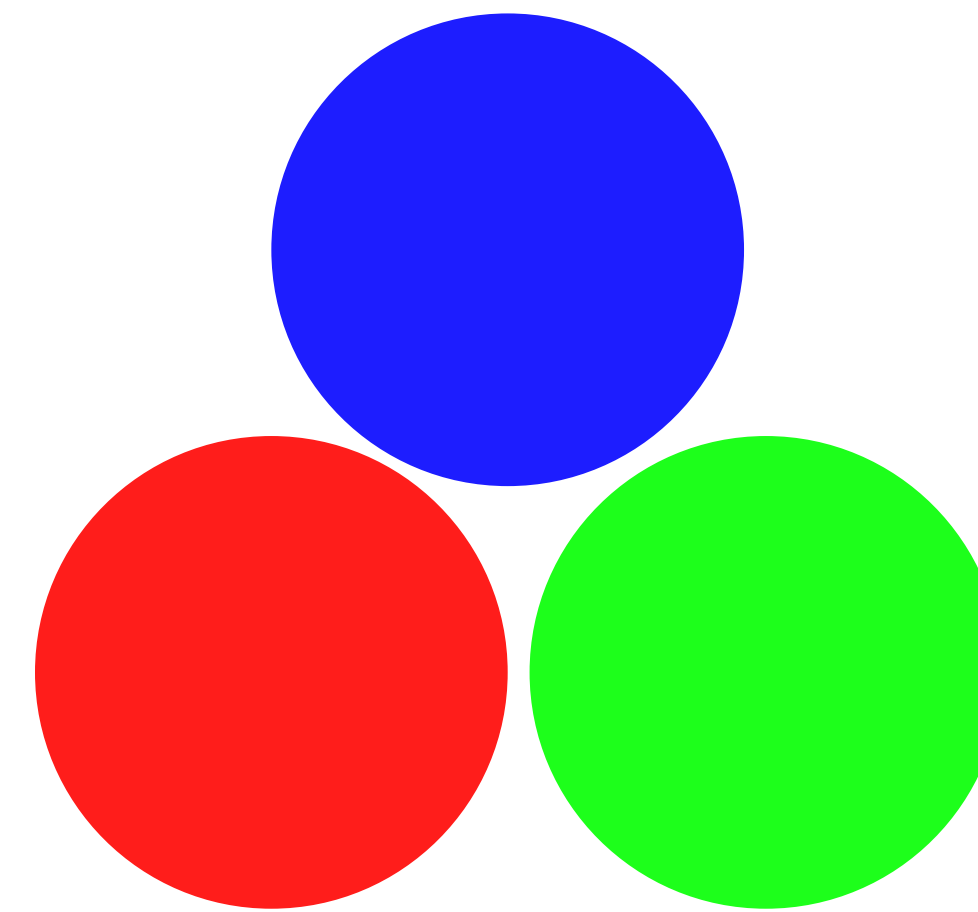
$\text{RGB} = \{ \text{Rot, Grün, Blau} \}$

$\text{CMYK} = \{ \text{Cyan, Magenta, Gelb, Schwarz} \}$

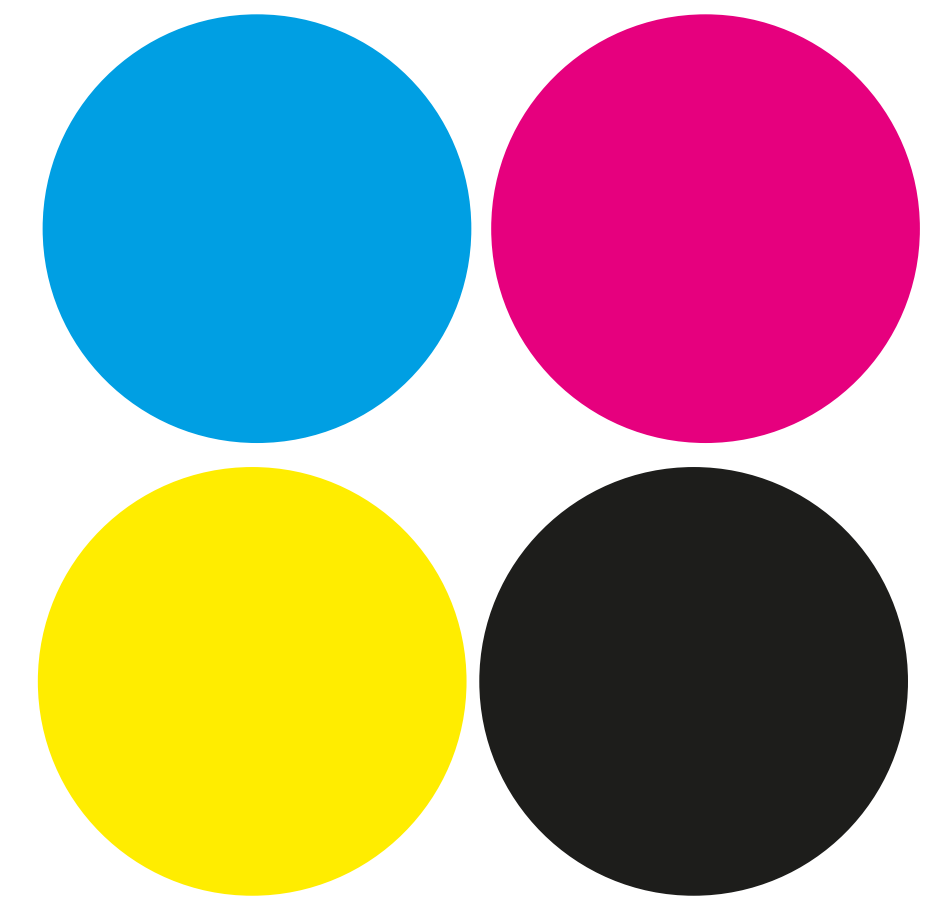
... sind die gleichen Mengen wie:

$\text{RGB} = \{ \text{Grün, Rot, Blau} \}$

$\text{CMYK} = \{ \text{Schwarz, Magenta, Gelb, Cyan} \}$



Menge RGB



Menge CMYK

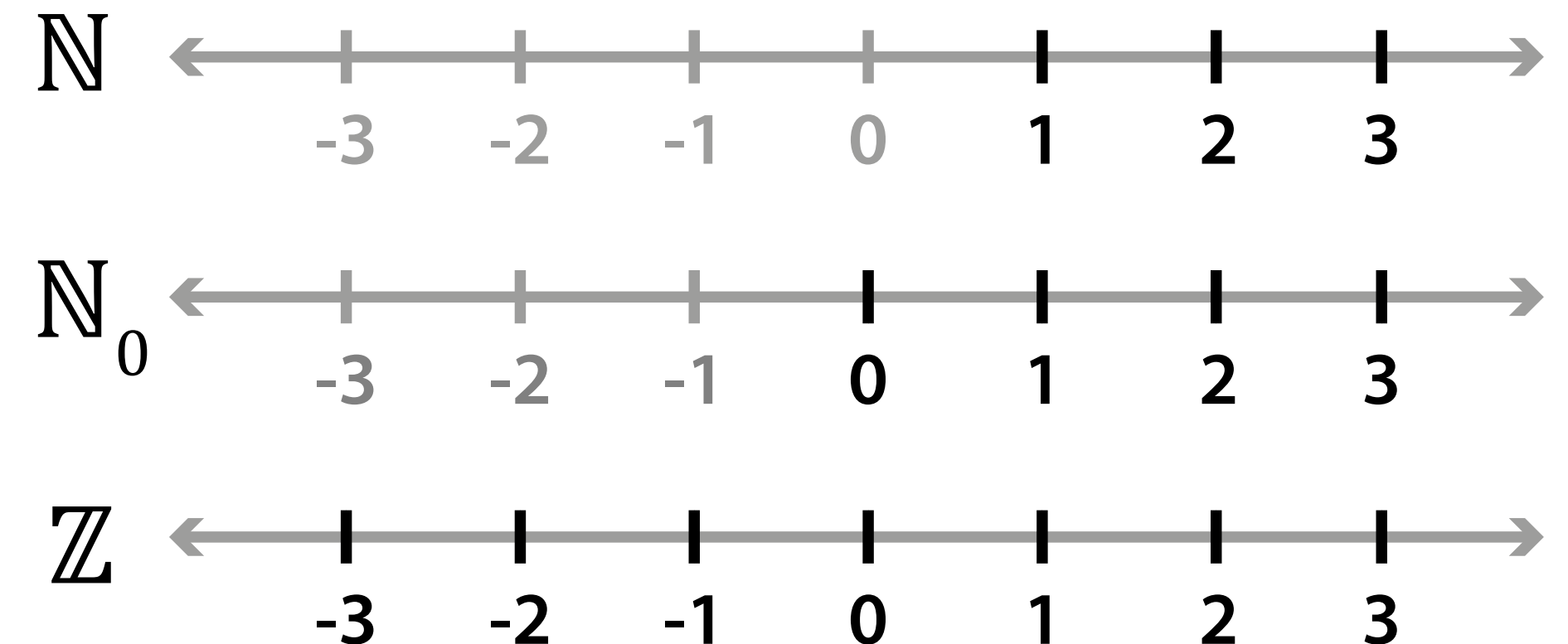
Mengen & Elemente

Wir können endliche Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente definieren. Bei den Zahlenmengen ist dies nicht möglich ...

Bereits die kleinste Menge \mathbb{N} enthält unendlich viele Elemente!

In diesem Fall können wir eine sortierte Aufzählung mit Auslassungspunkten verwenden:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$$



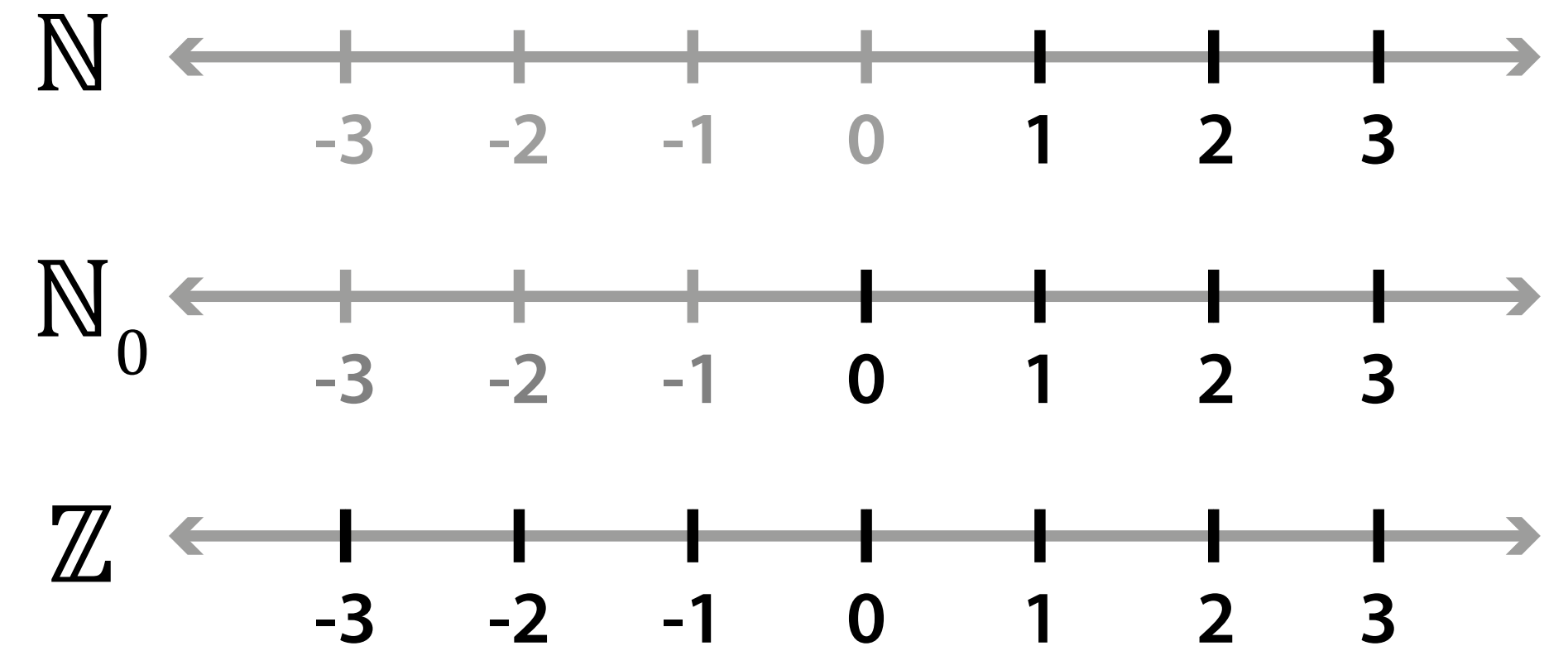
Mengen & Elemente

Ob ein Element in einer Menge enthalten ist oder nicht wird durch die **Elementzeichen** \in und \notin angezeigt. Beispiel:

$$2 \in \mathbb{N}$$

$$-3 \notin \mathbb{N}$$

Die 2 ist in der Menge der natürlichen Zahlen enthalten, die -3 dagegen nicht.



Mengen & Elemente

Verwende Elementzeichen, um anzugeben, zu welchen der fünf Zahlenbereiche die folgenden Zahlen gehören und nicht gehören:

-2.8

-4

5.1

0

Mengen & Elemente

Verwende Elementzeichen, um anzugeben, zu welchen der fünf Zahlenbereiche die folgenden Zahlen gehören und nicht gehören:

-2.8

-4

5.1

0

$$-2.8 \in \mathbb{R}$$

$$-2.8 \in \mathbb{Q}$$

$$-2.8 \notin \mathbb{Z}$$

$$-2.8 \notin \mathbb{N}_0$$

$$-2.8 \notin \mathbb{N}$$

$$-4 \in \mathbb{R}$$

$$-4 \in \mathbb{Q}$$

$$-4 \in \mathbb{Z}$$

$$-4 \notin \mathbb{N}_0$$

$$-4 \notin \mathbb{N}$$

$$5.1 \in \mathbb{R}$$

$$5.1 \in \mathbb{Q}$$

$$5.1 \notin \mathbb{Z}$$

$$5.1 \notin \mathbb{N}_0$$

$$5.1 \notin \mathbb{N}$$

$$0 \in \mathbb{R}$$

$$0 \in \mathbb{Q}$$

$$0 \in \mathbb{Z}$$

$$0 \in \mathbb{N}_0$$

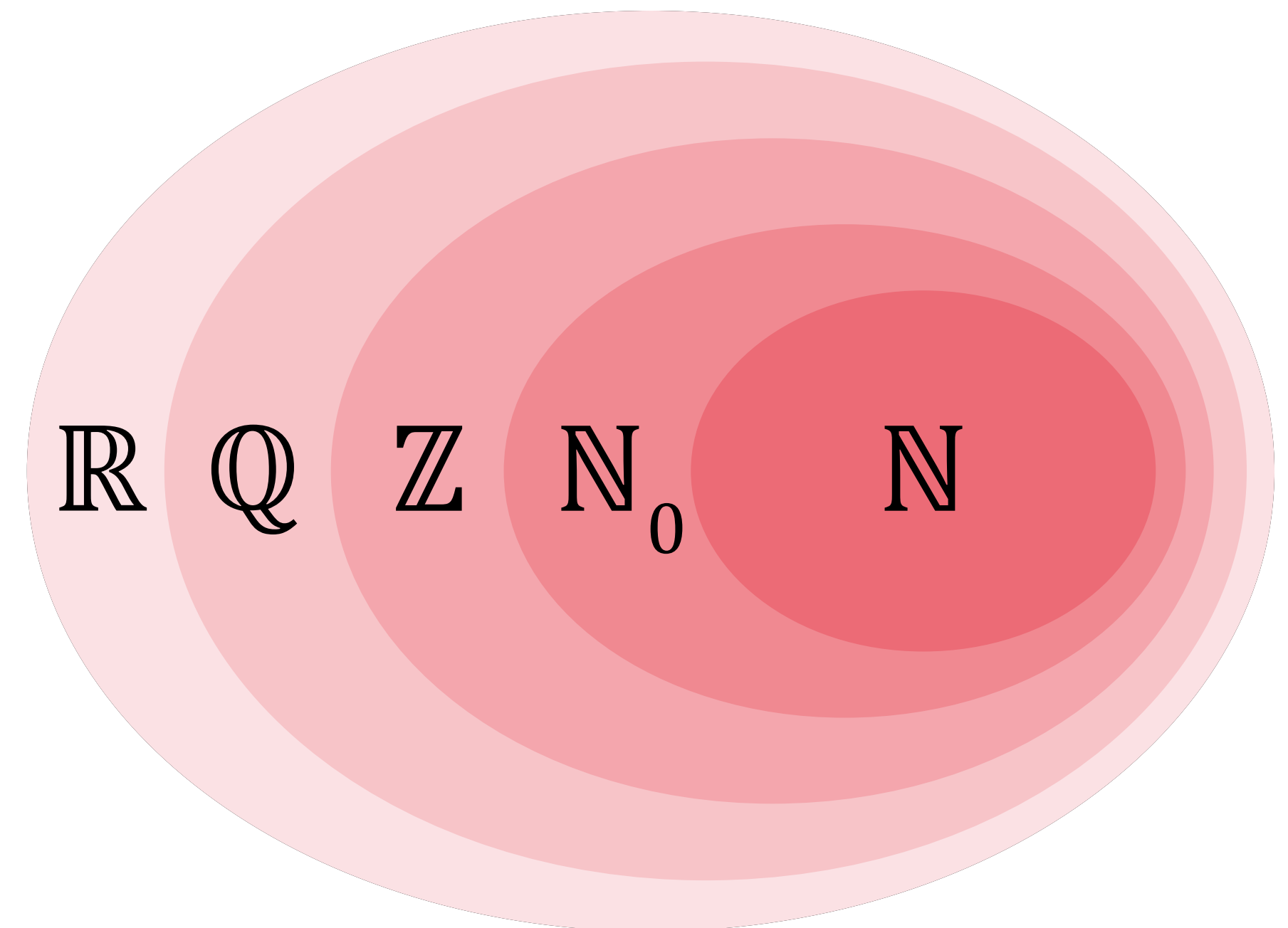
$$0 \notin \mathbb{N}$$

Teilmengen

Die Eigenschaft, dass eine Menge komplett in einer anderen enthalten ist, können wir mit den **Relationszeichen** ausdrücken:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Die Relation \subset ist allerdings nicht die Einzige ...

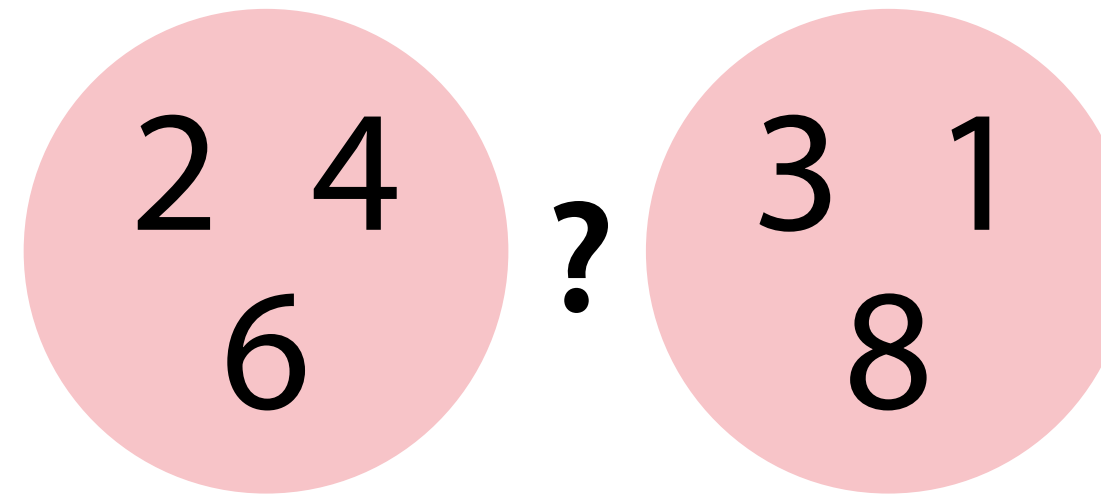


Relation	Bedeutung	Ähnlich zu
$A \subset B$	B enthält alle Elemente von A und mind. eines mehr	$<$
$A \subseteq B$	B enthält alle Elemente von A und ggf. mehr	\leq
$A \supset B$	A enthält alle Elemente von B und mind. eines mehr	$>$
$A \supseteq B$	A enthält alle Elemente von B und ggf. mehr	\geq
$A = B$	A enthält genau alle Elemente von B und keines mehr	$=$
$A \neq B$	A und B unterscheiden sich in mind. einem Element	\neq

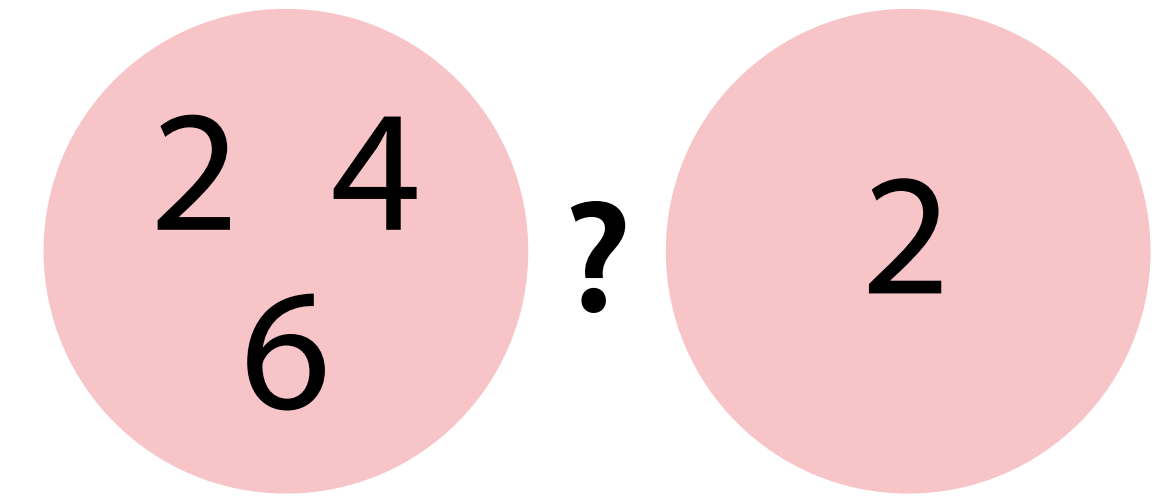
Teilmengen

Überlege dir, welche Relationen zwischen diese Mengen passen.

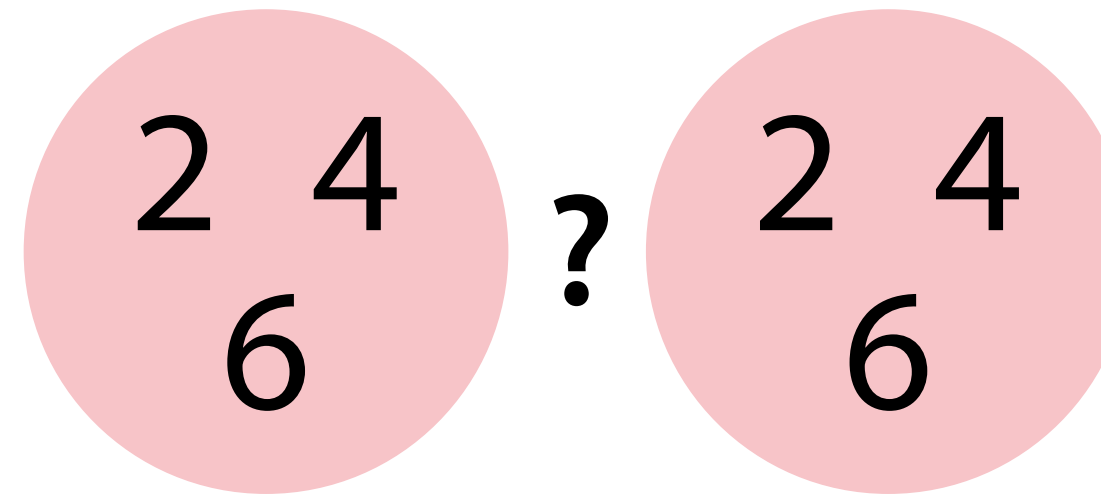
Schreibe danach die Relationen in der mathematischen Schreibweise mit geschweiften Klammern.



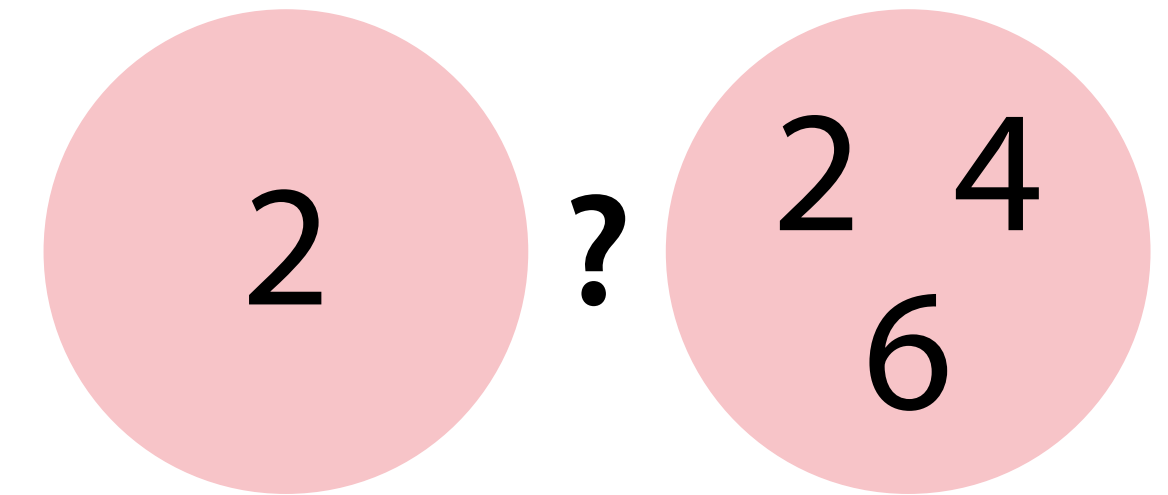
$\subset \supset \subseteq \supseteq = \neq$



$\subset \supset \subseteq \supseteq = \neq$



$\subset \supset \subseteq \supseteq = \neq$



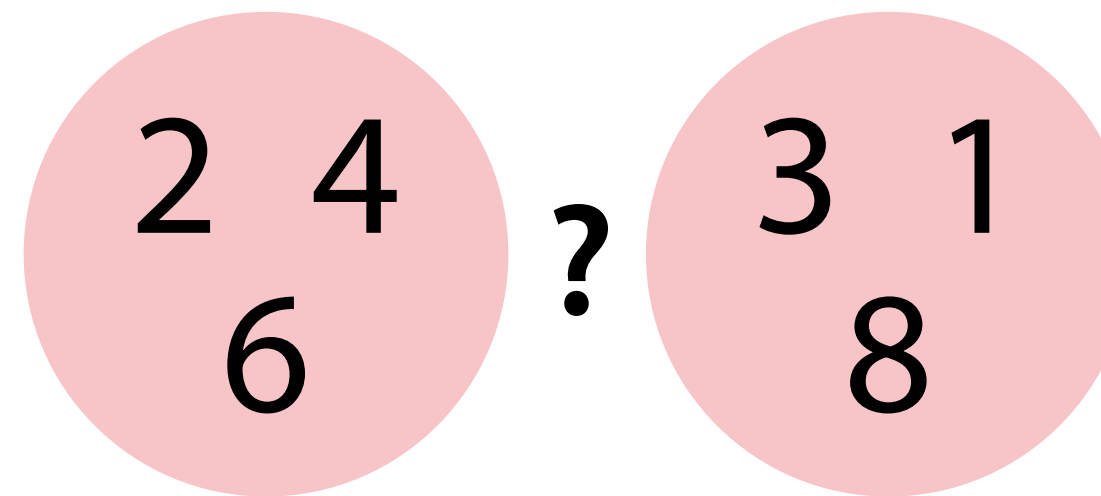
$\subset \supset \subseteq \supseteq = \neq$

Teilmengen

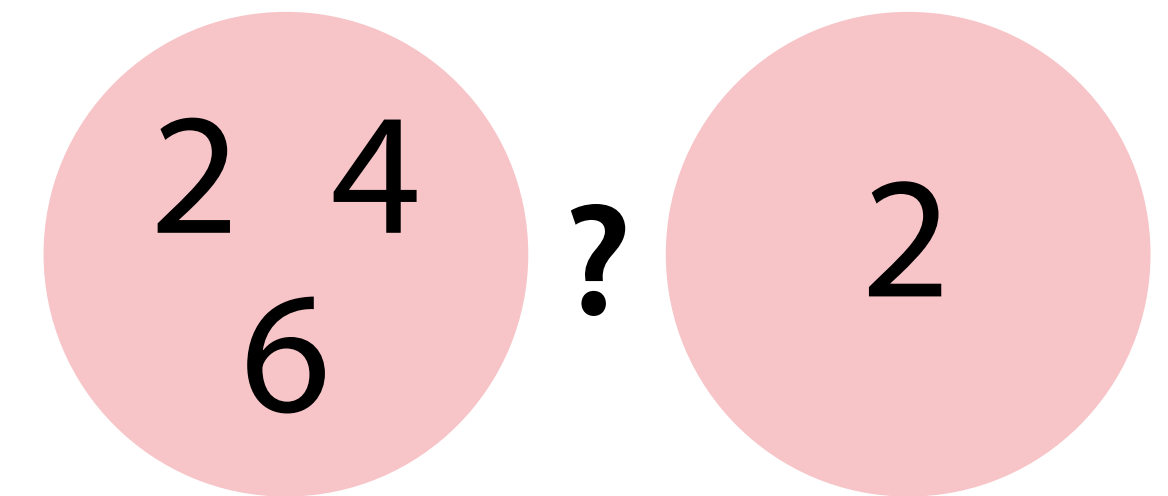
Überlege dir, welche Relationen zwischen diese Mengen passen.

Schreibe danach die Relationen in der mathematischen Schreibweise mit geschweiften Klammern.

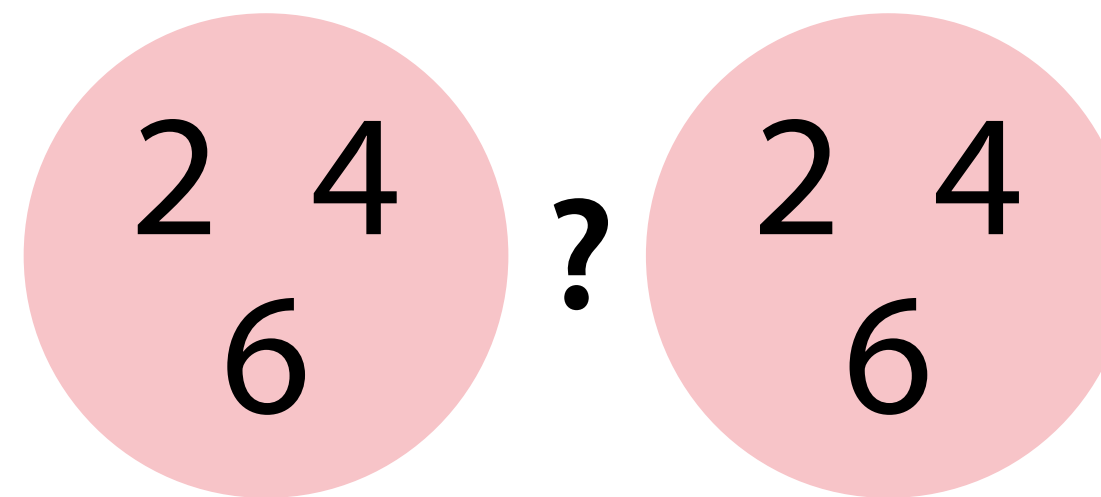
Es können mehrere Relationen gleichzeitig zutreffen!



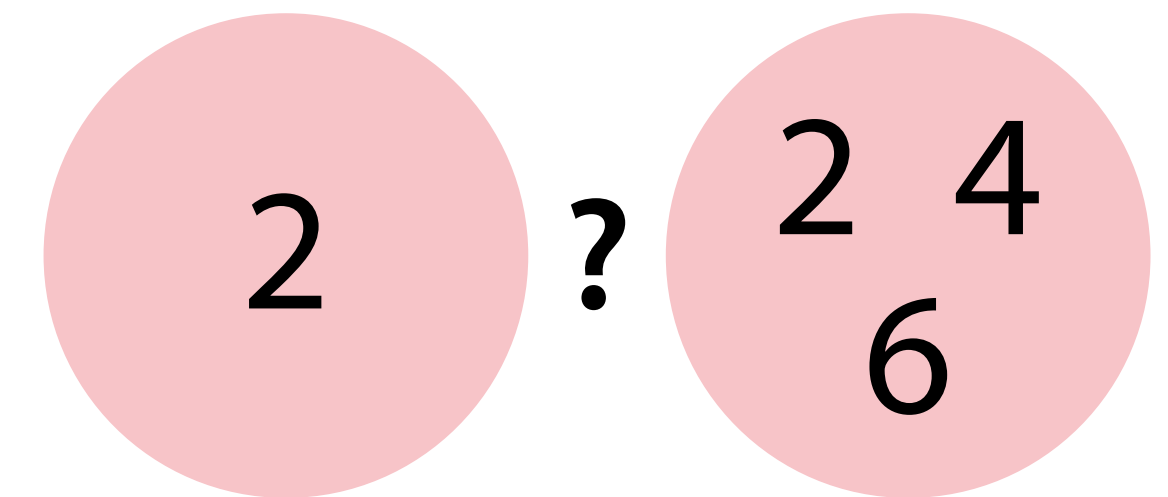
$\subset \supset \subseteq \supseteq = \neq$



$\subset \supset \subseteq \supseteq = \neq$



$\subset \supset \subseteq \supseteq = \neq$



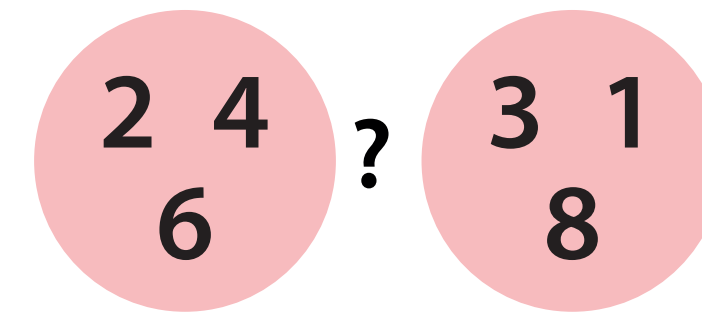
$\subset \supset \subseteq \supseteq = \neq$

Teilmengen

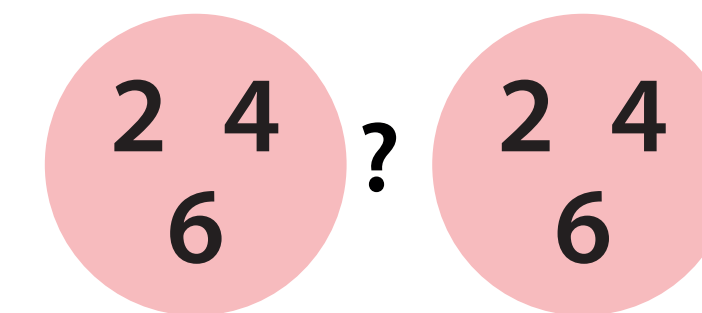
Überlege dir, welche Relationen zwischen diese Mengen passen.

Schreibe danach die Relationen in der mathematischen Schreibweise mit geschweiften Klammern.

Es können mehrere Relationen gleichzeitig zutreffen!



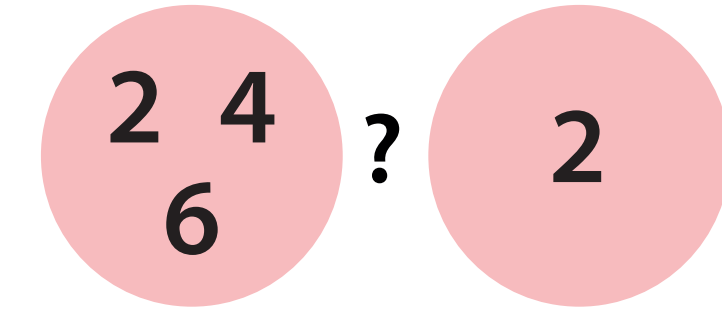
$$\{2,4,6\} \neq \{3,1,8\}$$



$$\{2,4,6\} = \{2,4,6\}$$

$$\{2,4,6\} \supseteq \{2,4,6\}$$

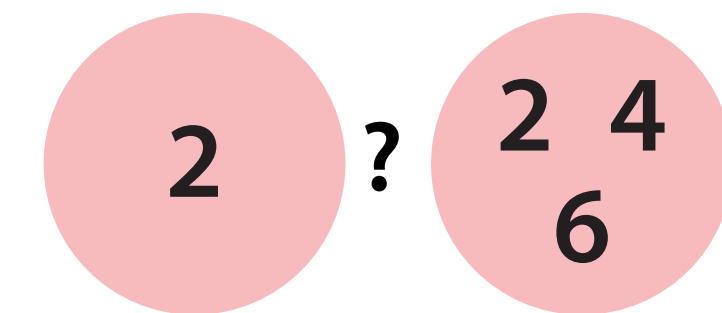
$$\{2,4,6\} \subseteq \{2,4,6\}$$



$$\{2,4,6\} \neq \{2\}$$

$$\{2,4,6\} \supset \{2\}$$

$$\{2,4,6\} \supseteq \{2\}$$



$$\{2\} \neq \{2,4,6\}$$

$$\{2\} \subset \{2,4,6\}$$

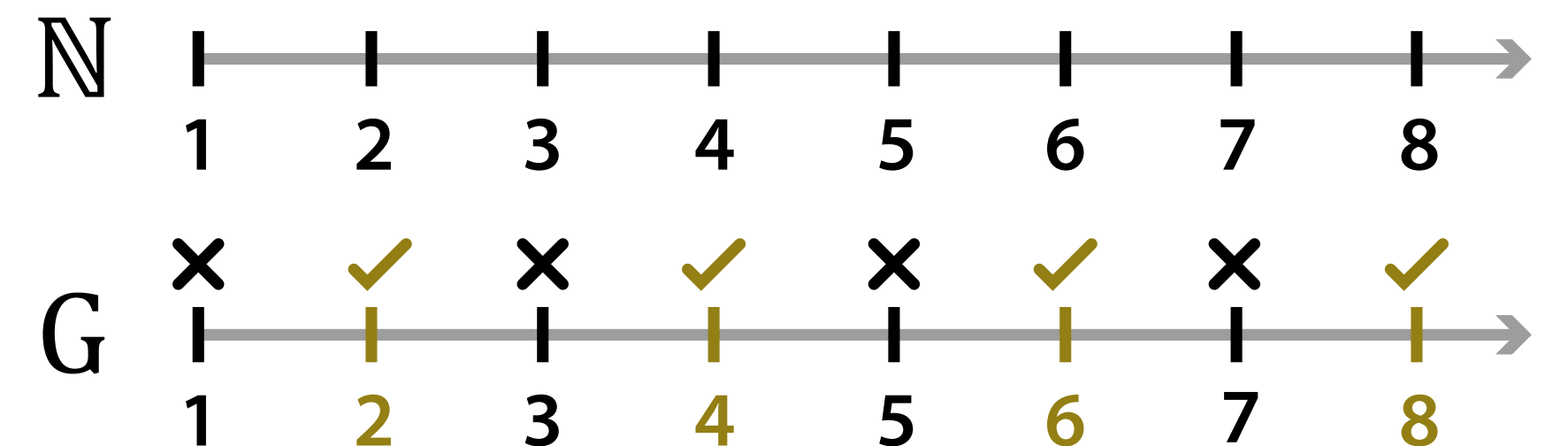
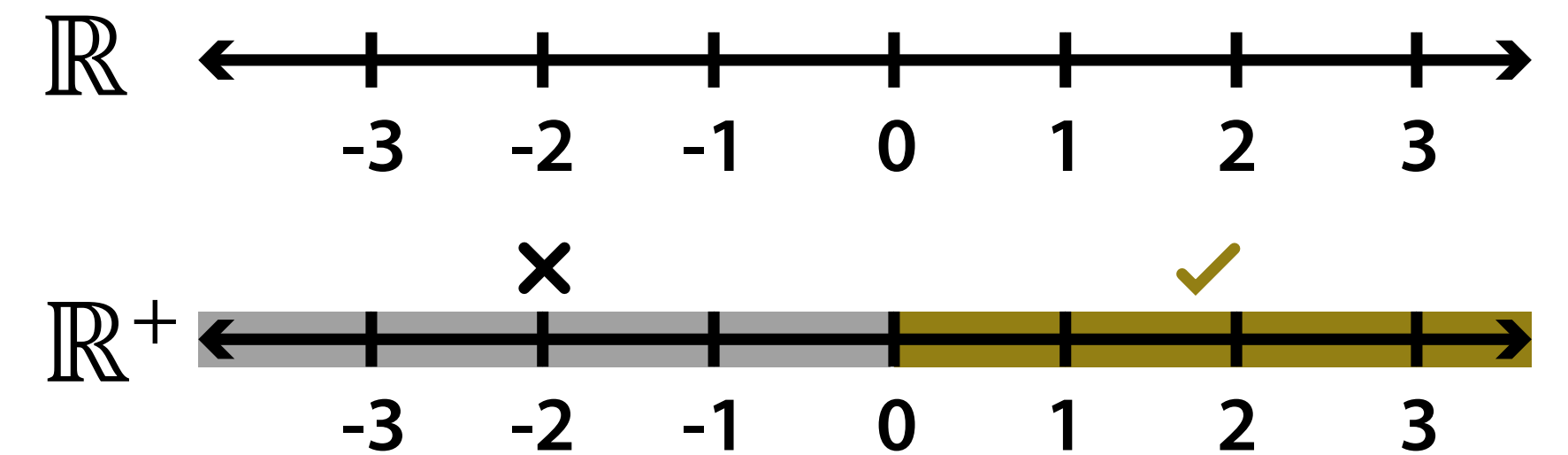
$$\{2\} \subseteq \{2,4,6\}$$

Bedingungen

Eine weitere Art um Mengen zu definieren sind Bedingungen. Wir lernen dabei einen weiteren Operator kennen, der als "für die gilt" gelesen wird.

$$\mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$$

Die Menge \mathbb{R}^+ ist gleich einer Menge, die alle Elemente x aus den reellen Zahlen enthält, für die gilt: x ist größer als 0.

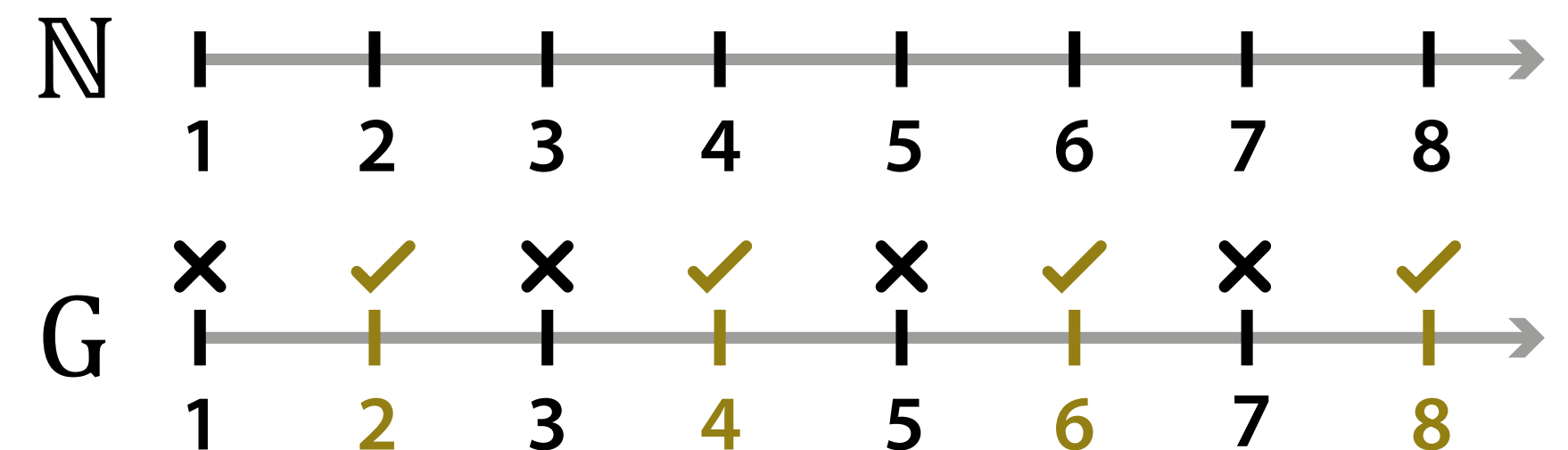
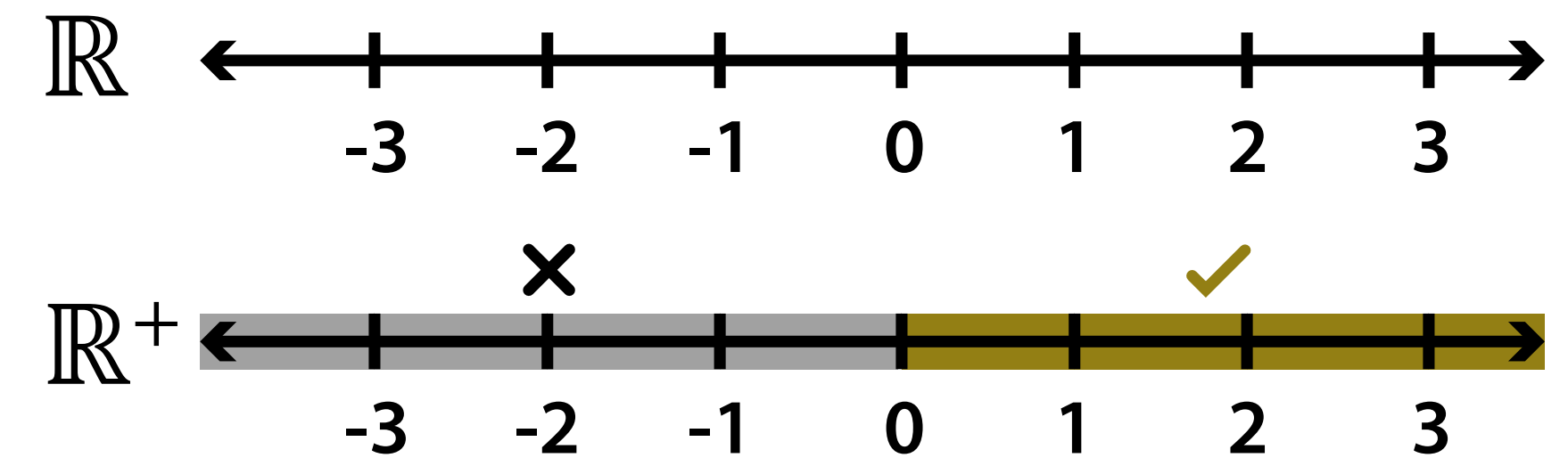


Bedingungen

Eine weitere Art um Mengen zu definieren sind Bedingungen. Wir lernen dabei einen weiteren Operator kennen, der als "für die gilt" gelesen wird.

$$G = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 2 = 0 \}$$

Die Menge G ist gleich einer Menge, die alle Elemente n aus den natürlichen Zahlen enthält, für die gilt: $n \bmod 2 = 0$.



Hinweis: der Modulo-Operator "mod" berechnet den Rest nach ganzzahliger Division.

Beispiel: $11 \bmod 3 = 2$ "die 3 geht 3 mal in 11, Rest 2"

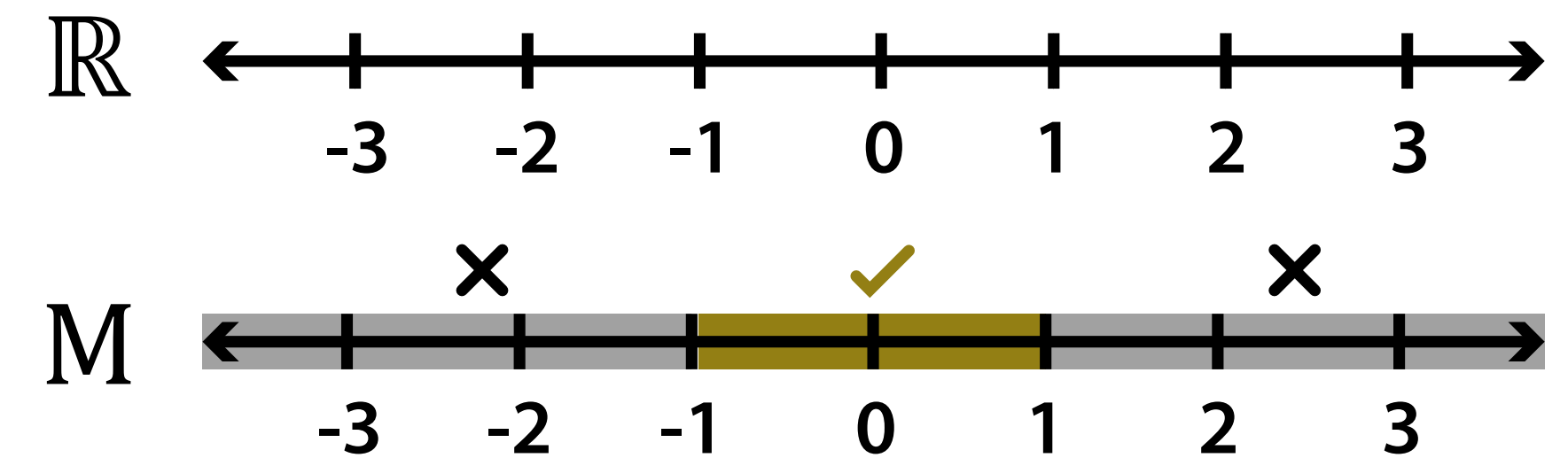
Bedingungen

Mit **booleschen Operatoren** können wir mehrere Bedingungen miteinander verknüpfen.

Mit dem UND Operator fordern wir, dass mehrere Bedingungen gleichzeitig zutreffen müssen:

$$M = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \wedge x \leq 1 \}$$

Der UND Operator ist nicht der einzige boolesche Operator ...



Bedingungen

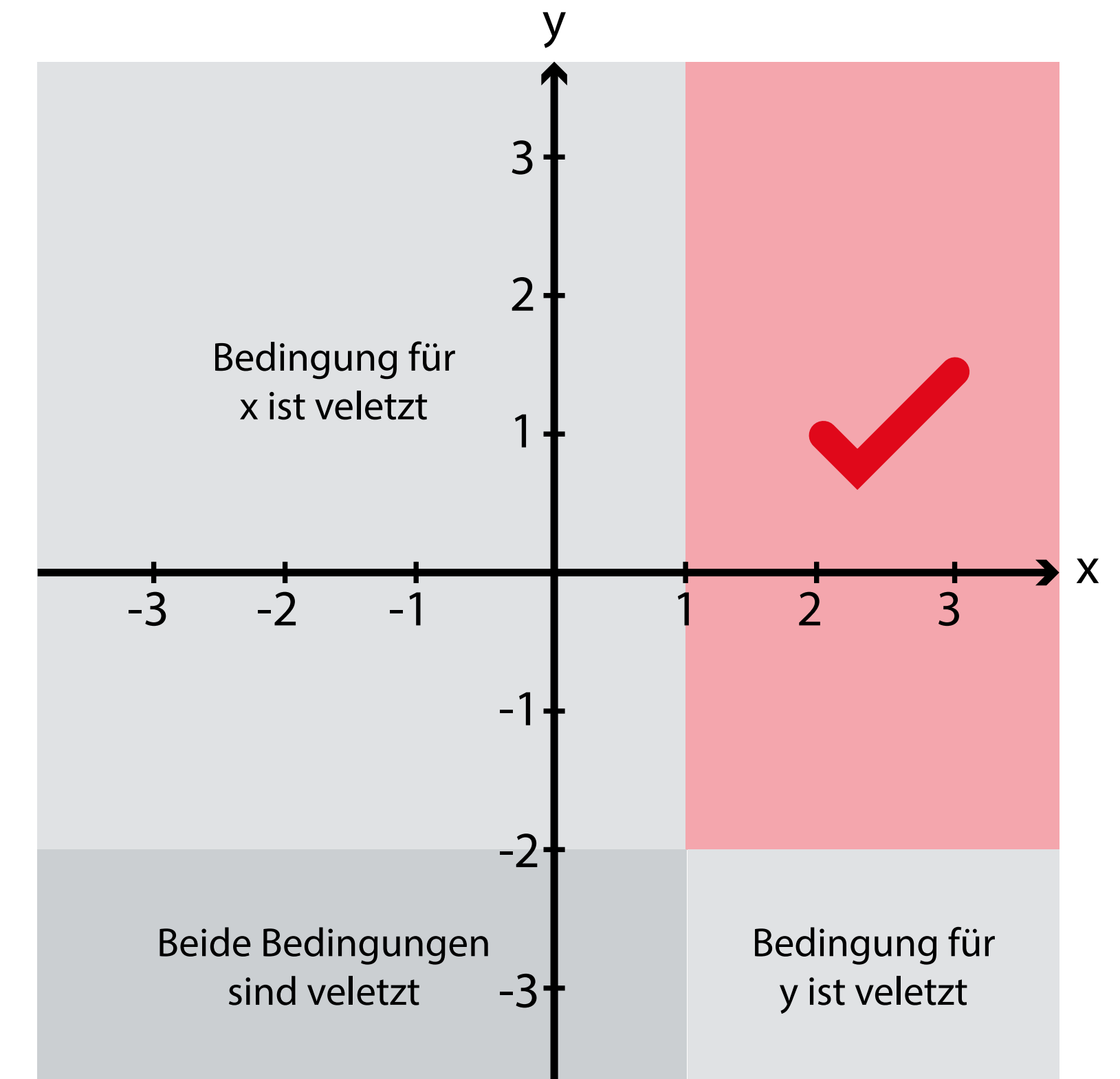
Operator	Bedeutung	Ähnlich zu
\wedge	Beide Bedingungen müssen zutreffen	AND
\vee	Mindestens eine Bedingung muss zutreffen	OR
$\underline{\vee}$	Genau eine Bedingung muss zutreffen	XOR
\neg	Die nachfolgende Bedingung darf nicht zutreffen	NOT

Bedingungen

Im zweidimensionalen Raum können wir die booleschen Operatoren besser visualisieren!

$$M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \wedge y \geq -2 \}$$

UND Operator Zur Menge gehören alle Vektoren, bei denen x mindestens 1 und gleichzeitig y mindestens -2 beträgt.



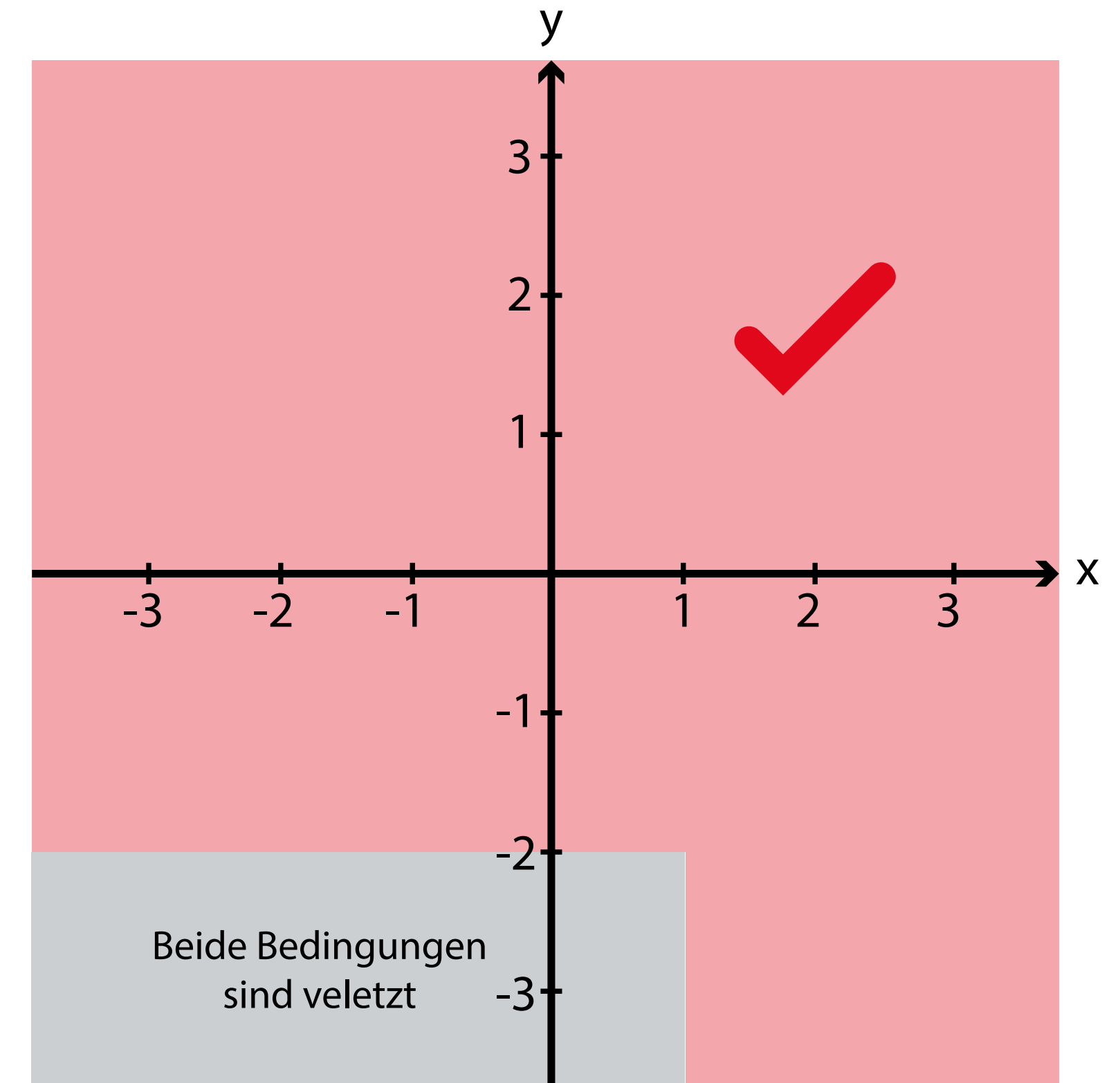
Bedingungen

Im zweidimensionalen Raum können wir die booleschen Operatoren besser visualisieren!

$$M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \vee y \geq -2 \}$$

ODER Operator Zur Menge gehören alle Vektoren, bei denen x mindestens 1 oder y mindestens -2 beträgt.

Das ODER ist nicht ausschließend: Es ist kein Problem, wenn beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind.



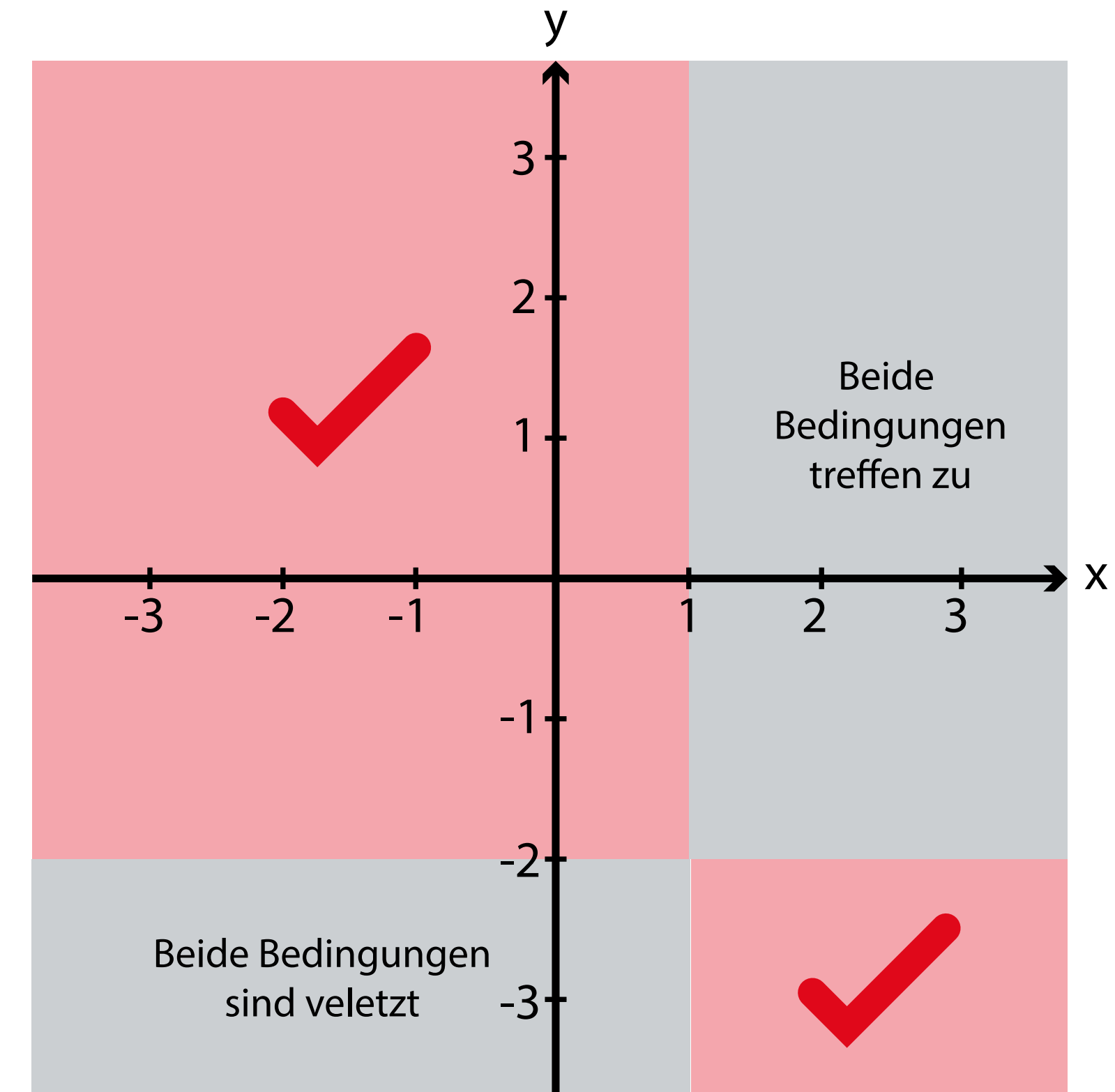
Bedingungen

Im zweidimensionalen Raum können wir die booleschen Operatoren besser visualisieren!

$$M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \vee y \geq -2 \}$$

XOR Operator Zur Menge gehören alle Vektoren, bei denen entweder x mindestens 1 oder y mindestens -2 beträgt.

Das XOR ist ausschließend: Werte die beide Bedingungen gleichzeitig erfüllen gehören nicht zur Menge!



Bedingungen

Definiere die folgenden Mengen mithilfe von Bedingungen:

M1 Die Menge aller ganzen Zahlen außer 0

M2 Die Menge aller ganzen Zahlen mit mindestens zwei Ziffern

M3 Die Menge aller natürlichen Zahlen mit genau zwei Ziffern.

Bedingungen

Definiere die folgenden Mengen mithilfe von Bedingungen:

M1 Die Menge aller ganzen Zahlen außer 0

M2 Die Menge aller ganzen Zahlen mit mindestens zwei Ziffern

M3 Die Menge aller natürlichen Zahlen mit genau zwei Ziffern.

$$M1 = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \neq 0 \}$$

$$M2 = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 10 \vee n \leq -10 \}$$

$$M3 = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq 10 \wedge n < 100 \}$$

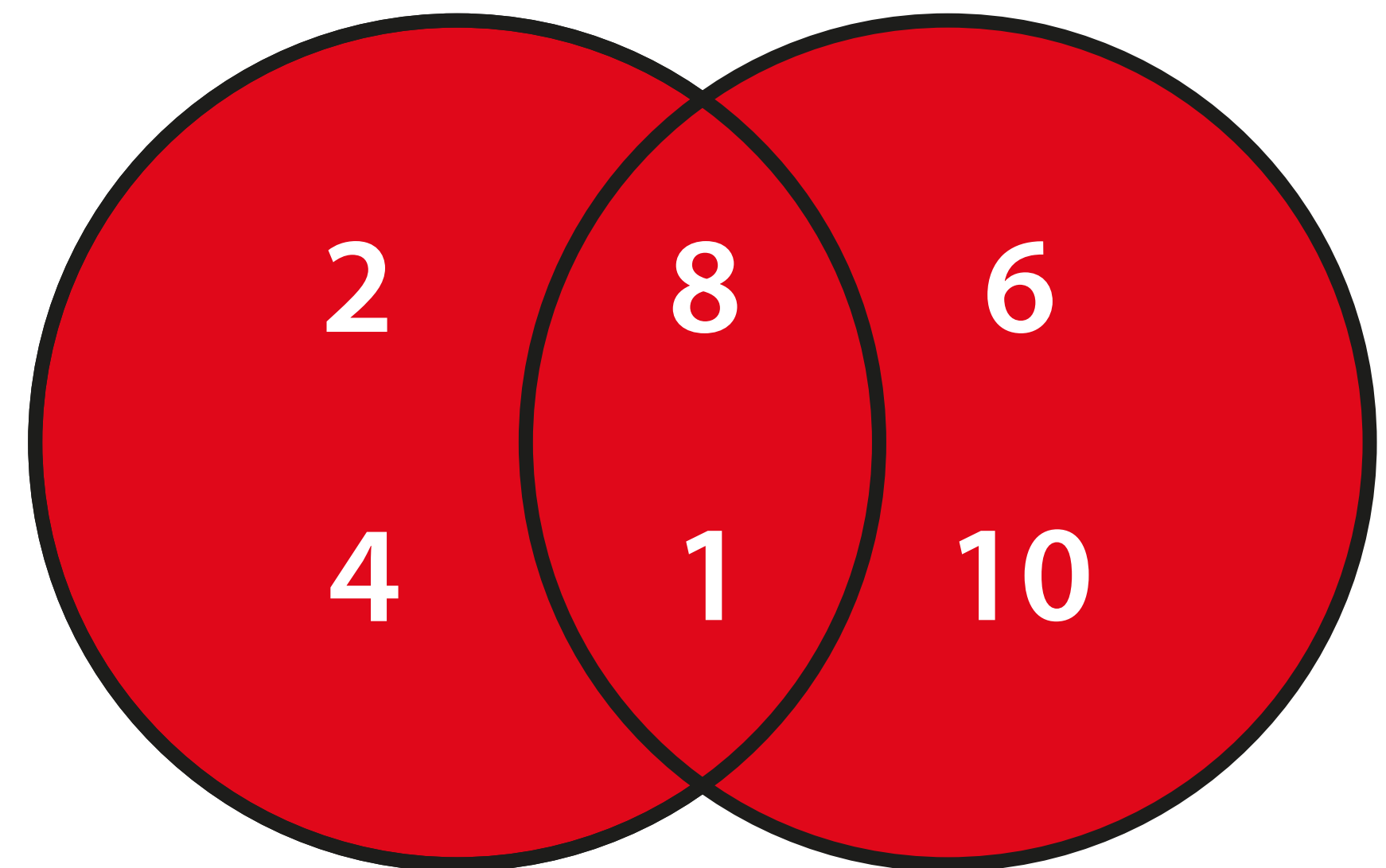
Kombination von Mengen

Die **Vereinigung** von zwei Mengen enthält alle Elemente, die in mindestens einer Menge enthalten sind. Formal:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

Beispiel:

$$\{1, 2, 4, 8\} \cup \{1, 6, 8, 10\} = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$$



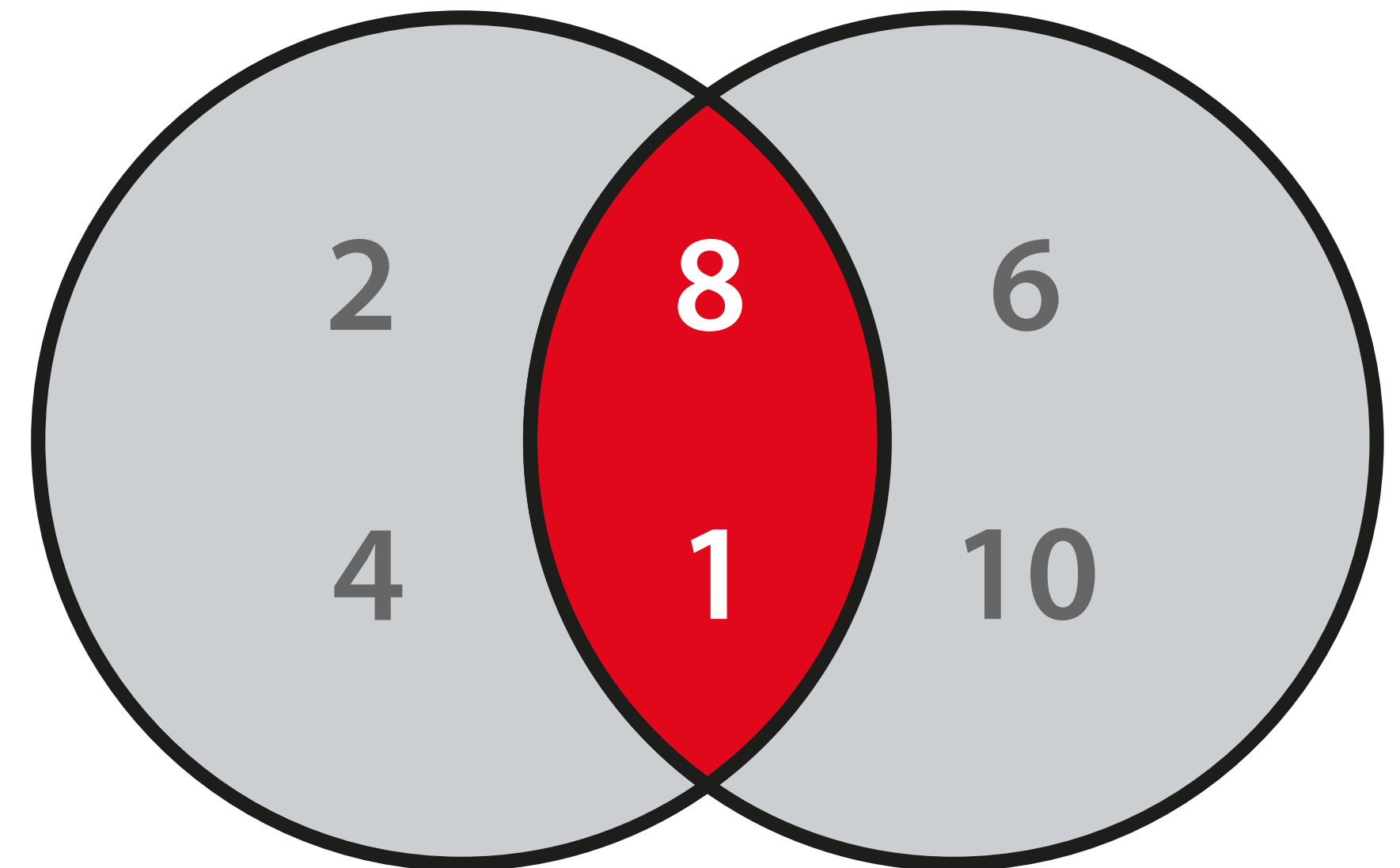
Kombination von Mengen

Der **Schnitt** von zwei Mengen enthält alle Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind. Formal:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Beispiel:

$$\{ 1, 2, 4, 8 \} \cap \{ 1, 6, 8, 10 \} = \{ 1, 8 \}$$



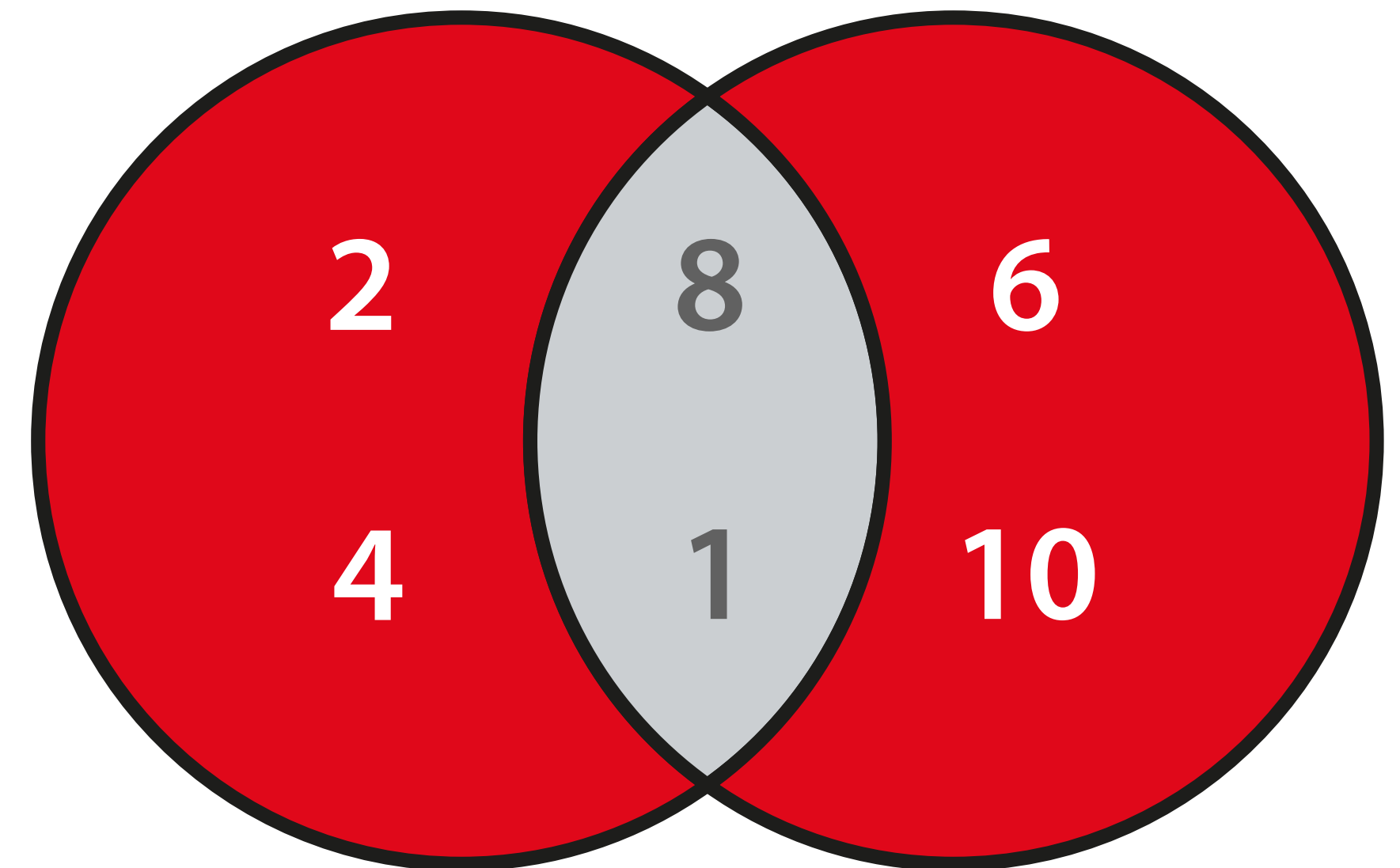
Kombination von Mengen

Die **Kontravalenz** von zwei Mengen enthält alle Elemente, die in genau einer der beiden Menge enthalten sind. Formal:

$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

Beispiel:

$$\{ 1, 2, 4, 8 \} \Delta \{ 1, 6, 8, 10 \} = \{ 2, 4, 6, 10 \}$$



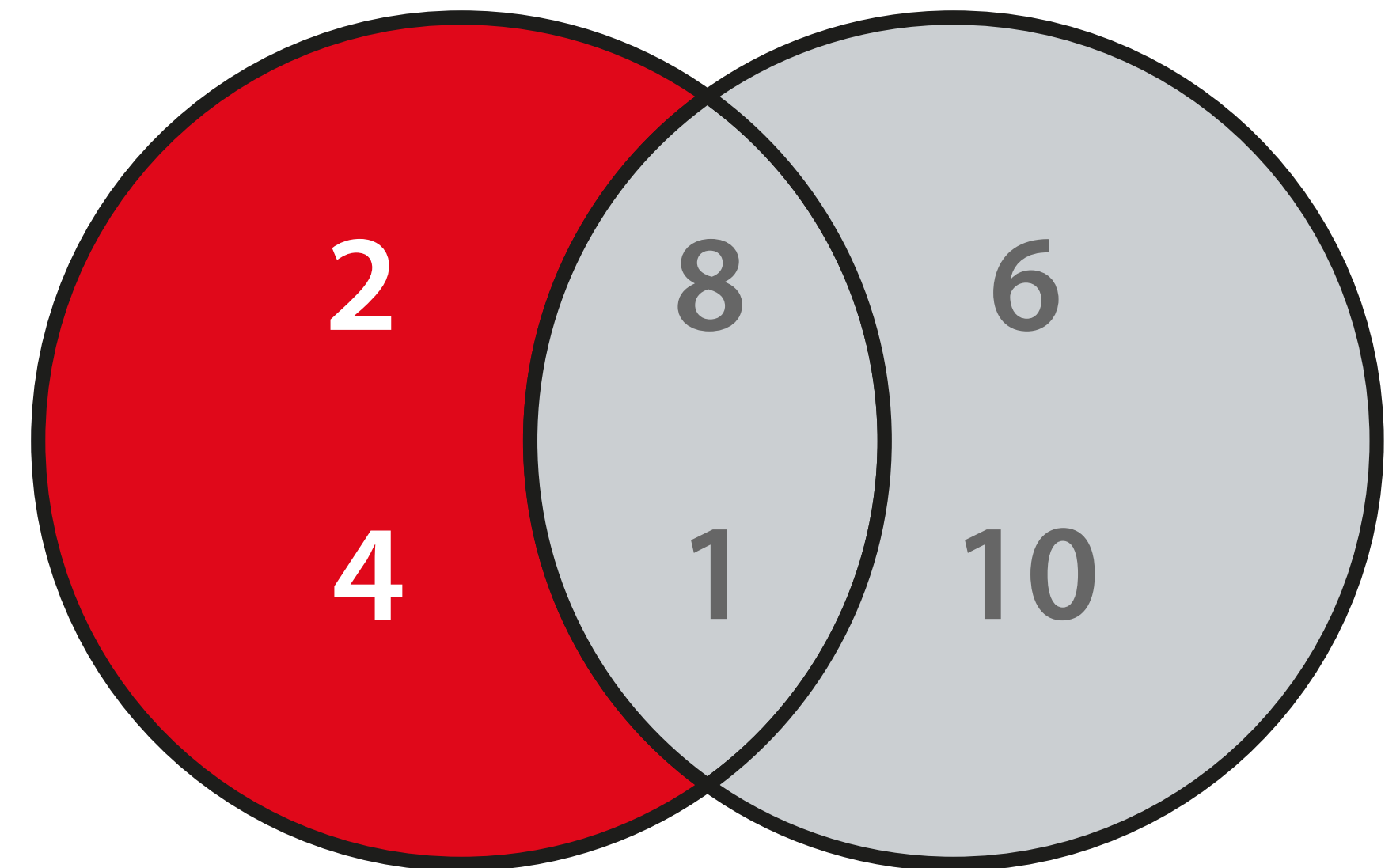
Kombination von Mengen

Die **Differenz** von zwei Mengen enthält alle Elemente, die nur in der linken Menge enthalten sind. Formal:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

Beispiel:

$$\{1, 2, 4, 8\} \setminus \{1, 6, 8, 10\} = \{2, 4\}$$



Hinweis: Das Differenzzeichen kann als "ohne" gelesen und interpretiert werden. Hier also {1,2,4,8} ohne die Zahlen 1, 6, 8 und 10.

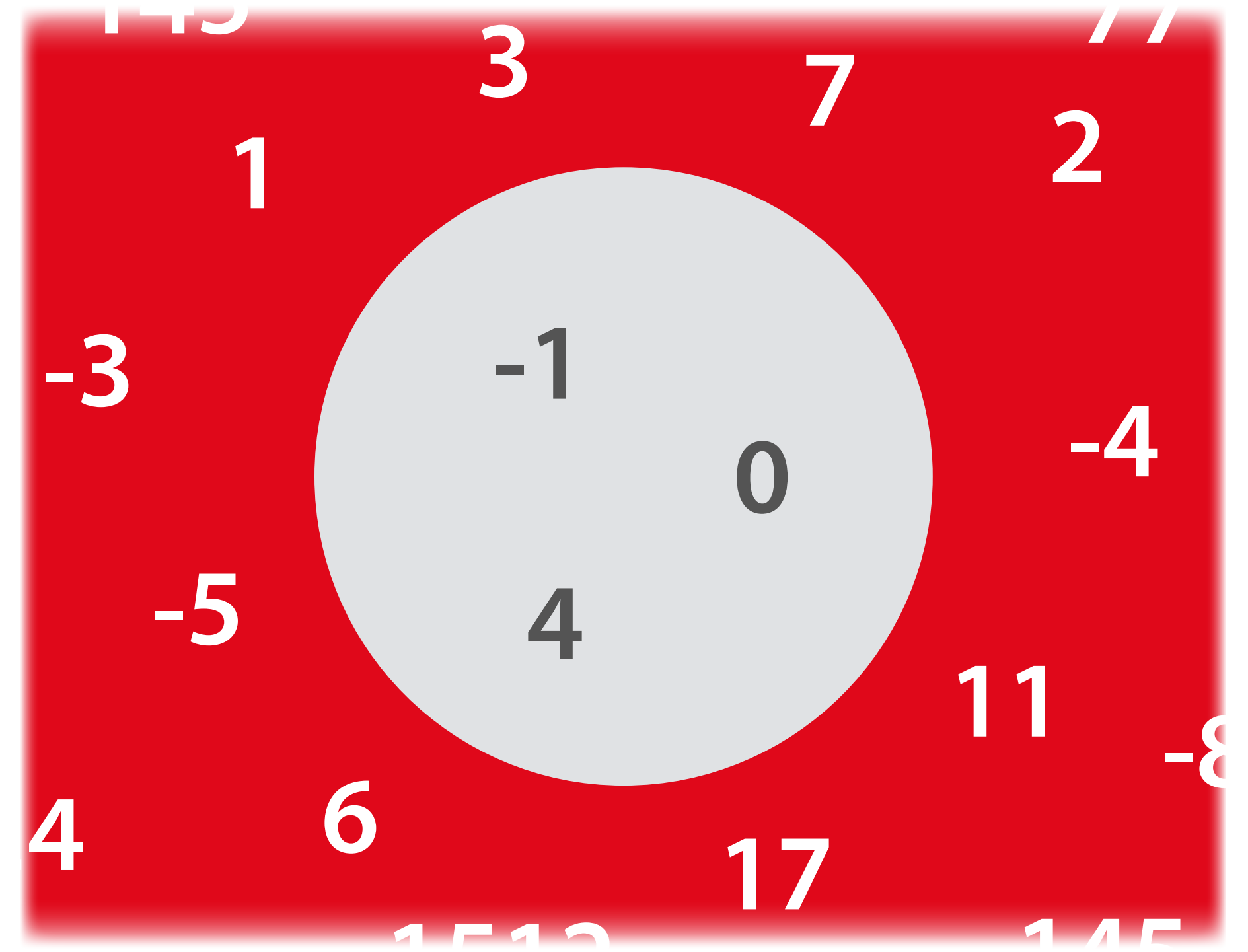
Kombination von Mengen

Verwandt mit der Differenz ist das **Komplement** einer Menge.

Das Komplement einer Menge enthält alle Elemente außer die Elemente in eben dieser Menge.

$$x \in B^c \Leftrightarrow x \notin B$$

Damit das Sinn ergibt, muss jedoch eine Grundmenge A angegeben werden. Beispiel: $A = \mathbb{Z}$ und $B = \{-1, 0, 4\}$



Kombination von Mengen

Gib die Elemente der folgenden Mengen an.

Gehe dabei davon aus, dass die Basismenge immer die der ganzen Zahlen \mathbb{Z} ist!

$$\{1, 4, 18\} \cup \{1, 2, 4, 12\}$$

$$\{1, 4, 18\} \cap \{1, 2, 4, 12\}$$

$$\{1, 4, 18\} \cup \{4\}^c$$

$$\{1, 4, 18\} \cap (\{2, 4, 17\} \setminus \{4\})$$

Kombination von Mengen

Gib die Elemente der folgenden Mengen an.

Gehe dabei davon aus, dass die Basismenge immer die der ganzen Zahlen \mathbb{Z} ist!

$$\{1, 4, 18\} \cup \{1, 2, 4, 12\} = \{1, 2, 4, 12, 18\}$$

$$\{1, 4, 18\} \cap \{1, 2, 4, 12\} = \{1, 4\}$$

$$\{1, 4, 18\} \cup \{4\}^c = \mathbb{Z}$$

$$\{1, 4, 18\} \cap (\{2, 4, 17\} \setminus \{4\}) = \{\}$$



Hinweis: Mit der Schreibweise $\{\}$ oder \emptyset wird die leere Menge angegeben. Sie enthält keine Elemente.

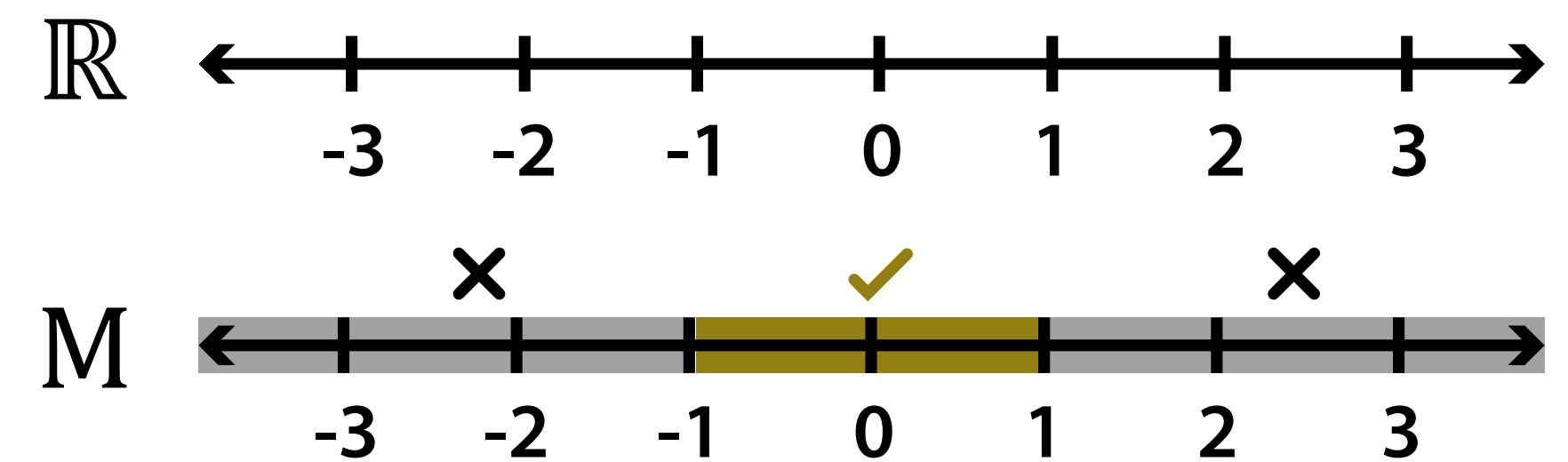
Intervalle

Wir betrachten erneut folgende Teilmenge der reellen Zahlen:

$$M = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \wedge x \leq 1 \}$$

Wir können diese mit einem Intervall kompakter schreiben. Ein Intervall ist eine zusammenhängende Teilmenge mit einer Ober- und einer Untergrenze:

$$M = [-1, 1]$$



Intervalle

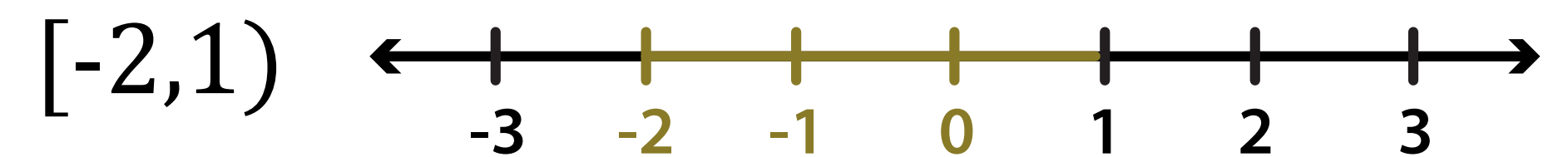
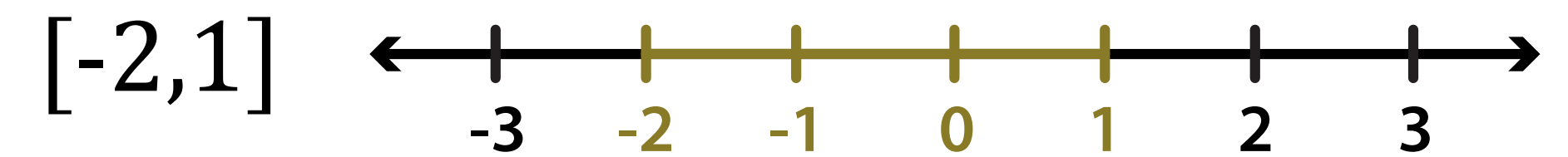
Je nachdem ob die Grenzen noch zur Menge dazugehören oder nicht, bezeichnen wir Intervalle als ...

Geschlossen $[-2, 1]$

Offen $(-2, 1)$

Halboffen $(-2, 1]$ oder $[-2, 1)$

Welcher Intervalltyp vorliegt, erkennt man an der runden oder eckigen Klammer neben der Grenze.



Intervalle

Wenn wir in eine Richtung keine Grenzen setzen möchten, geben wir statt einem endlichen Wert unendlich bzw. minus unendlich an.

Das Intervall $(-\infty, \infty)$ würde den ganzen Bereich \mathbb{R} abdecken.



Die Klammer neben $\pm \infty$ ist immer rund, da unendlich keine konkrete Zahl ist, die gerade noch im Intervall enthalten sein könnte.

Intervalle

Schreibe die folgenden Mengen in Intervallschreibweise!

I1 Alle reellen Zahlen die größer als 0 sind

I2 Alle reellen Zahlen kleiner gleich 3

I3 Alle reellen Zahlen von einschließlich -5 bis plus 5

Intervalle

Schreibe die folgenden Mengen in Intervallschreibweise!

$I_1 = (0, \infty)$ Alle reellen Zahlen die größer als 0 sind

$I_2 = (-\infty, 3]$ Alle reellen Zahlen kleiner gleich 3

$I_3 = [-5, 5]$ Alle reellen Zahlen von einschließlich -5 bis plus 5

Elementare Algebra

In der elementaren Algebra wiederholen wir mathematische Grundlagen aus Mittel- und Oberstufe.

Wir benötigen diese Grundlagen für nahezu alle weiteren quantitativen Inhalte des Studiums, insbesondere auch in BWL & VWL!

Sie werden als Selbstverständlichkeit vorausgesetzt.



Elementare Algebra

- Grundrechenarten (AG,DG,KG)
- Potenzen & Wurzeln
- Binomische Gleichungen
- Bruchrechnen & Prozentrechnen
- Logarithmen
- Gleichungen umformen
- Quadratische Gleichungen
- Gleichungssysteme

Grundrechenarten

Zur elementaren Algebra gehören die Grundrechenarten, das Rechnen mit Variablen, sowie das Umstellen und Lösen von Gleichungen.

Wir beginnen mit den zwei Grundrechenarten Addition und Multiplikation.

Addition

$$\underbrace{a + b}_{\text{Summanden}} = c$$

Summe

Multiplikation

$$\underbrace{a \cdot b}_{\text{Faktoren}} = c$$

Produkt

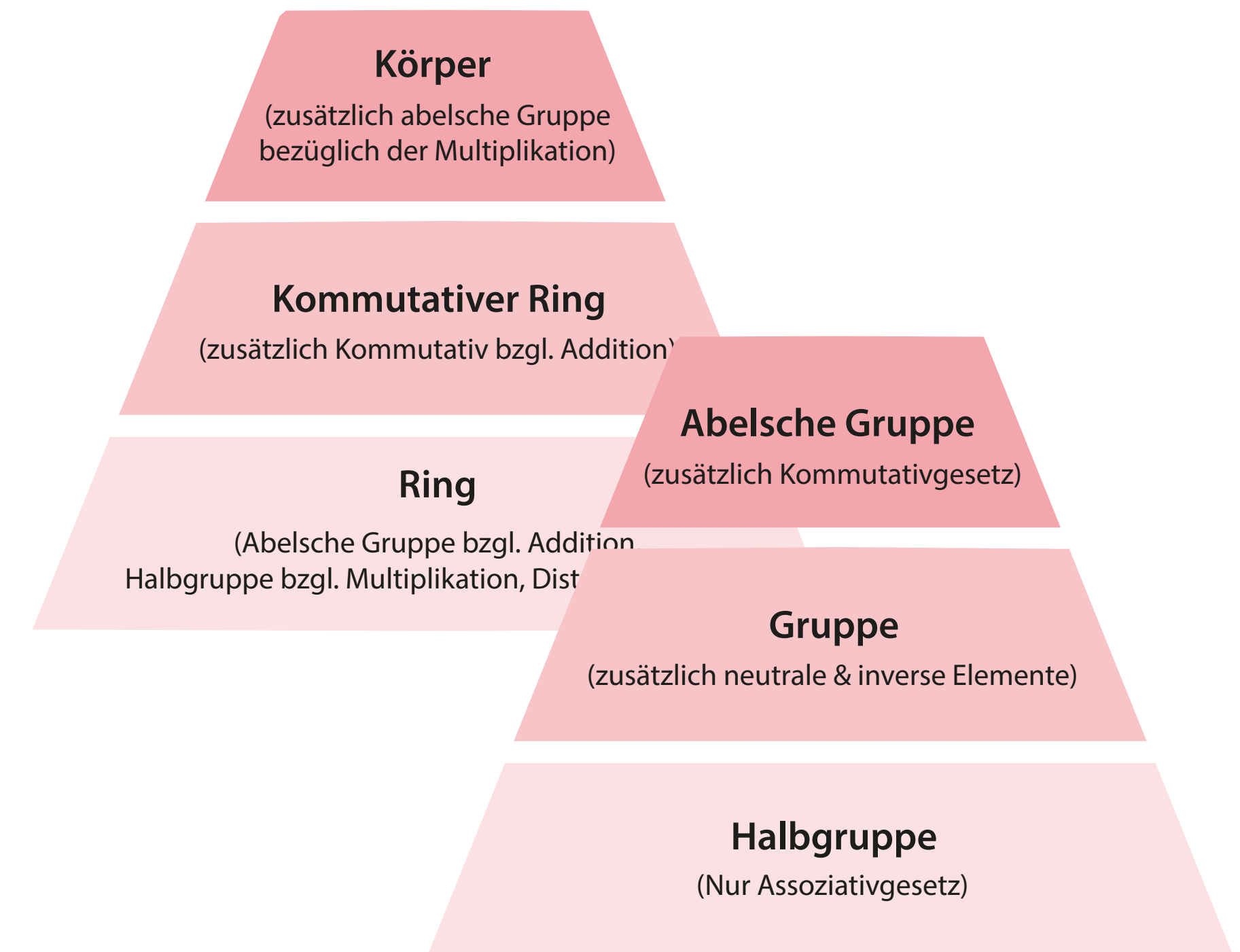


Grundrechenarten

An dieser Stelle könnten wir in die abstrakte Algebra eintauchen und die Fundamente der elementaren Algebra erkunden.

Erfüllt ein Zahlenbereich für diese Grundrechenarten bestimmte Bedingungen (Axiome), werden sie als Halbgruppe, Gruppe oder abelsche Gruppe klassifiziert.

Werden zusätzliche Bedingungen für die Kombination beider Grundrechenarten erfüllt, werden sie als Ring, kommutativer Ring oder als Körper klassifiziert.



Grundrechenarten

Wir ersparen uns diesen Ausflug größtenteils, denn für uns ist die Mathematik ein Werkzeug und kein Selbstzweck.

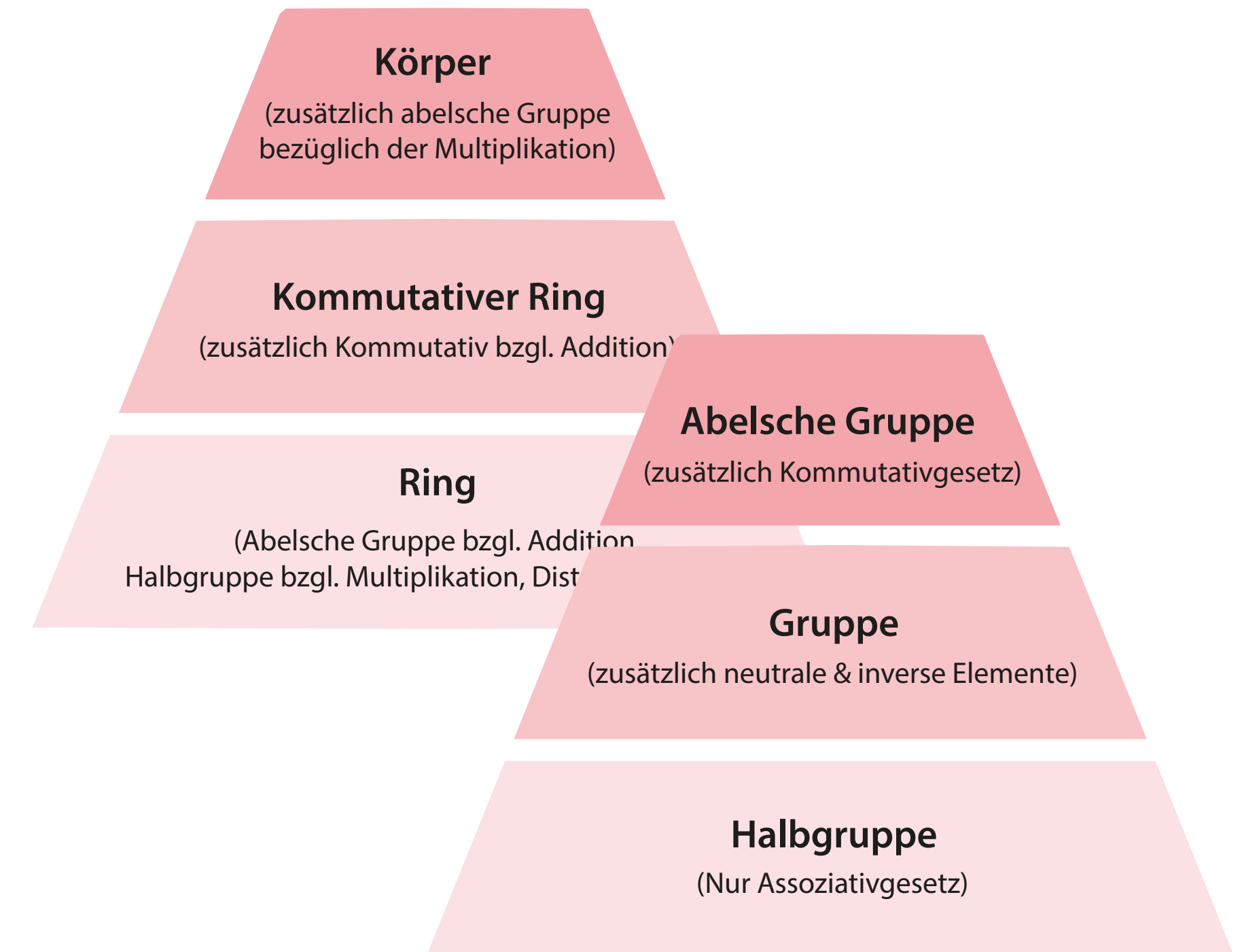
Die in der abstrakten Algebra verwendeten Axiome, lernen wir dennoch in Form der folgenden Punkte kennen:

Assoziativgesetz

Neutrales & Inverses Element

Kommutativgesetz

Distributivgesetz



Grundrechenarten

Assoziativ bedeutet, dass bei mehrfacher Addition oder Multiplikation die Reihenfolge der Ausführung keine Rolle spielt.

Assoziativgesetz der Addition

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Assoziativgesetz der Multiplikation

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Assoziativität

$$(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3) = 6$$

$$(1 \cdot 2) \cdot 3 = 1 \cdot (2 \cdot 3) = 6$$

$$(1 - 2) - 3 = 1 - (2 - 3) \quad \times$$

$$(1 / 2) / 3 = 1 / (2 / 3) \quad \times$$

Grundrechenarten

Wird ein **neutrales Element** mit einer Zahl verrechnet, dann ändert sich diese Zahl nicht.

$$\exists e_+ \in M \text{ für das gilt: } e_+ + x = x$$

$$\exists e_x \in M \text{ für das gilt: } e_x \cdot x = x$$

$$\text{mit } e_+ = 0 \text{ und } e_x = 1$$

Neutral & Invers

$$0 + x = x \quad 1 \cdot x = x$$

$$-x + x = 0 \quad x^{-1} \cdot x = 1$$



Hinweis: Das Zeichen \exists wird als "es existiert ein" gelesen im Sinne von "es gibt mindestens ein".

Es gibt auch \exists_1 für "es existiert genau ein".

Grundrechenarten

Wird ein **inverses Element** mit einer Zahl verrechnet, dann erhalten wir als Ergebnis das neutrale Element.

$$\exists x'_+ \in M \text{ für das gilt: } x'_+ + x = e_+$$

$$\exists x'_x \in M \text{ für das gilt: } x'_x \cdot x = e_x$$

$$\text{mit } x'_+ = -x \text{ und } x'_x = x^{-1}$$

Neutral & Invers

$$0 + x = x \quad 1 \cdot x = x$$

$$-x + x = 0 \quad x^{-1} \cdot x = 1$$

Grundrechenarten

Kommutativ bedeutet, dass sich das Ergebnis einer Addition oder Multiplikation nicht ändert, wenn ich die Elemente rechts und links vertausche.

Kommutativgesetz der Addition

$$a + b = b + a$$

Kommutativgesetz der Multiplikation

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Kommutativität

$$5 + 7 = 7 + 5 = 12$$

$$5 \cdot 7 = 7 \cdot 5 = 35$$

$$5 - 7 = 7 - 5 \quad \times$$

$$5 / 7 = 7 / 5 \quad \times$$

Grundrechenarten

Kombinieren wir Addition und Multiplikation gilt Punkt vor Strich:


$$a + b \cdot c = a + (b \cdot c)$$

$$~~a + b \cdot c = (a + b) \cdot c~~$$

Erzwingen wir den Vorrang der Addition durch eine Klammer, lernen wir das **Distributivgesetz** kennen:

$$a(b+c) = ab + ac$$

Distributivgesetz


$$\begin{aligned} & 5 \cdot (1 + 2 + 3) \\ &= 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \\ &= 5 + 10 + 15 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Grundrechenarten

Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Neutrales Element: $0 + a = a$ $1 \cdot a = a$

Inverses Element: $-a + a = 0$ $a^{-1} \cdot a = 1$

Kommutativgesetz: $a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$

Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Grundrechenarten

Die Grundrechenarten Subtraktion und Division sind die Gegenstücke zur Addition und Multiplikation:

Subtraktion ist die Addition des inversen Elements:

$$a - b = a + (-b)$$

Division ist die Multiplikation mit dem inversen Element:

$$a / b = a \cdot b^{-1}$$

Addition

$$\underbrace{a + b}_{\text{Summanden}} = c_{\text{Summe}}$$

Multiplikation

$$\underbrace{a \cdot b}_{\text{Faktoren}} = c_{\text{Produkt}}$$

Subtraktion

$$a - b = c$$

Minuend Subtrahend Differenz

Division

$$a / b = c$$

Dividend Divisor Quotient

Grundrechenarten

Die Subtraktion ist weder assoziativ noch kommutativ.

$$(a - b) - c \neq a - (b - c) = a - b + c$$

$$a - b \neq b - a$$

Die Division ist weder assoziativ noch kommutativ.

$$(a / b) / c \neq a / (b / c)$$

$$a / b \neq b / a$$

Addition

$$\underbrace{a + b}_{\text{Summanden}} = c_{\text{Summe}}$$

Multiplikation

$$\underbrace{a \cdot b}_{\text{Faktoren}} = c_{\text{Produkt}}$$

Subtraktion

$$a - b = c$$

Minuend Subtrahend Differenz

Division

$$a / b = c$$

Dividend Divisor Quotient

Grundrechenarten

Diese Distributivgesetze funktionieren:

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$a(b-c) = ab - ac$$

Diese Distributivgesetze funktionieren nicht:

$$a/(b+c) \neq a/b + a/c$$

$$a/(b-c) \neq a/b - a/c$$

Addition

$$\underbrace{a + b}_{\text{Summanden}} = c_{\text{Summe}}$$

Multiplikation

$$\underbrace{a \cdot b}_{\text{Faktoren}} = c_{\text{Produkt}}$$

Subtraktion

$$a - b = c$$

Minuend Subtrahend Differenz

Division

$$a / b = c$$

Dividend Divisor Quotient

Grundrechenarten

Präzedenz / Rangfolge: Innerhalb der Grundrechenarten gilt Klammer vor Punkt vor Strich.

Bei Gleichstand zwischen zwei Punktrechnungen oder zwei Strichrechnungen gilt zusätzlich links vor rechts.

$$1 + 4 \cdot 5 = 21$$

$$(1 + 4) \cdot 5 = 25$$

Addition

$$\underbrace{a + b}_{\text{Summanden}} = c_{\text{Summe}}$$

Multiplikation

$$\underbrace{a \cdot b}_{\text{Faktoren}} = c_{\text{Produkt}}$$

Subtraktion

$$a - b = c$$

Minuend Subtrahend Differenz

Division

$$a / b = c$$

Dividend Divisor Quotient

Grundrechenarten

Auslassung: Der Operator für die Multiplikation wird häufig weggelassen.

Auslassung bei Faktoren vor einer Klammer:

$$a \cdot (b + c) = a(b + c)$$

Auslassung zwischen zwei Faktoren:

$$a \cdot b = ab$$

Addition

$$\underbrace{a + b}_{\text{Summanden}} = c_{\text{Summe}}$$

Multiplikation

$$\underbrace{a \cdot b}_{\text{Faktoren}} = c_{\text{Produkt}}$$

Subtraktion

$$a - b = c$$

Minuend Subtrahend Differenz

Division

$$a / b = c$$

Dividend Divisor Quotient

Potenzrechnen

Idee: Die Basis a wird b mal "miteinander" multipliziert.

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$$

Wenn der Exponent eins ist, dann wird die Basis einmal mit sich selbst multipliziert. Wir können diesen Exponenten weglassen.

$$7^1 = 7$$

Aber was ist, wenn der Exponent keine natürliche Zahl ist?

$$\begin{array}{c} \text{Exponent} \\ | \\ a^b \\ | \quad | \\ \text{Basis} \quad \text{Potenzwert} \end{array} = C$$



Potenzrechnen

Exponent 0 Das Ergebnis ist in diesem Falle immer 1, außer die Basis ist ebenfalls 0. Dann wäre das Ergebnis nicht definiert!

$$a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Exponent negativ Das Minuszeichen im Exponenten erzeugt den Kehrwert des eigentlichen Ergebnisses:

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b} \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = 0.125$$

$$\begin{array}{c} \text{Exponent} \\ | \\ \overline{a^b} \\ | \\ \text{Basis} \end{array} = \begin{array}{c} \text{C} \\ | \\ \text{Potenzwert} \end{array}$$



Hinweis: Das Zeichen \forall wird als "für alle" gelesen. Hier zeigt es, dass die Aussage links für alle reellen a außer null gilt.

Potenzrechnen

Exponent ist ein Bruch Hier entdecken wir den Zusammenhang zwischen Potenzrechnen und Wurzelrechnen:

$$a^{1/b} = \sqrt[b]{a} \quad 625^{1/4} = \sqrt[4]{625} = 5$$

$$\begin{array}{c} \text{Exponent} \\ | \\ a^b \\ | \quad \text{---} \\ \text{Basis} \end{array} = \begin{array}{c} C \\ | \\ \text{Potenzwert} \end{array}$$

Potenzrechnen

Vorrang: Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich

$$3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 = 48$$

$$(3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 144$$

Potenzen von Potenzen Werden Potenzen potenziert, multipliziert man die Exponenten.

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

$$(4^3)^2 = (4^3) (4^3) = (4 \cdot 4 \cdot 4) (4 \cdot 4 \cdot 4) = 4^6 = 4^{3 \cdot 2}$$

Exponent

$$\underbrace{a}_\text{Basis}^{\underbrace{b}_\text{Exponent}} = \underbrace{C}_\text{Potenzwert}$$

Potenzrechnen

Für Potenzen mit gleicher Basis a gelten folgende Regeln:

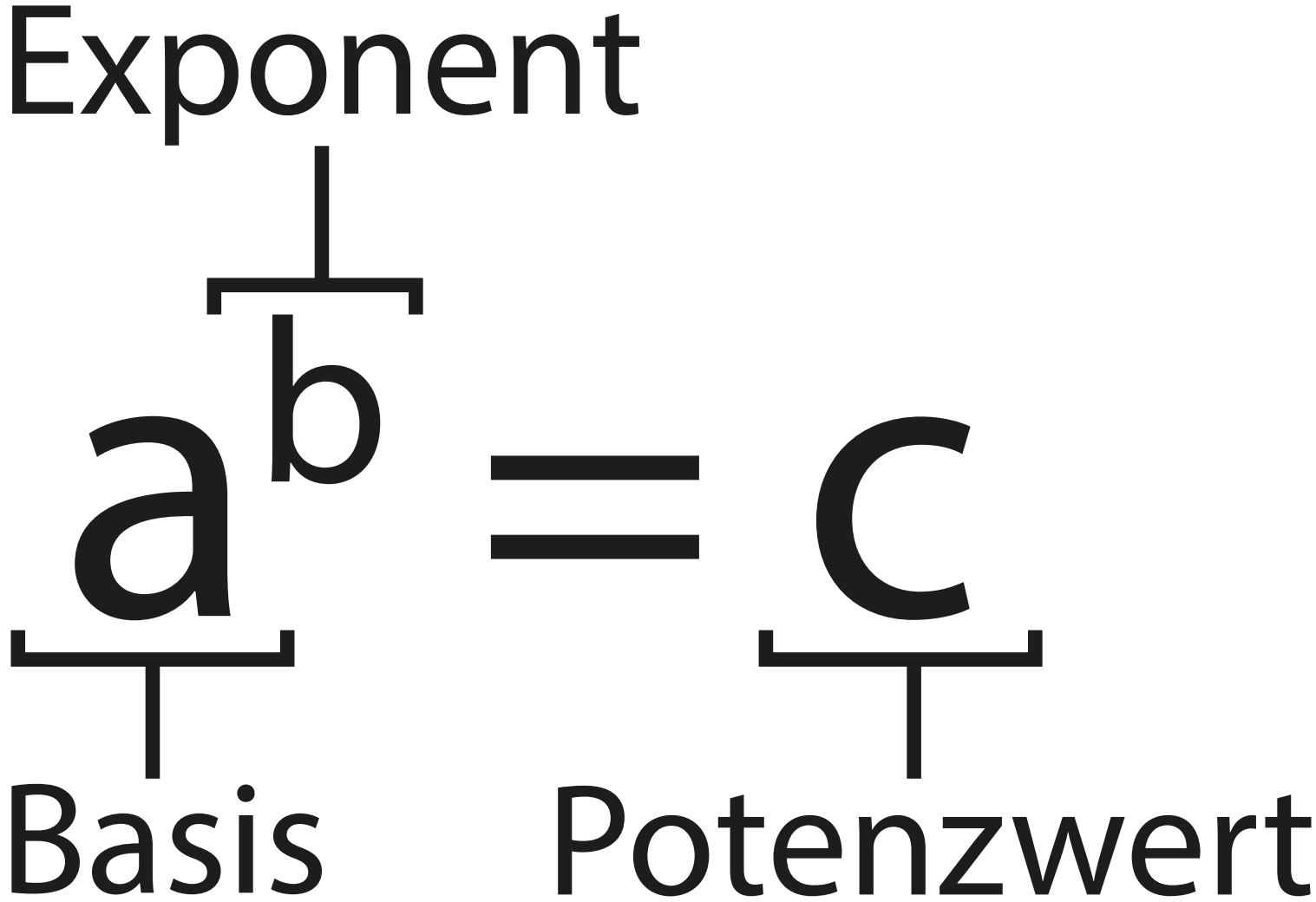
$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$a^b / a^c = a^{b-c}$$

Für Potenzen mit gleichem Exponenten gelten folgende Regeln:

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

$$a^c / b^c = (a / b)^c$$


$$\begin{array}{c} \text{Exponent} \\ | \\ a^b \\ | \\ \text{Basis} \end{array} = \begin{array}{c} c \\ | \\ \text{Potenzwert} \end{array}$$

Potenzrechnen

Berechne bzw. vereinfache die folgenden Potenzen so weit wie möglich!

$$(2^5 \cdot 3^5) / 6^3 =$$

$$\sqrt{(4)^8} \cdot 4^{-2} =$$

$$\sqrt{(a)^{1/7}} \cdot a^{1/2} \cdot (a^4)^{3/28} =$$

$$(a^c \cdot b^c) / \sqrt{(ab)^{2c}} =$$

Regeln für Potenzen

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$a^b / a^c = a^{b-c}$$

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

$$a^c / b^c = (a / b)^c$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

Potenzrechnen

$(2^5 \cdot 3^5) / 6^3$	Dritte Regel aus der Tabelle
$= (2 \cdot 3)^5 / 6^3$	Produkt in Basis Zusammenfassen
$= 6^5 / 6^3$	Vierte Regel aus der Tabelle
$= 6^{5-3}$	Exponent ausrechnen
$= 6^2$	

Regeln für Potenzen

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$a^b / a^c = a^{b-c}$$

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

$$a^c / b^c = (a / b)^c$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

Potenzrechnen

$\sqrt{(4)^8} \cdot 4^{-2}$	Wurzel als hoch 0.5 schreiben
$= (4^8)^{0.5} \cdot 4^{-2}$	Regel für Potenzen von Potenzen
$= 4^{8 \cdot 0.5} \cdot 4^{-2}$	Exponent ausrechnen
$= 4^4 \cdot 4^{-2}$	Erste Regel aus Tabelle
$= 4^2$	

Regeln für Potenzen

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$a^b / a^c = a^{b-c}$$

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

$$a^c / b^c = (a / b)^c$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

Potenzrechnen

$$\sqrt{(a)^{1/7}} \cdot a^{1/2} \cdot (a^4)^{3/28}$$

Wurzel als hoch 0.5 schreiben

$$= (a^{1/7})^{1/2} \cdot a^{1/2} \cdot (a^4)^{3/28}$$

Regel für Potenzen von Potenzen

$$= a^{1/14} \cdot a^{1/2} \cdot a^{3/7}$$

Erste Regel aus Tabelle

$$= a^{1/14 + 1/2 + 3/7}$$

Realisieren, dass Exponent 1 ist

$$= a$$

Regeln für Potenzen

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$a^b / a^c = a^{b-c}$$

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

$$a^c / b^c = (a / b)^c$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

Potenzrechnen

$$\begin{aligned}
 & (a^c \cdot b^c) / \sqrt{(ab)^{2c}} \\
 &= (a^c \cdot b^c) / [(ab)^{2c}]^{0.5} \\
 &= (a^c \cdot b^c) / (ab)^c \\
 &= (ab)^c / (ab)^c \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Wurzel als hoch 0.5 schreiben

Regel für Potenzen von Potenzen

Dritte Regel aus Tabelle

Durch $(ab)^c$ teilen

Gültig für $a, b \neq 0$

Regeln für Potenzen

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$a^b / a^c = a^{b-c}$$

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

$$a^c / b^c = (a / b)^c$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

Binomische Formeln

Multiplizieren wir zwei geklammerte Ausdrücke mit Summen, muss jeder Summand der einen mit jedem Summand der anderen Klammer multipliziert werden:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Die binomischen Formeln erleichtern uns Rechnungen dieser Art in drei besonders gängigen Konstellationen!

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$



Binomische Formeln

Nutze die binomischen Formeln, um die folgenden Ausdrücke auszuklammern!

$$(20a+5b)^2 =$$

$$(5+5x)(10-10x) =$$

$$(a^2+b^2)(a^2-b^2) =$$

$$(a + b - c)(a - b) =$$

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Binomische Formeln

$$(20a+5b)^2$$

Erste binomische Formel

$$= (20a)^2 + 2 \cdot 20a \cdot 5b + (5b)^2$$

Produkte ausrechnen

$$= 400a^2 + 200ab + 25b^2$$

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Binomische Formeln

$(5+5x)(10-10x)$	Klammere rechts 2 aus
$= (5+5x)(5-5x) \cdot 2$	Dritte Binomische Formel
$= [(5)^2 - (5x)^2] \cdot 2$	Quadrate berechnen
$= [25 - 25x^2] \cdot 2$	Distributivgesetz anwenden
$= 50 - 50x^2$	

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Binomische Formeln

$(a^2+b^2)(a^2-b^2)$	Dritte Binomische Formel
$= (a^2)^2 - (b^2)^2$	Regel für Potenzen von Potenzen
$= a^{2 \cdot 2} - b^{2 \cdot 2}$	Exponenten zusammenfassen
$= a^4 - b^4$	

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Binomische Formeln

$(a + b - c)(a - b)$	Produkt -c mit rechter Klammer isolieren
$= (a+b)(a-b) - c(a-b)$	Dritte Binomische Formel
$= a^2 - b^2 - c(a-b)$	Distributivgesetz anwenden
$= a^2 - b^2 - ca + cb$	

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

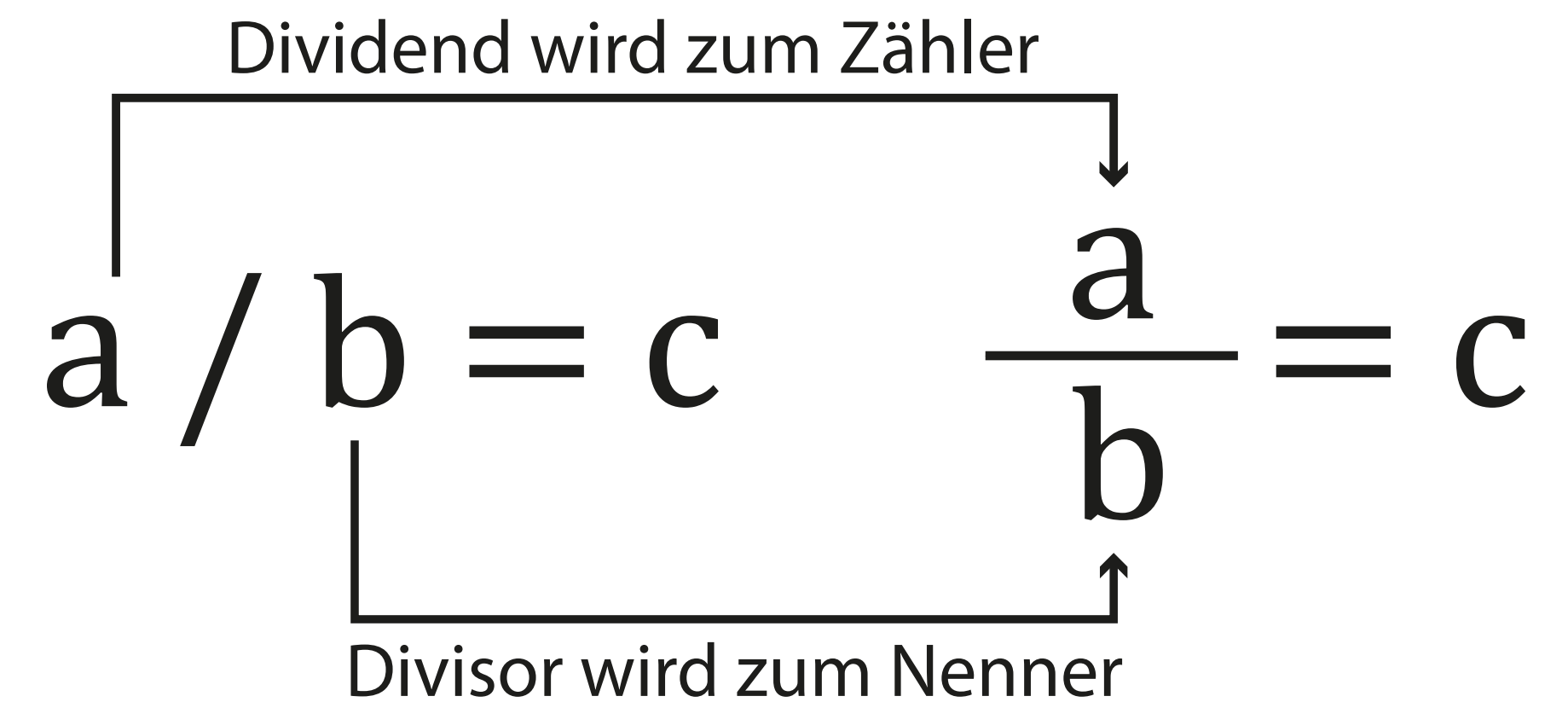
Bruchrechnen

Idee: Wir schreiben die Operanden der Division nicht nebeneinander, sondern untereinander.

$$a / b = c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = c$$

Vorrang: Zähler und Nenner werden getrennt ausgewertet, erst danach wird die Division ausgeführt.

$$\frac{a + b}{c + d} = (a + b) / (c + d)$$



Bruchrechnen

Wir können Brüche kürzen und erweitern, indem wir Zähler und Nenner mit einer Zahl multiplizieren.

$$\frac{60}{16} = \frac{60}{16} \div \frac{4}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\frac{561}{33} = \frac{561}{33} \div \frac{3}{3} = \frac{187}{11}$$

$$\frac{187}{11} = \frac{187}{11} \div \frac{11}{11} = 17$$

Bruchrechnen

Wir können Brüche kürzen und erweitern, indem wir Zähler und Nenner mit einer Zahl multiplizieren.

Enthalten Zähler und/oder Nenner Summen, muss jeder Summand davon multipliziert werden!

$$\frac{64 - 24x}{200} = \frac{64 - 24x}{200} \cdot \frac{8}{8} = \frac{8 - 3x}{25}$$

$$\frac{64 - 24x}{16x + 4} = \frac{64 - 24x}{16x + 4} \cdot \frac{4}{4} = \frac{16 - 6x}{4x + 1}$$

$$\frac{15x^3 + 3x}{x^2 + x^4} = \frac{15x^3 + 3x}{x^2 + x^4} \cdot \frac{x}{x} = \frac{15x^2 + 3}{x + x^3}$$

Bruchrechnen

Die ausführliche Schreibweise dient dabei nur der Veranschaulichung!

$$\frac{64 - 24x}{200} = \frac{8 - 3x}{25}$$

Die Variante rechts ist völlig ausreichend.

$$\frac{64 - 24x}{16x + 4} = \frac{16 - 6x}{4x + 1}$$

$$\frac{15x^{\cancel{3}^2} + \cancel{3x}}{x^{\cancel{2}} + x^{\cancel{4}^3}} = \frac{15x^2 + 3}{x + x^3}$$

Bruchrechnen

Bei der Multiplikation und Division von Brüchen mit anderen Termen können wir diese einfach zu einem Bruch umschreiben.

Danach können wir das Distributivgesetz anwenden!

Multiplikation wirkt auf alle mit
+/- verbundenen Terme

$$2y \frac{15x + 3}{x^2} = \frac{2y}{1} \frac{15x + 3}{x^2} = \frac{30xy + 6y}{x^2}$$

Entspricht Bruch mit Nenner 1

$$\frac{15x + 3}{x^2 - 4} / 2y = \frac{1}{2y} \frac{15x + 3}{x^2 - 4} = \frac{15x + 3}{2x^2y - 8y}$$

Bei einer Division eines Bruches durch einen Term
kann man diesen als 1/Term schreiben

Bruchrechnen

Wir können Brüche mit einer Summe im Zähler in einzelne Brüche aufteilen:

Die Zähler der einzelnen Brüche sind die Summanden.

Der Nenner der einzelnen Brüche ist der originale Nenner.

Mit +/- verbundene Terme im Zähler trennen

$$\frac{15x + 3}{x^2} = \frac{15x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \quad \checkmark$$

Mit +/- verbundene Terme im Nenner trennen

$$\frac{x^2}{15x + 3} = \frac{x^2}{15x} + \frac{x^2}{3} \quad \times$$

Bruchrechnen

Zähler und Nenner können ihrerseits Brüche sein. Um diese zu berechnen, reichen die bisher bekannten Rechenregeln.

Wir müssen allerdings aufpassen, dass der Hauptbruchstich klar erkennbar ist, da dieser die Reihenfolge der Divisionen bestimmt.

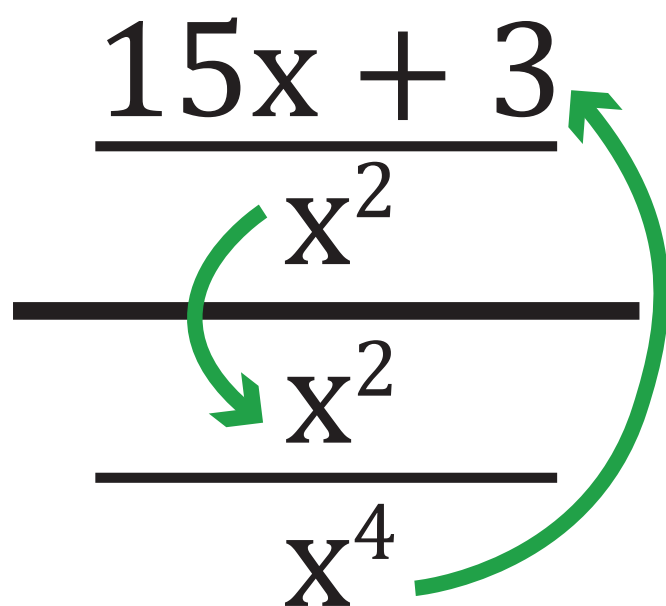
$$\frac{a}{\frac{1}{x}} \overset{\text{Bruch als Division}}{=} a / (1/x) \overset{\text{Division --> Multiplikation mit inversem Element}}{=} a / (x)^{-1} \overset{\text{Bruch --> Negative Potenz}}{=} a \cdot x$$

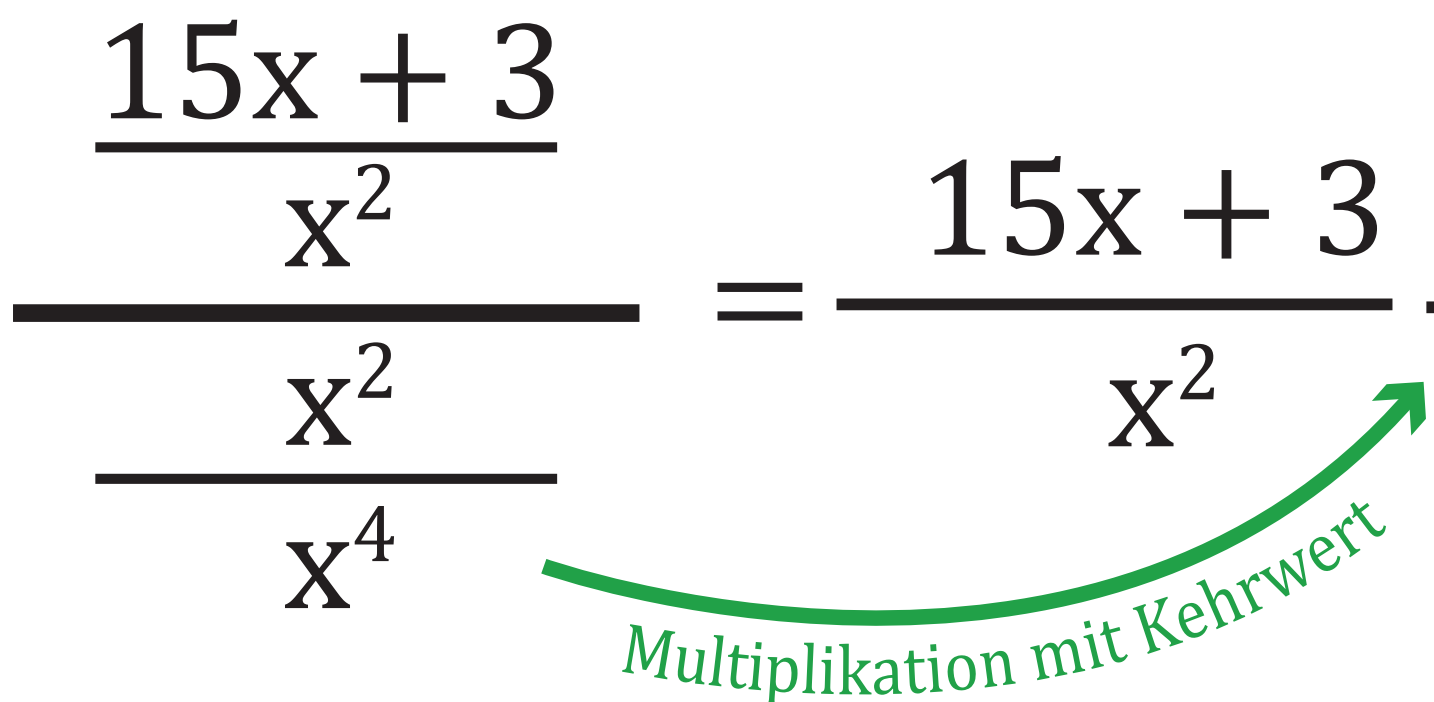
$$\frac{\frac{1}{x}}{a} = \frac{1}{ax} \qquad \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}} = \frac{a}{x}$$

Bruchrechnen

Doppelbrüche sehen verwirrend aus, lassen sich jedoch einfach zu normalen Brüchen umformen:

- Nenner des Zählers in den Nenner und Nenner des Nenners in den Zähler
- Multiplikation des Zählerbruchs mit dem Kehrwert des Nennerbruchs

$$\frac{\frac{15x + 3}{x^2}}{x^4} = \frac{(15x + 3)x^4}{x^2 x^2} = 15x + 3$$


$$\frac{\frac{15x + 3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^4}} = \frac{15x + 3}{x^2} \cdot \frac{x^4}{x^2} = 15x + 3$$


Multiplikation mit Kehrwert

Bruchrechnen

$$\frac{93}{21} + \frac{8}{14} =$$

$$\frac{21 + 6x}{21x} + \frac{5}{7} =$$

$$\frac{18x^3 - 4x}{6x} + \frac{\frac{2}{3}xyz - yz}{xyz} =$$

Bruchrechnen

$\frac{93}{21} + \frac{8}{14}$	Wir wollen die Brüche auf gleiche Nenner bringen
$= \frac{93}{21} + \frac{4}{7}$	Schritt 1: Kürze rechten Bruch mit 2
$= \frac{93}{21} + \frac{12}{21}$	Schritt 2: Erweitere rechten Bruch mit 3
$= \frac{105}{21}$	Addiere die beiden Brüche
$= 5$	Kürze mit 21

Bruchrechnen

$$\begin{aligned} & \frac{21 + 6x}{21x} + \frac{5}{7} \\ &= \frac{21 + 6x}{21x} + \frac{15x}{21x} \\ &= \frac{21 + 6x + 15x}{21x} \\ &= \frac{21 + 21x}{21x} \\ &= \frac{1 + x}{x} \end{aligned}$$

Ziel: gemeinsamer Nenner! Erweitere rechten Bruch mit 3x

Schreibe Summe als ein Bruch

Fasse die Terme mit x im Zähler zsm.

Kürze mit 21

Bruchrechnen

$$\frac{18x^3 - 4x}{6x} + \frac{\frac{2}{3}xyz - yz}{xyz}$$

Klammere rechts yz aus

$$= \frac{18x^3 - 4x}{6x} + \frac{yz(\frac{2}{3}x - 1)}{xyz}$$

Kürze links 2 und rechts yz

$$= \frac{9x^3 - 2x}{3x} + \frac{\frac{2}{3}x - 1}{x}$$

Erweitere rechts mit 3

$$= \frac{9x^3 - 2x}{3x} + \frac{2x - 3}{3x}$$

Schreibe als ein Bruch

$$= \frac{9x^3 - 2x + 2x - 3}{3x}$$

Terme -2x und 2x heben sich auf

$$= \frac{3x^3 - 1}{x}$$

Prozentrechnen

Prozent bedeutet übersetzt "von 100" und ist mathematisch nichts anderes als ein Bruch $1/100$

Promille bedeutet übersetzt "von 1000" und ist mathematisch nichts anderes als ein Bruch $1/1000$

$$\% = \frac{1}{100} \quad \text{‰} = \frac{1}{1000}$$



Partei	Ergebnis	(Letztes)	GuV
Dunkelrot	4.9 %	9.2 %	-4.3 ppt.
Rot	25.7 %	20.5 %	+5.2 ppt.
Schwarz	24.1 %	32.9 %	-8.8 ppt.
Grün	14.8 %	8.9 %	+6.1 ppt.
Gelb	11.5 %	10.7 %	+0.8 ppt.
Blau	10.3 %	12.6 %	-2.3 ppt.

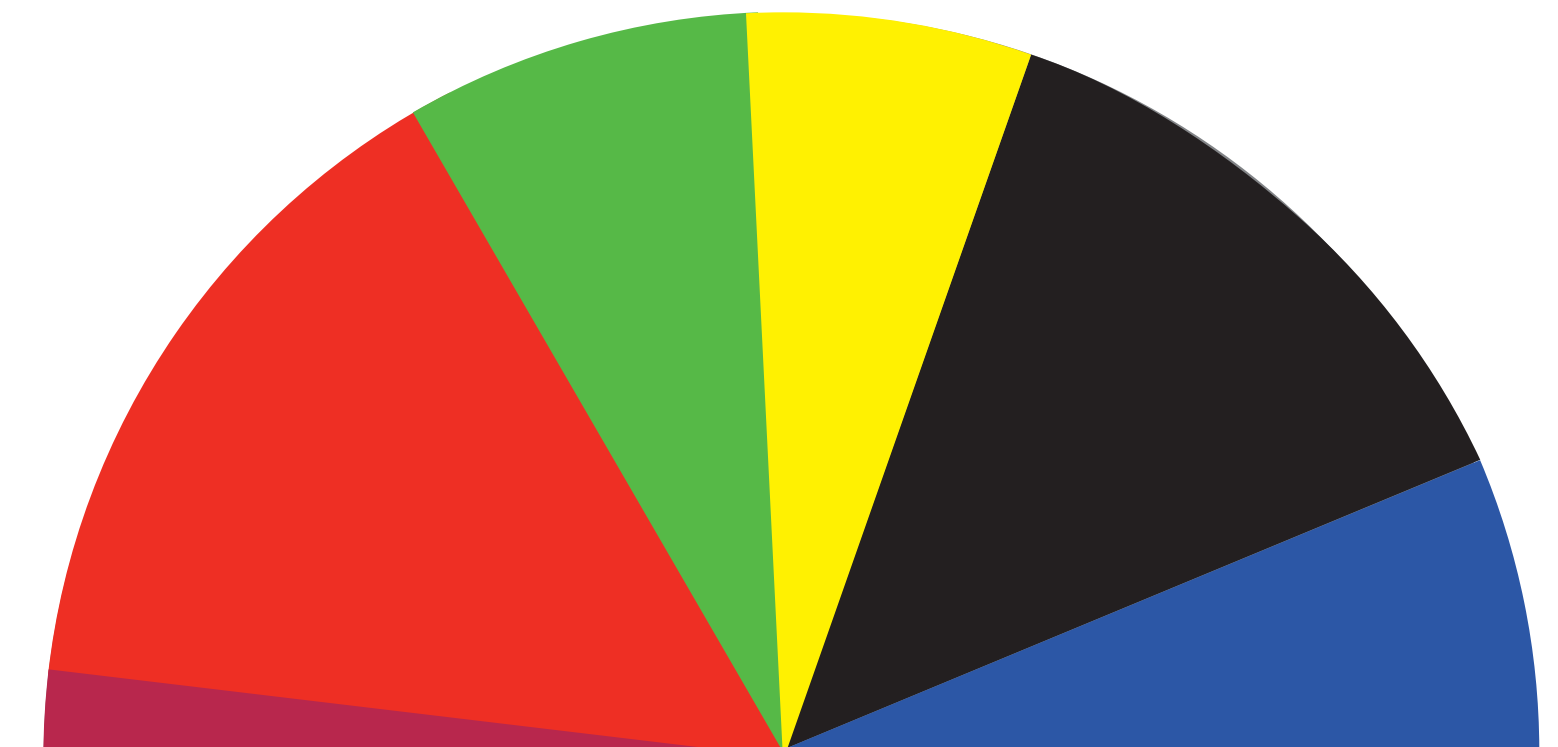


Prozentrechnen

Beispiel Bei der rechts gezeigten Wahl haben 2400 Menschen ihre Stimme abgegeben.

Um zu berechnen wie viele Stimmen die gelbe Partei bekommen hat, rechnen wir:

$$\begin{aligned} 2400 \cdot 11.5\% &= 2400 \cdot 11.5 \frac{1}{100} \\ &= 2400 \cdot 0.115 \\ &= 276 \end{aligned}$$



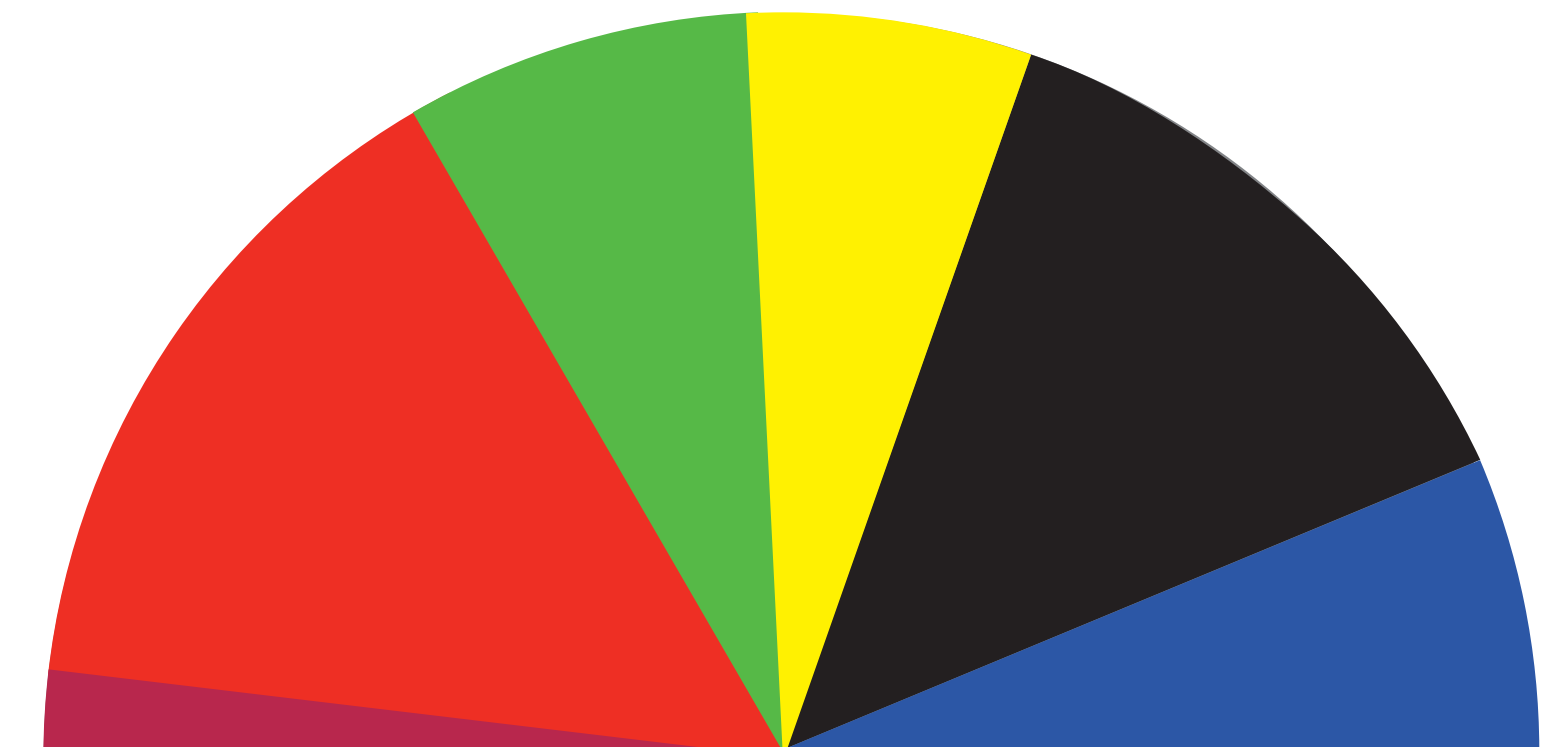
Partei	Ergebnis	(Letztes)	GuV
Dunkelrot	4.9 %	9.2 %	-4.3 ppt.
Rot	25.7 %	20.5 %	+5.2 ppt.
Schwarz	24.1 %	32.9 %	-8.8 ppt.
Grün	14.8 %	8.9 %	+6.1 ppt.
Gelb	11.5 %	10.7 %	+0.8 ppt.
Blau	10.3 %	12.6 %	-2.3 ppt.

Prozentrechnen

Vorsicht bei der Multiplikation von Prozentwerten! Aus der Multiplikation zweier Prozentzeichen entsteht z. B. 1/10000

Wie viele Stimmen hat die gelbe Partei von Frauen bekommen, wenn sie 50% ihrer Stimmen von Frauen bekommen hat?

$$\begin{aligned}
 2400 \cdot 11.5\% \cdot 50.0\% &= 2400 \cdot 11.5 \frac{1}{100} \cdot 50.0 \frac{1}{100} \\
 &= 2400 \cdot 575 \frac{1}{10000} \\
 &= 138
 \end{aligned}$$



Partei	Ergebnis	(Letztes)	GuV
Dunkelrot	4.9 %	9.2 %	-4.3 ppt.
Rot	25.7 %	20.5 %	+5.2 ppt.
Schwarz	24.1 %	32.9 %	-8.8 ppt.
Grün	14.8 %	8.9 %	+6.1 ppt.
Gelb	11.5 %	10.7 %	+0.8 ppt.
Blau	10.3 %	12.6 %	-2.3 ppt.

Prozentrechnen

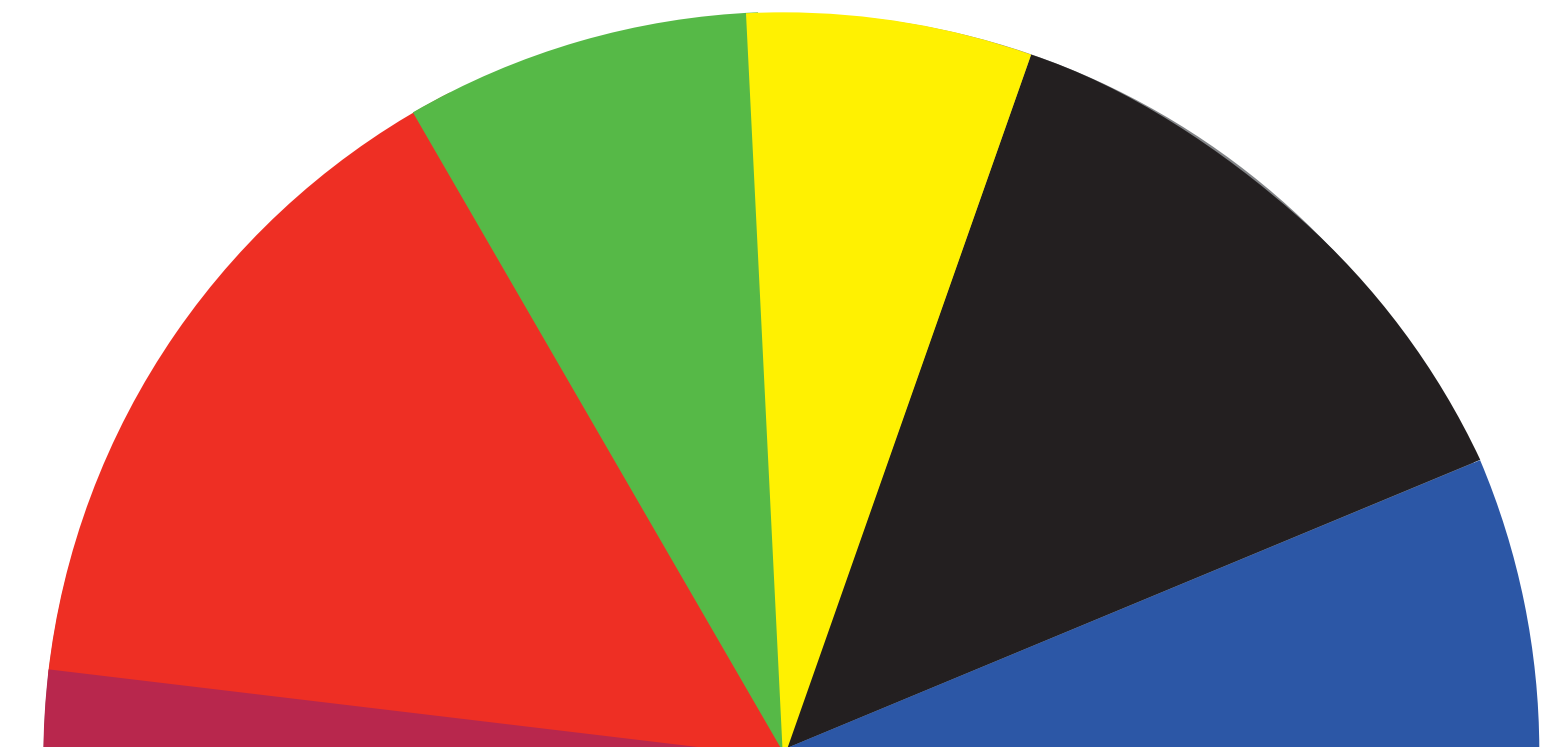
Theoretisch könnten wir auch folgendes schreiben:

$$2400 \cdot 11.5\% \cdot 50.0\% = 2400 \cdot 575\%^2 = 138$$

Die Schreibweise mit Prozent hoch 2 ist aber absolut unüblich!
 Am besten verwenden wir die Dezimalschreibweise ...

$$2400 \cdot 11.5\% \cdot 50.0\% = 2400 \cdot 0.115 \cdot 0.500$$

$$= 138$$



Partei	Ergebnis	(Letztes)	GuV
Dunkelrot	4.9 %	9.2 %	-4.3 ppt.
Rot	25.7 %	20.5 %	+5.2 ppt.
Schwarz	24.1 %	32.9 %	-8.8 ppt.
Grün	14.8 %	8.9 %	+6.1 ppt.
Gelb	11.5 %	10.7 %	+0.8 ppt.
Blau	10.3 %	12.6 %	-2.3 ppt.

Prozentrechnen

Bei Änderungen von Prozentwerten müssen wir zwischen Prozent und **Prozentpunkten** unterscheiden:

Die gelbe Partei hat sich von 10.7% auf 11.5% gesteigert. Das ist ein Zugewinn um 0.8 Prozentpunkte!

Diese 0.8 Prozentpunkte entsprechen einer Steigerung von:

$$\frac{11.5\%}{10.7\%} - 1 = \frac{11.5}{10.7} - 1 = 0.074 = 7.4\%$$



Partei	Ergebnis	(Letztes)	GuV
Dunkelrot	4.9 %	9.2 %	-4.3 ppt.
Rot	25.7 %	20.5 %	+5.2 ppt.
Schwarz	24.1 %	32.9 %	-8.8 ppt.
Grün	14.8 %	8.9 %	+6.1 ppt.
Gelb	11.5 %	10.7 %	+0.8 ppt.
Blau	10.3 %	12.6 %	-2.3 ppt.

Prozentrechnen

Milch mit 1.5% Fettanteil enthält 2 Prozentpunkte weniger Fett als Milch mit 3.5% Fettanteil.

Milch 1.5% Fettanteil enthält 57.1% weniger Fett als Milch mit 3.5% Fettanteil.

$$\frac{1.5\%}{3.5\%} - 1 = \frac{1.5}{3.5} - 1 = -0.571 = -57.1\%$$



Prozentrechnen

Bei Änderungen von Absolutwerten müssen wir diese Unterscheidung nicht vornehmen. Hier verwenden wir immer folgende Formel für die Wachstumsrate:

$$\frac{\text{Neuer Wert}}{\text{Alter Wert}} - 1$$

Beispiel: Eine Brezel kostet 90ct statt 80ct. Um wie viel Prozent ist der Preis gestiegen?

$$\frac{90}{80} - 1 = 0.125 = 12.5\%$$



Prozentrechnen

Berechne die Änderung in Prozent und Prozentpunkten!

Im Jahr 2022 wurden 49.6% des deutschen Stroms erneuerbar produziert. Im Vorjahr waren es 45.6%

Das Auftaktspiel der Nationalmannschaft hatte bei der WM2022 einen Marktanteil von 59.7%. Bei der WM2018 waren es 81.3%

Prozentrechnen

Berechne die Änderung in Prozent und Prozentpunkten!

Im Jahr 2022 wurden 49.6% des deutschen Stroms erneuerbar produziert. Im Vorjahr waren es 45.6%

Das Auftaktspiel der Nationalmannschaft hatte bei der WM2022 einen Marktanteil von 59.7%. Bei der WM2018 waren es 81.3%

$$49.6\% - 45.6\% = 4.0 \text{ Prozentpunkte}$$

$$\frac{49.6\%}{45.6\%} - 1 = 8.77\%$$

$$59.7\% - 81.3\% = -21.6 \text{ Prozentpunkte}$$

$$\frac{59.7\%}{81.3\%} - 1 = -26.57\%$$

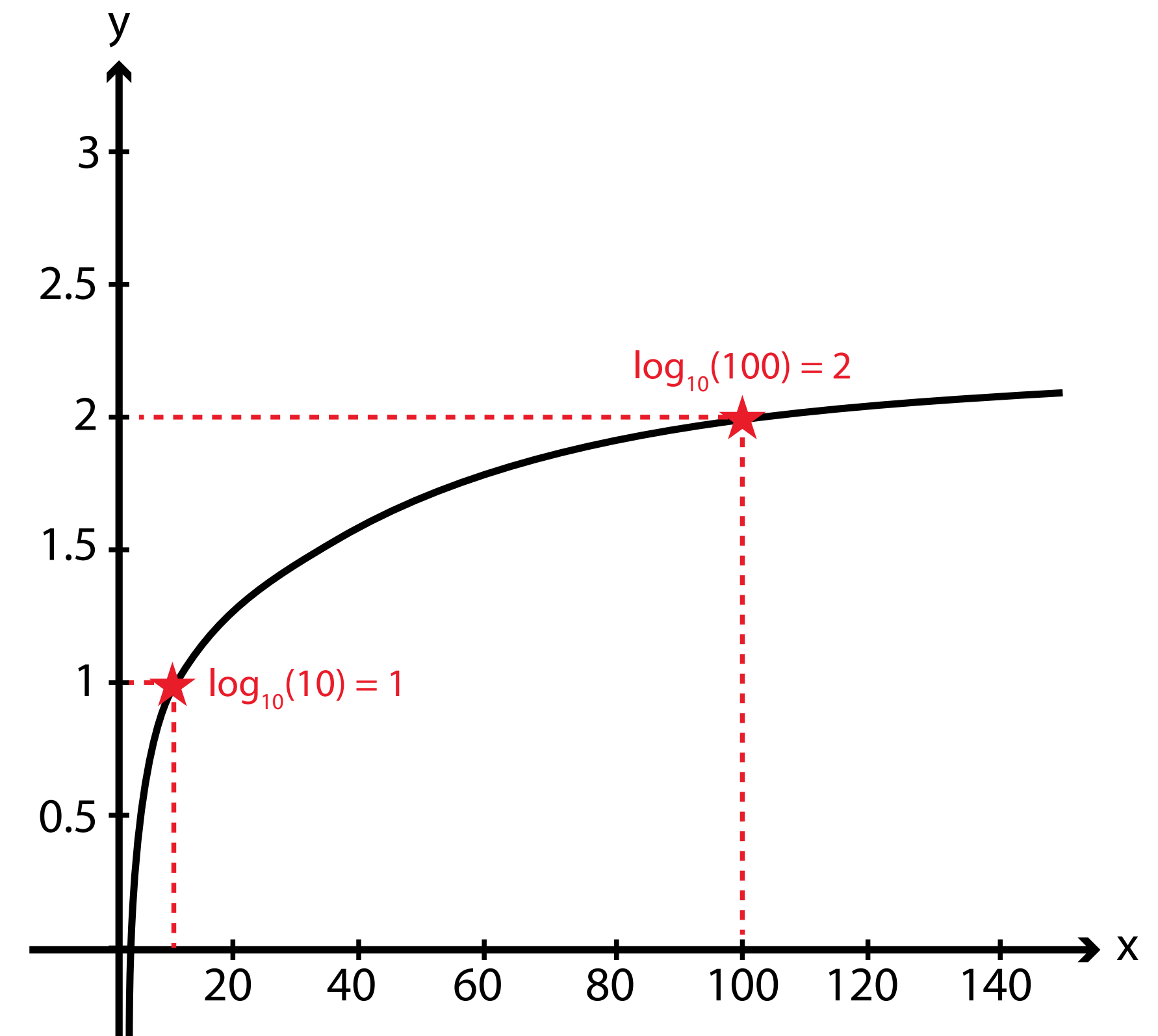
Logarithmus

Idee: Lösung einer Potenzgleichung bei dem der Exponent gesucht wird, d. h.:

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a(c) = b$$

Basis: Wird keine Basis angegeben, wird oft $a=10$ angenommen, aber nicht immer ...

$$10^b = c \Leftrightarrow \log(c) = b$$



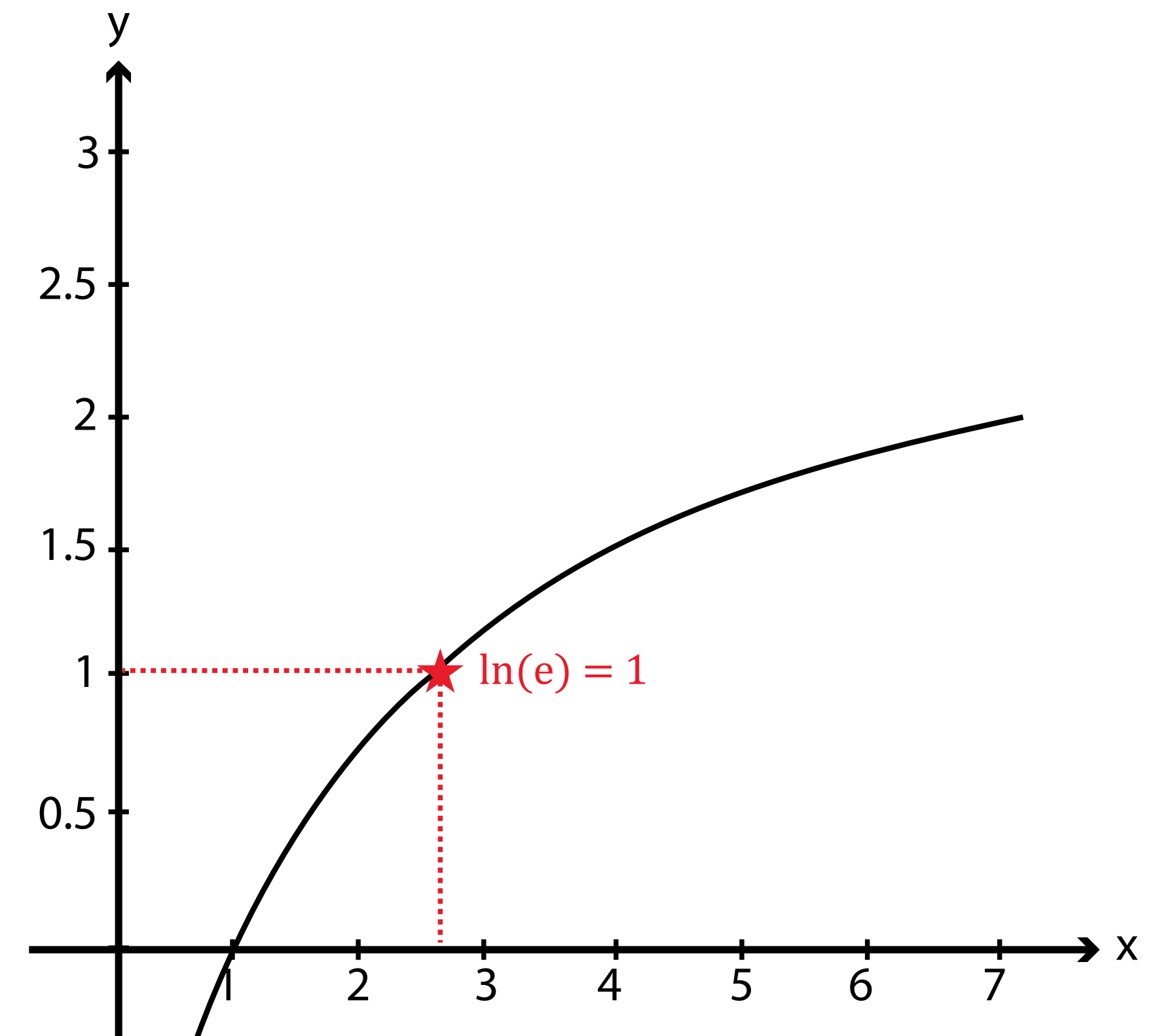
Logarithmus

Natürlicher Logarithmus: Der Operator $\ln(\dots)$ ist die Abkürzung von "Logarithmus naturalis" und hat immer die Basis e .

$$e^b = c \Leftrightarrow \ln_e(c) = b$$

Eulersche Zahl: Die Eulersche Zahl e ist eine nicht-rationale Zahl, die in der Analysis und der Statistik eine besondere Bedeutung haben wird.

$$e \approx 2.71828$$



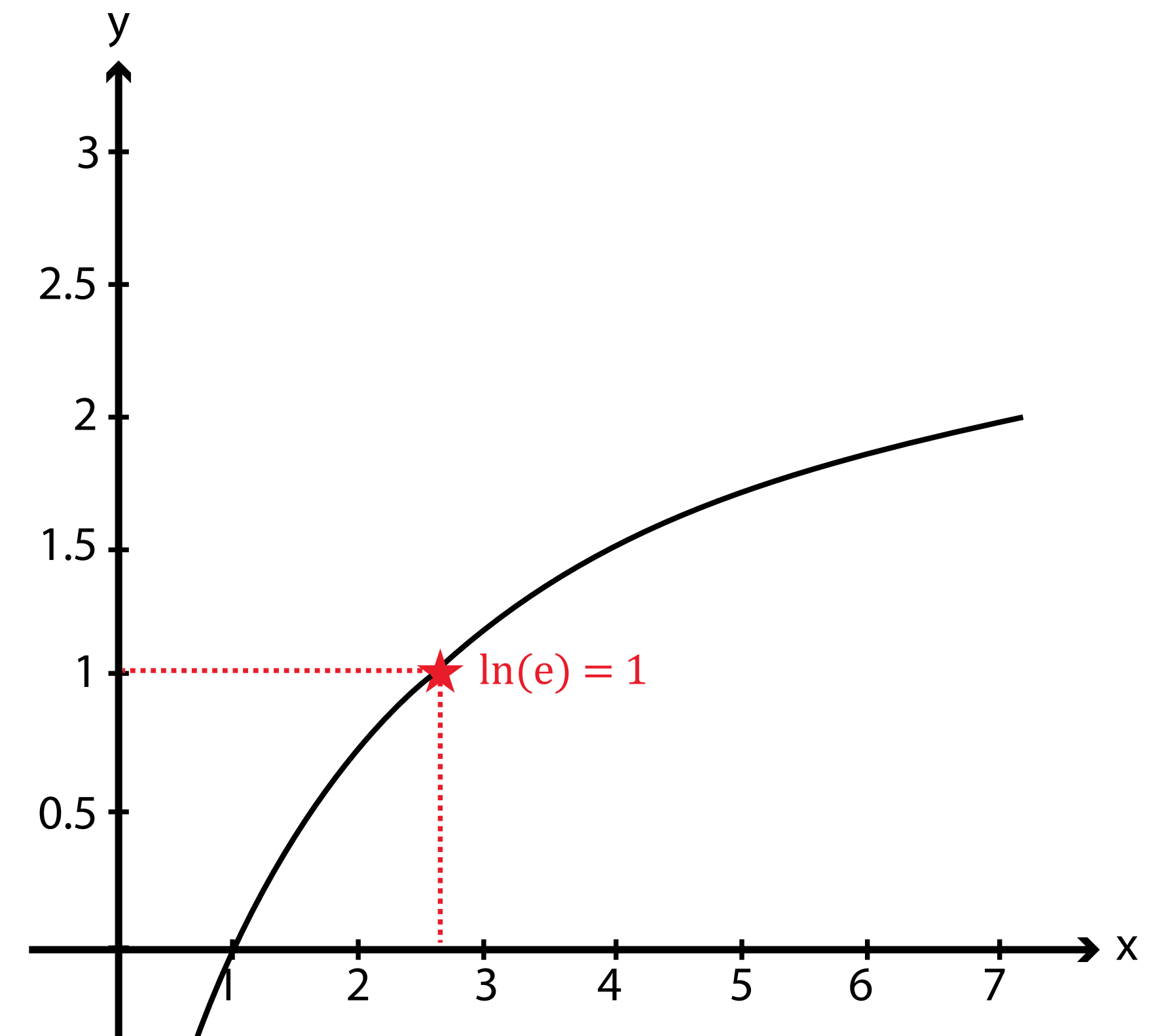
Logarithmus

Nullstelle: Unabhängig von der Basis a hat der Logarithmus eine Nullstelle bei 1, da:

$$a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Negativer Bereich: Unabhängig von der Basis a ist der Logarithmus weder für die 0 noch für den negativen Bereich definiert, da unsere Potenzgleichung für $c \leq 0$ keine reelle Lösung besitzt:

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a(c) = b$$



Logarithmus

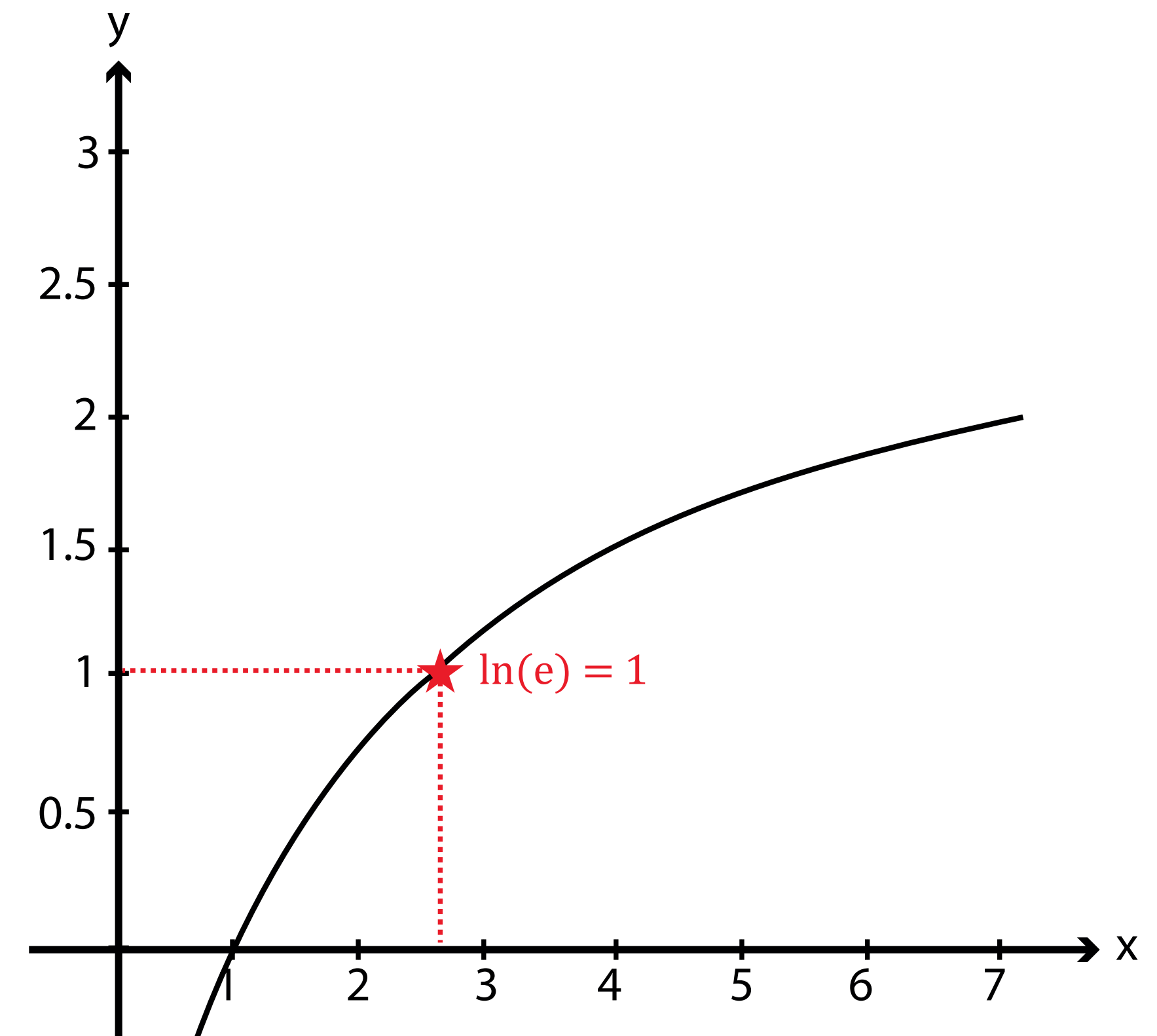
Für Logarithmen aus Produkten gelten folgende Rechenregeln:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

Für Logarithmen aus Potenzen gilt:

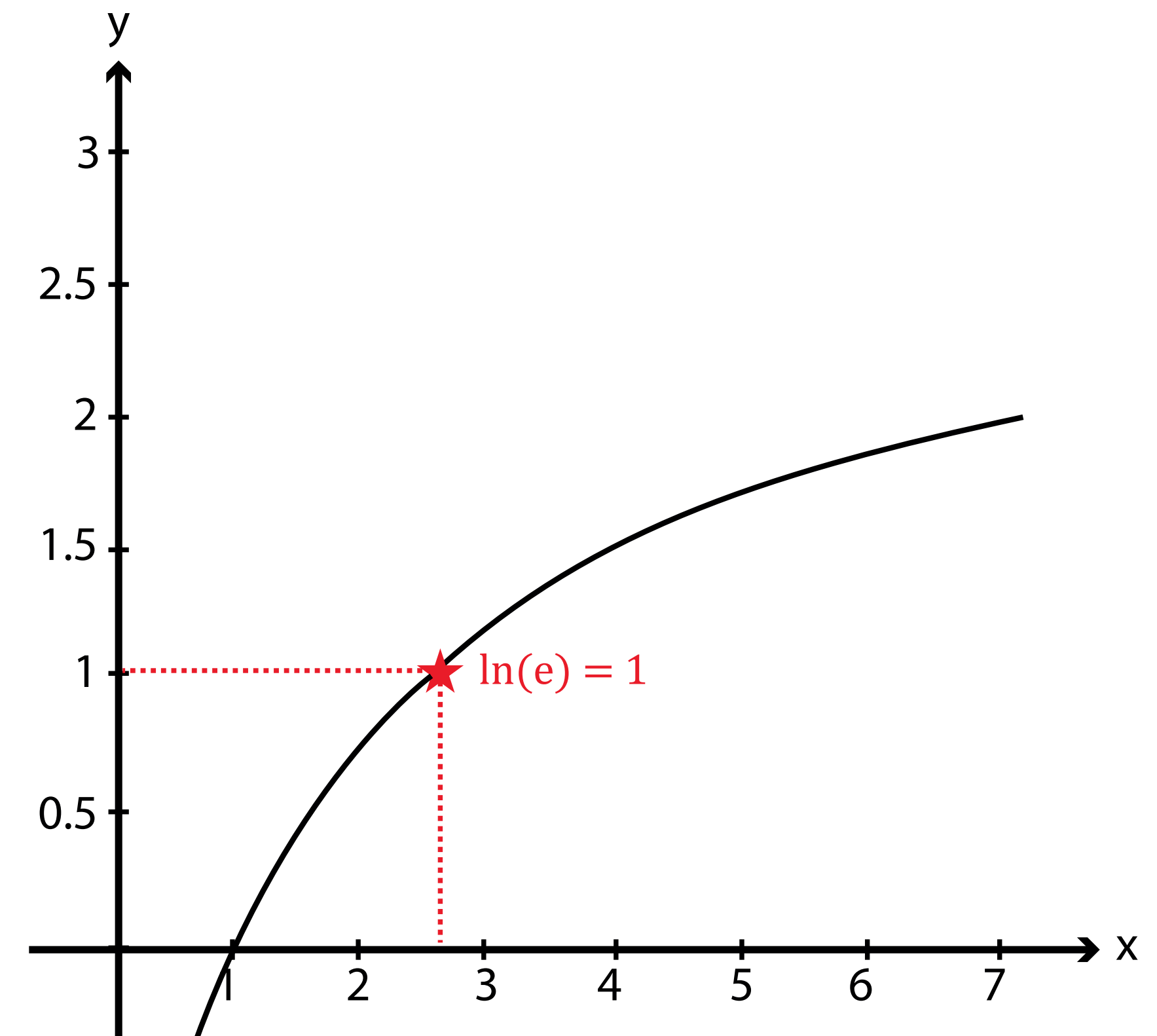
$$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$$



Logarithmus

Um den Logarithmus einer Basis a auf eine andere Basis b umzurechnen verwenden wir:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$



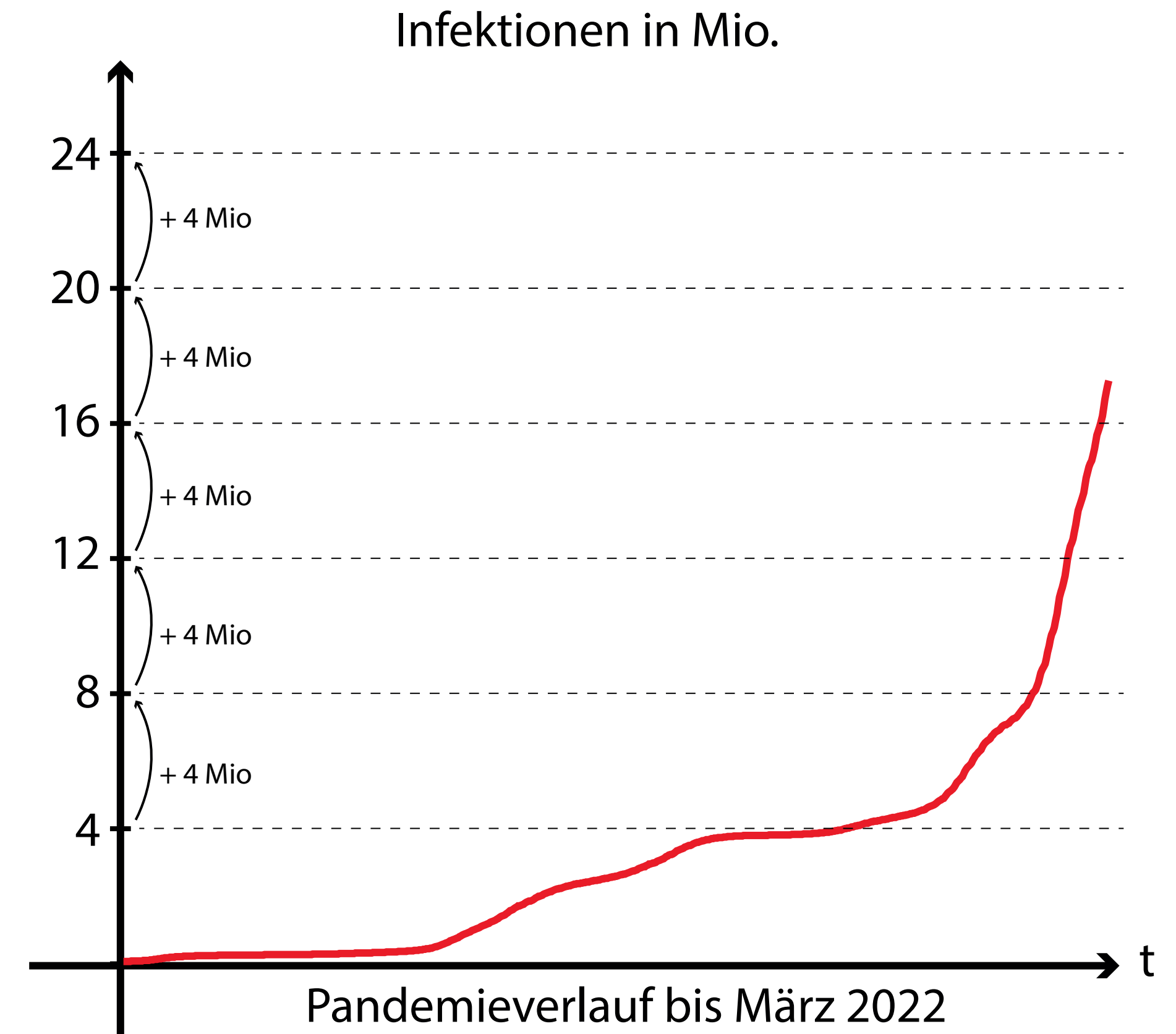
Logarithmus

Logarithmische Skalen Mit dem Konzept des Logarithmus verwandt sind die sogenannten logarithmischen Skalen.

Das Schaubild rechts zeigt den Pandemieverlauf in Deutschland in einer linearen Skala.

Jedes Mal wenn wir einen "Strich" nach oben gehen, erhöht sich der y-Wert um einen bestimmten Wert - hier 4 Millionen.

Nachteil Es sieht so aus, als wäre im ersten Jahr nichts passiert.

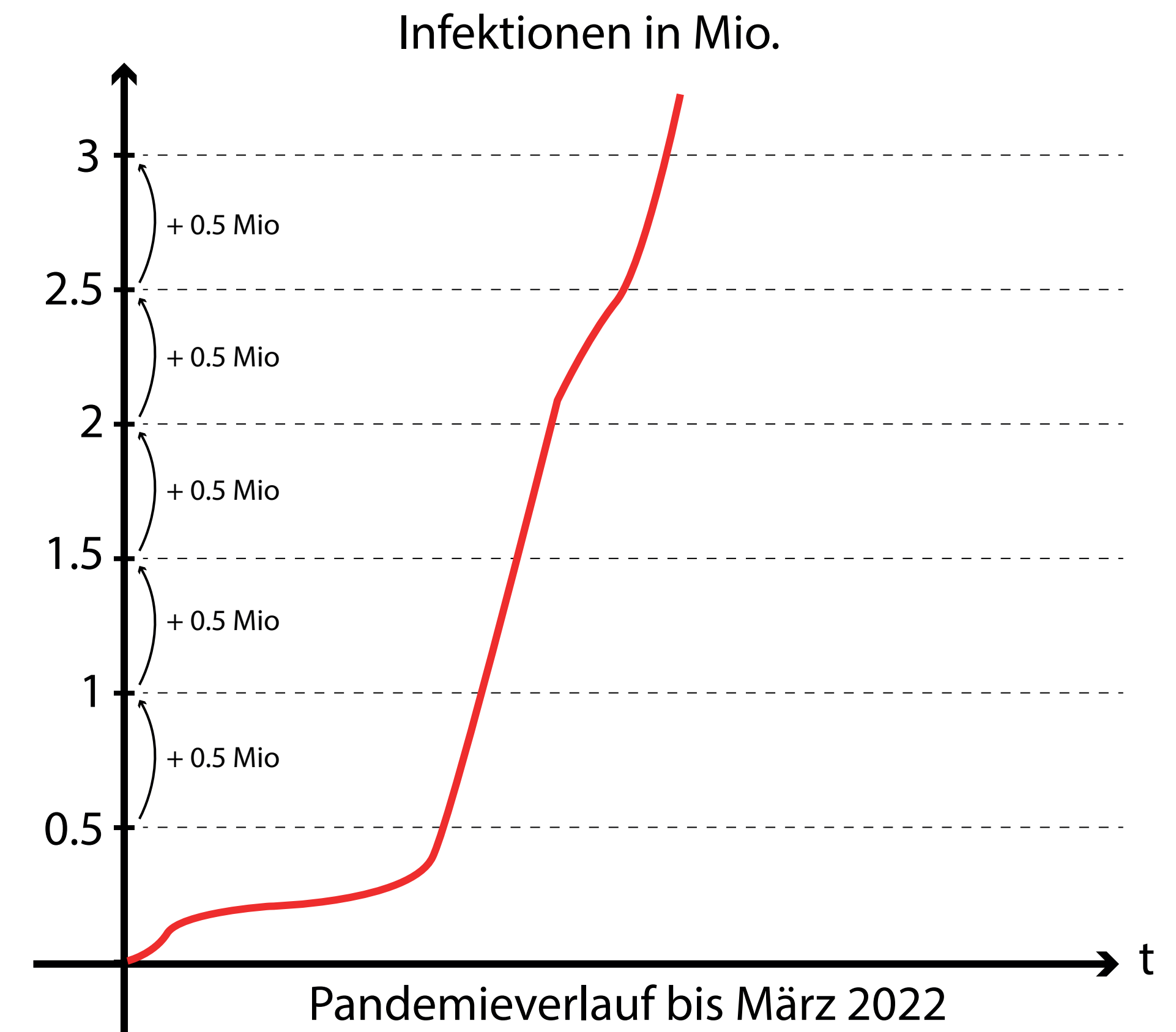


Logarithmus

Das Schaubild rechts zeigt den Pandemieverlauf in Deutschland in einer linearen Skala.

Jedes Mal wenn wir einen "Strich" nach oben gehen, erhöht sich der y-Wert um einen bestimmten Wert - hier 4 Millionen.

Skalieren Hilft auch nicht immer weiter. Jetzt sieht man den Anfang besser, aber dafür den Effekt der Omikronvariante nicht mehr.

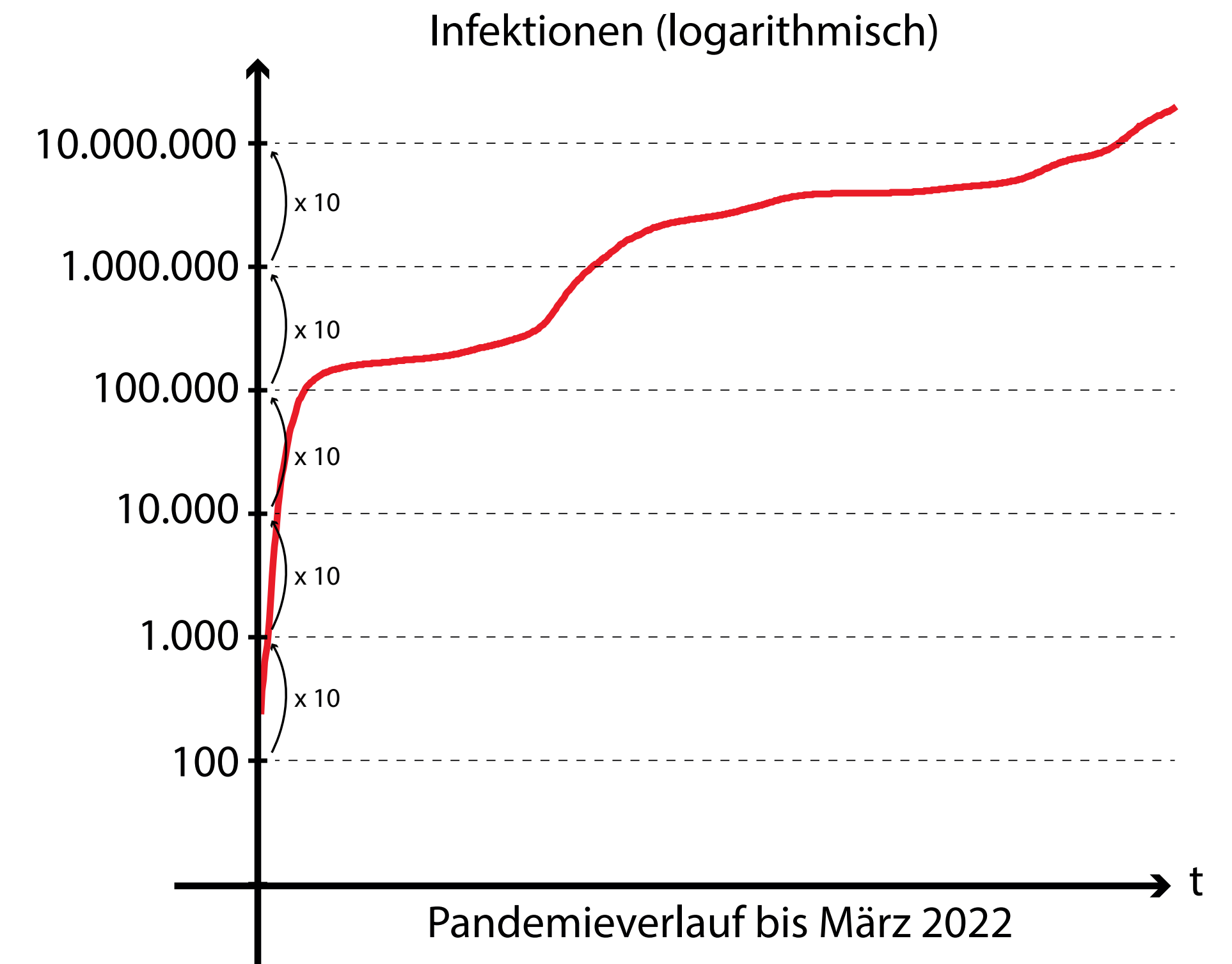


Logarithmus

Das Schaubild rechts zeigt den Pandemieverlauf in Deutschland in einer logarithmischen Skala.

Jedes Mal wenn wir einen "Strich" nach oben gehen, wird unser y-Wert mit einem Faktor (hier 10) multipliziert.

Logarithmische Skalen werden häufig mit der Basis 10, 2 oder e verwendet.



Logarithmus

$$\log_{10}(25) + \log_{10}(4) =$$

$$0.5 \log_{10}(16) + 2 \log_{10}(5) =$$

$$\ln(5x) + \ln(3) + \ln(225x^2) =$$

$$\ln(x^2 + 2xy + y^2) - \ln(x+y) =$$

$$\frac{\ln(8)}{\ln(5)} + \log_5(10) =$$

Logarithmus

$\log_{10}(25) + \log_{10}(4)$	Summe zweier Logarithmen zur gleichen Basis...
$= \log_{10}(25 \cdot 4)$	Zusammenziehen & Argumente multiplizieren
$= \log_{10}(100)$	10 hoch was gibt 100
$= 2$	Ergebnis

Logarithmen

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$$

$$\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$$

Logarithmus

$$0.5 \log_{10}(16) + 2 \log_{10}(5)$$

$$= \log_{10}(16^{0.5}) + \log_{10}(5^2)$$

$$= \log_{10}(4) + \log_{10}(25)$$

$$= \log_{10}(25 \cdot 4)$$

$$= \log_{10}(100)$$

$$= 2$$

Vorfaktoren in Log als Exponent reinziehen

Erinnerung: hoch 0.5 entspricht Wurzel

Kommt einem bekannt vielleicht vor...

Erste Regel aus Tabelle anwenden

10 hoch was gibt 100

Ergebnis

Logarithmen

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$$

$$\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$$

Logarithmus

$\ln(5x) + \ln(3) + \ln(225x^2)$	Die ersten beiden $\ln()$ zusammenfassen
$= \ln(15x) + \ln(225x^2)$	Der rechte $\ln()$ sieht verdächtig aus
$= \ln(15x) + \ln([15x]^2)$	Exponent aus dem rechten $\ln()$ rausziehen
$= \ln(15x) + 2 \ln(15x)$	$\ln()$ addieren
$= 3 \ln(15x)$	

Logarithmen

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$$

$$\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$$

Logarithmus

$$\begin{aligned} & \ln(5x) + \ln(3) + \ln(225x^2) && \text{Alternative: alle } \ln() \text{ zusammenfassen} \\ &= \ln(3375x^3) && \text{Faktor } 15x \text{ erkennen} \\ &= \ln([15x]^3) && \text{Exponent aus dem } \ln() \text{ rausziehen} \\ &= 3 \ln(15x) \end{aligned}$$

Logarithmen

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$$

$$\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$$

Logarithmus

$$\begin{aligned}
 & \ln(x^2 + 2xy + y^2) - \ln(x+y) && \text{Links steht die 1. binomische Formel} \\
 &= \ln([x+y]^2) - \ln(x+y) && \text{Exponent aus dem linken ln() rausziehen} \\
 &= 2 \ln(x+y) - \ln(x+y) && \ln() \text{ abziehen} \\
 &= \ln(x+y)
 \end{aligned}$$

Logarithmen

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$$

$$\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$$

Logarithmus

$$\frac{\ln(8)}{\ln(5)} + \log_5(10)$$

$$= \frac{\ln(8)}{\ln(5)} + \frac{\ln(10)}{\ln(5)}$$

$$= \frac{\ln(8) + \ln(10)}{\ln(5)}$$

$$= \frac{\ln(80)}{\ln(5)}$$

Den 5er log in einen ln umrechnen

Brüche zusammenfassen

Die ln() im Zähler zusammenziehen

Logarithmen

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$$

$$\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$$

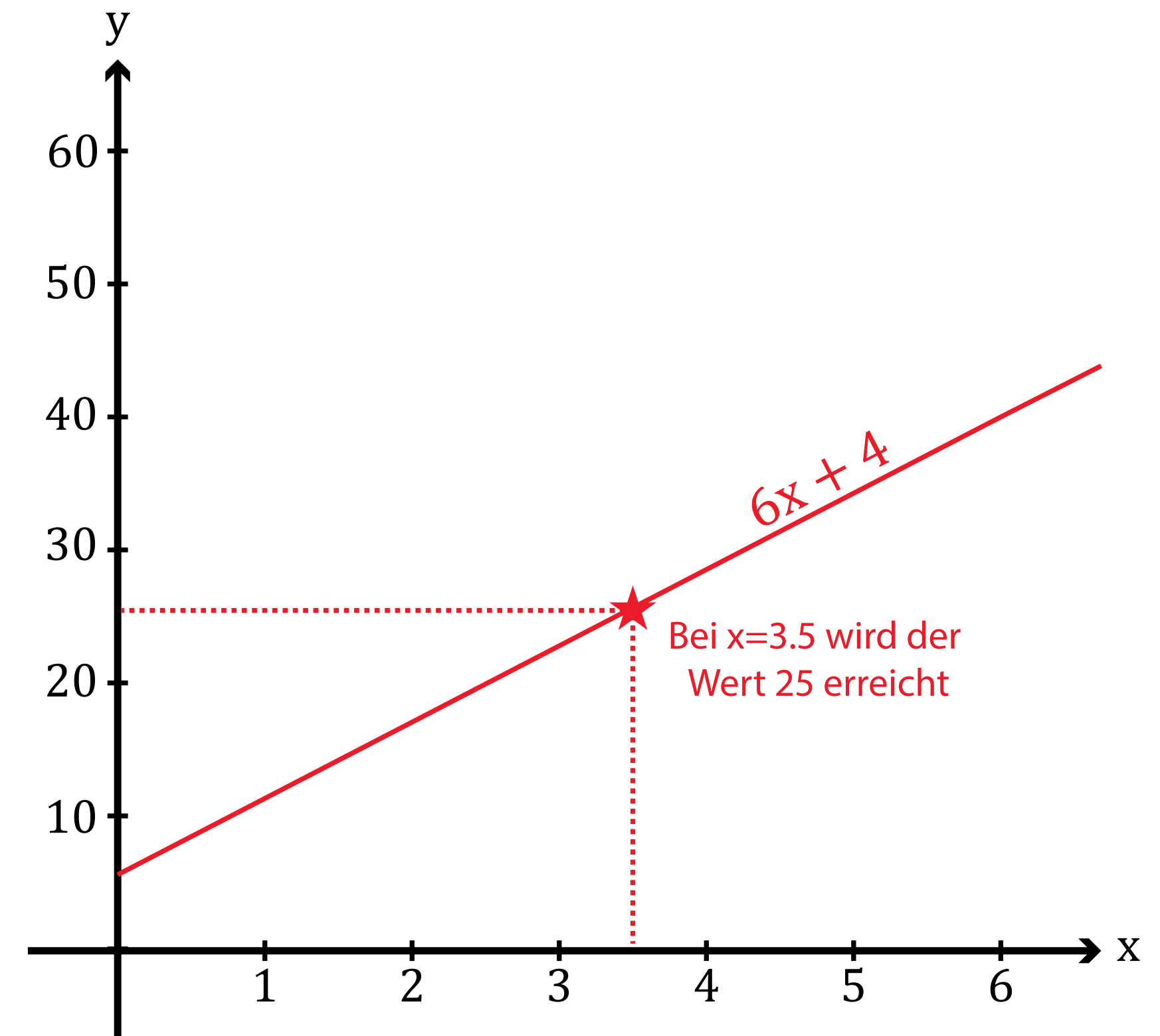
Gleichungen umformen

Sowohl in Mathematik als auch in BWL und VWL begegnen uns Gleichungen verschiedener Art.

Das Basiswerkzeug zum Lösen von Gleichungen sind Äquivalenzumformungen bei denen wir auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Rechnung ausführen.

Beispiel: Wir suchen ein x , das folgende Gleichung erfüllt:

$$6x + 4 = 25$$



Gleichungen umformen

Beispiel: Wir suchen ein x , das folgende Gleichung erfüllt:

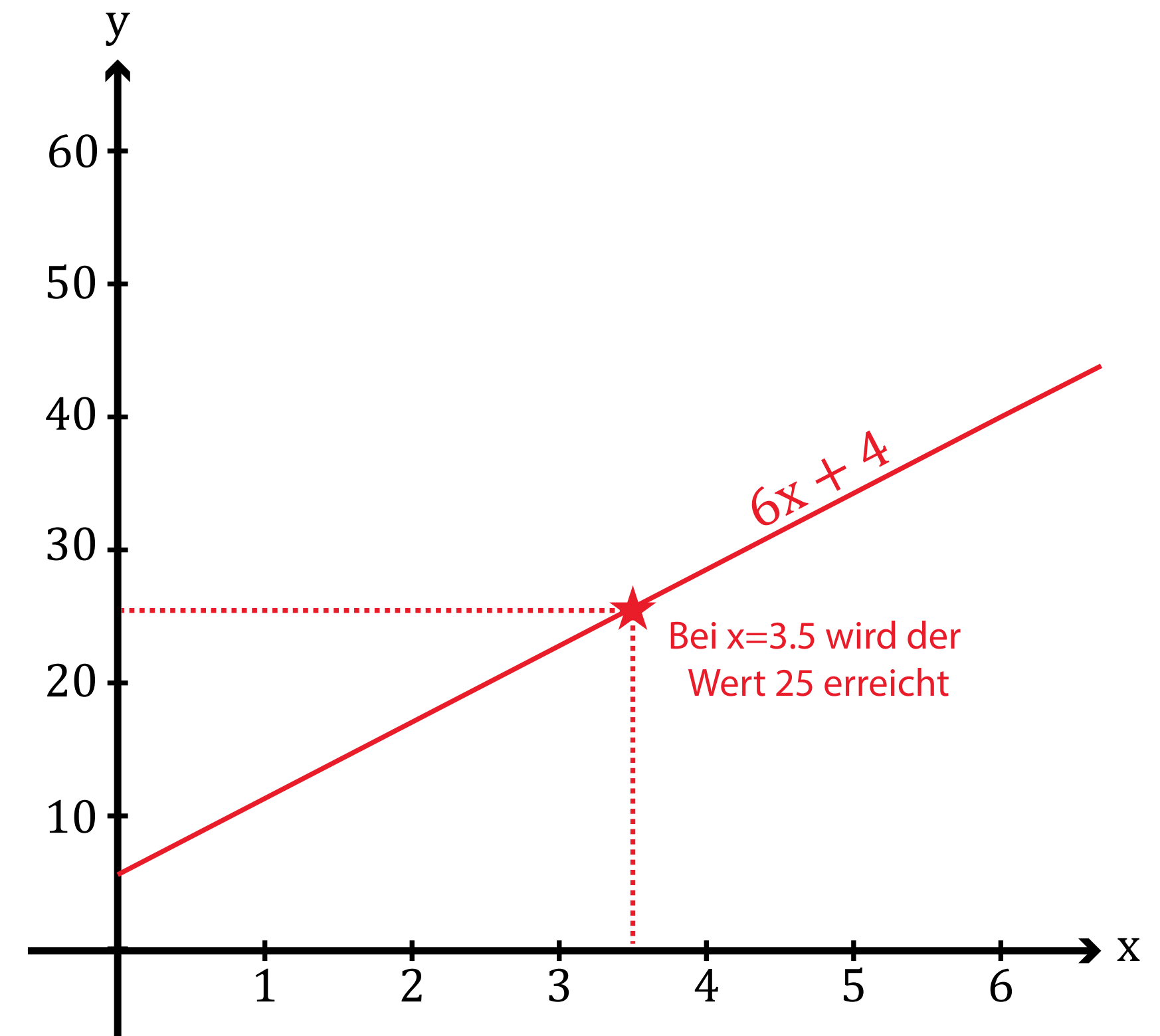
$$6x + 4 = 25 \quad | -4$$

$$\Leftrightarrow 6x + 4 - 4 = 25 - 4$$

$$\Leftrightarrow 6x = 21 \quad | /6$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x}{6} = \frac{21}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 3.5$$

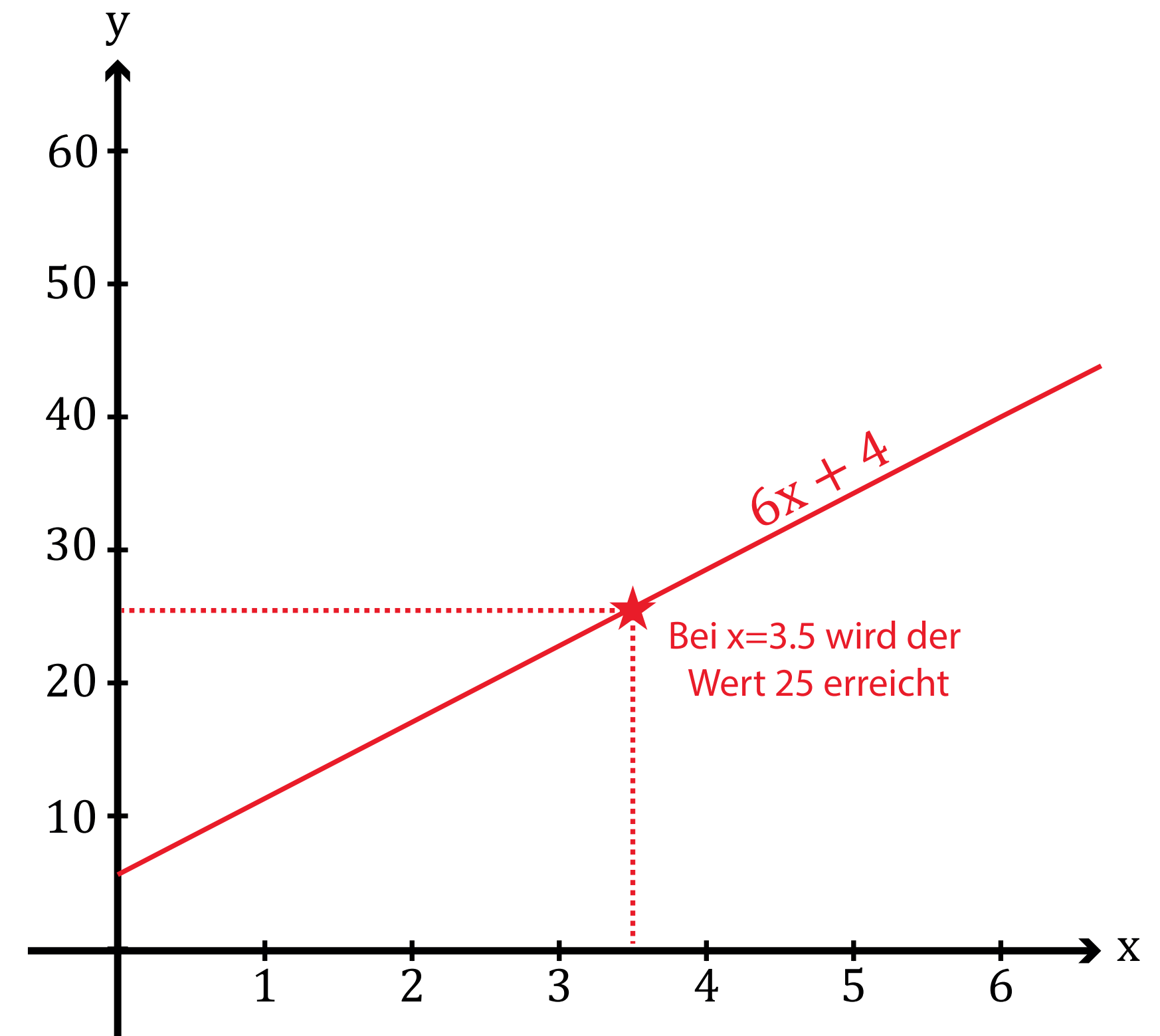


Gleichungen umformen

Die **Äquivalenzpfeile** verknüpfen die Aussage links mit der Aussage rechts. Sie zeigen, dass die eine Aussage aus der anderen folgt.

Die **Gleichheitszeichen** verknüpfen dagegen die Terme, die rechts und links davon stehen. Diese sollen denselben Wert haben.

$$6x + 4 = 25 \iff 6x = 21 \iff x = 3.5$$



Gleichungen umformen

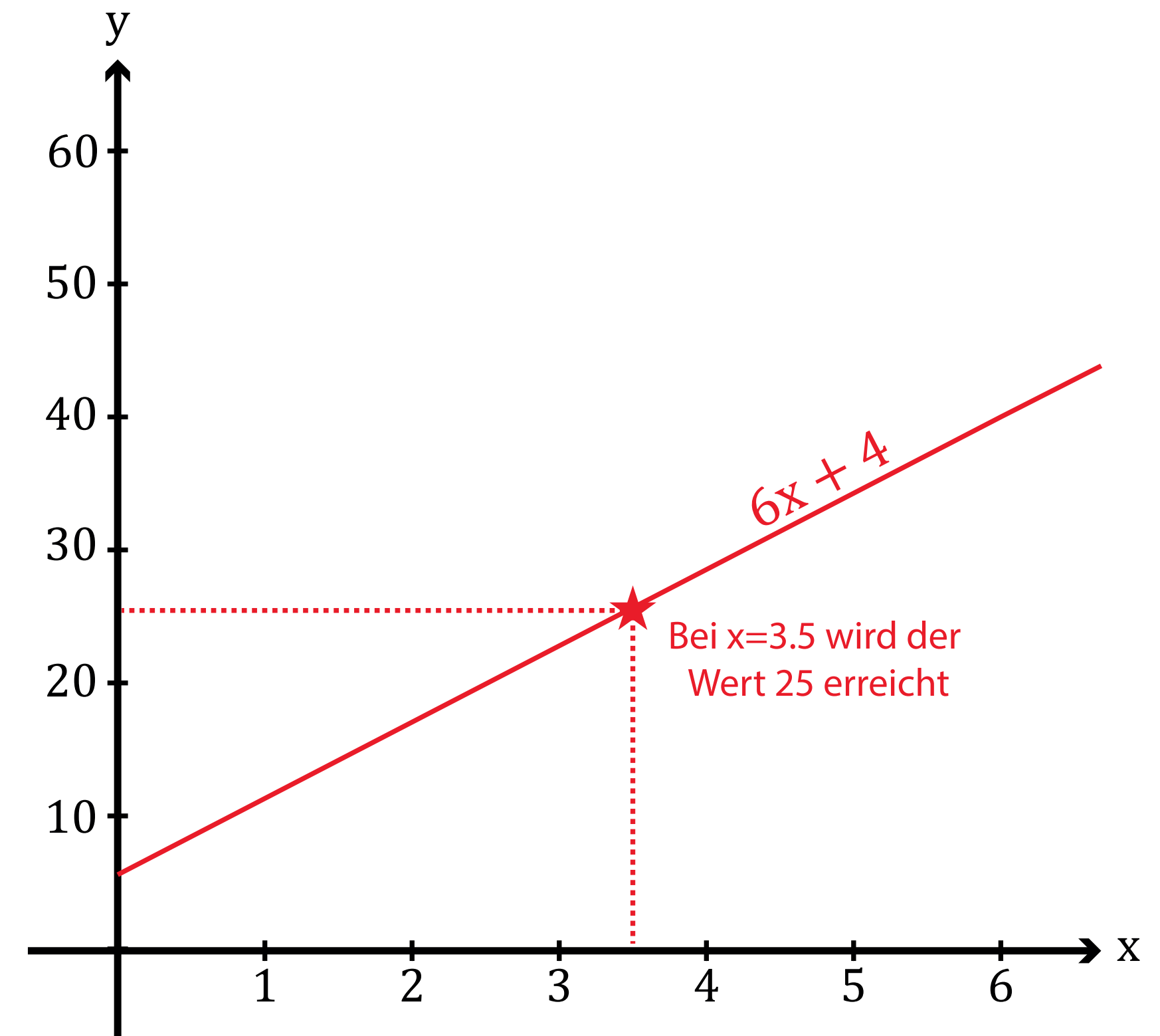
Die **Äquivalenzpfeile** verknüpfen die Aussage links mit der Aussage rechts. Sie zeigen, dass die eine Aussage aus der anderen folgt.

Steht links davon keine Aussage, dann bezieht sich der Doppelpfeil auf die vorherige Zeile!

$$6x + 4 = 25$$

$$\Leftrightarrow 6x = 21$$

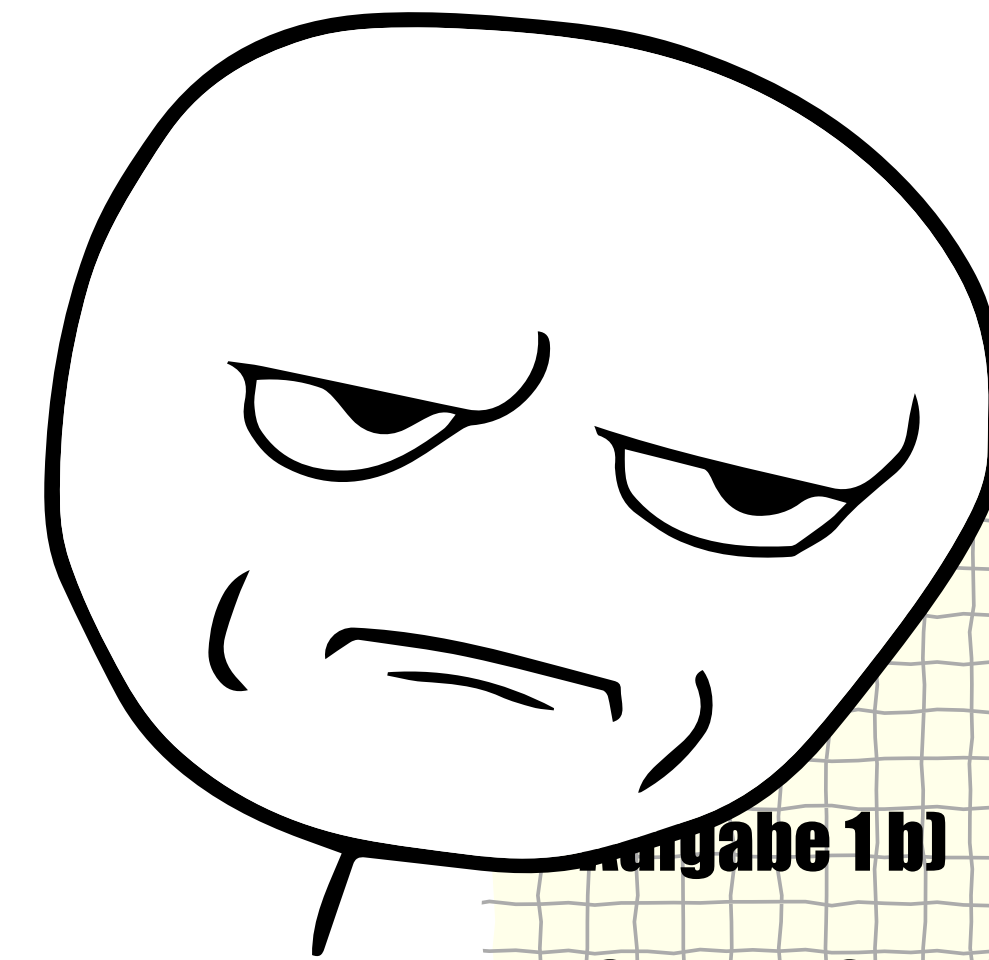
$$\Leftrightarrow x = 3.5$$



Gleichungen umformen

Die **Äquivalenzpfeile** verknüpfen die Aussage links mit der Aussage rechts. Sie zeigen, dass die eine Aussage aus der anderen folgt.

Sie sind insbesondere keine Gleichheitszeichen! Bitte die rechts gezeigte fehlerhafte Notation unbedingt vermeiden!



WAW122
004857824

Aufgabe 1 b)

$$\begin{aligned} 6x + 4 &= 25 &= 6x &= 21 &= x &= 3.5 \\ 6x + 4 &= 25 && -4 && \\ \underline{= 6x} &= 21 && /6 && \\ \underline{= x} &= 3.5 && && \end{aligned}$$

Handwritten red annotations: "wtf?" with an arrow pointing to the chain of equals signs, and "wtf?" written below the first row.

Die Antwort ist 3.5

Gleichungen umformen

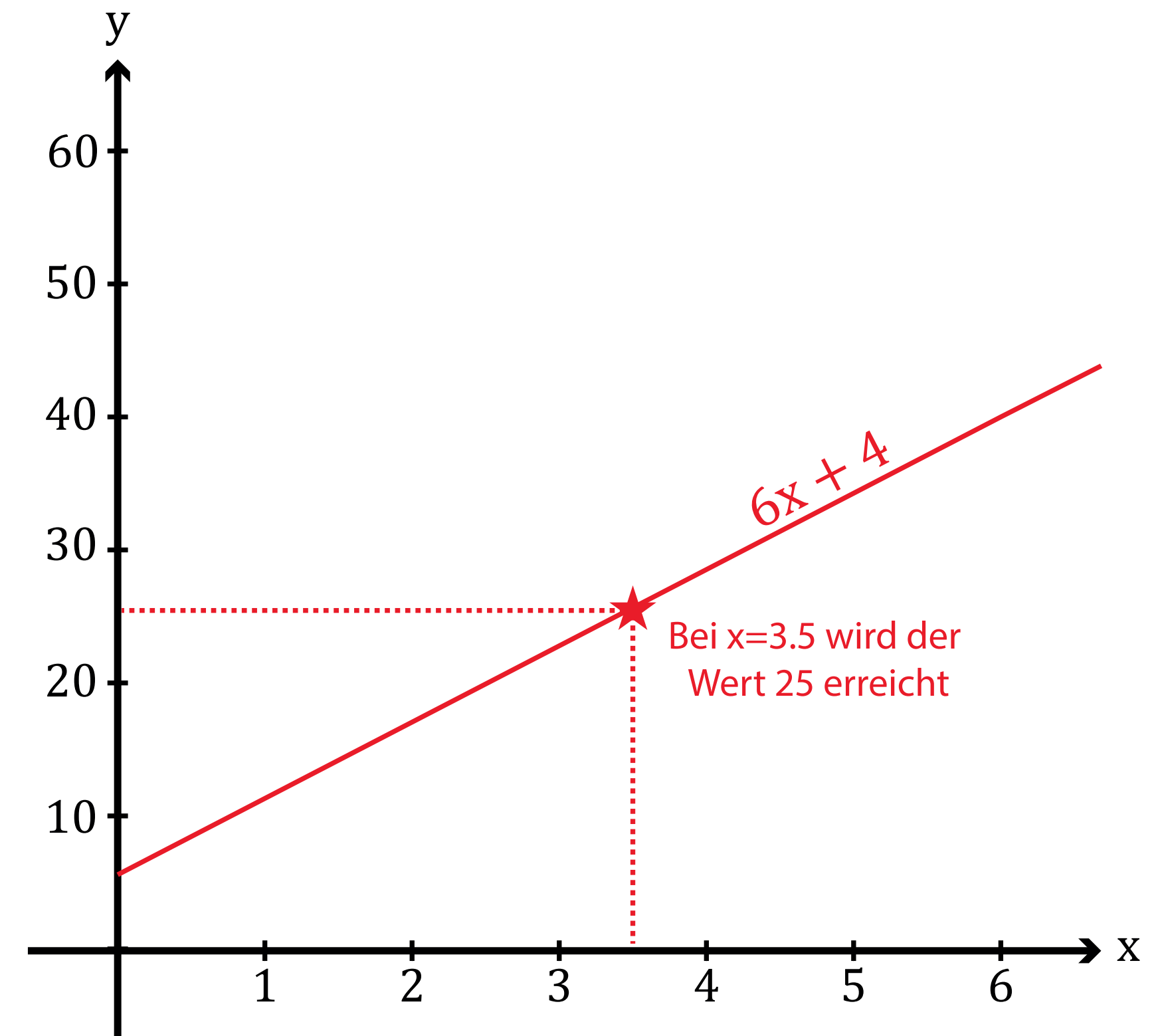
Neben den **Äquivalenzpfeilen** gibt es auch **Implikationspfeile**.
Diese wirken nur in eine Richtung.

Aus der Aussage links folgt die Aussage rechts, aber aus der Aussage rechts folgt nicht zwingend die Aussage links.

$$6x + 4 = 25$$

$$\iff 6x = 21$$

$$\implies x = 3.5$$



Gleichungen umformen

In unserem Beispiel können wir sowohl **Äquivalenzpfeile** als auch **Implikationspfeile** verwenden.
Alle unten gezeigten Varianten sind bzgl. Aussagenlogik korrekt.

$6x + 4 = 25$	$6x + 4 = 25$	$6x + 4 = 25$
$\Leftrightarrow 6x = 21$	$\Leftrightarrow 6x = 21$	$\Rightarrow 6x = 21$
$\Leftrightarrow x = 3.5$	$\Rightarrow x = 3.5$	$\Rightarrow x = 3.5$

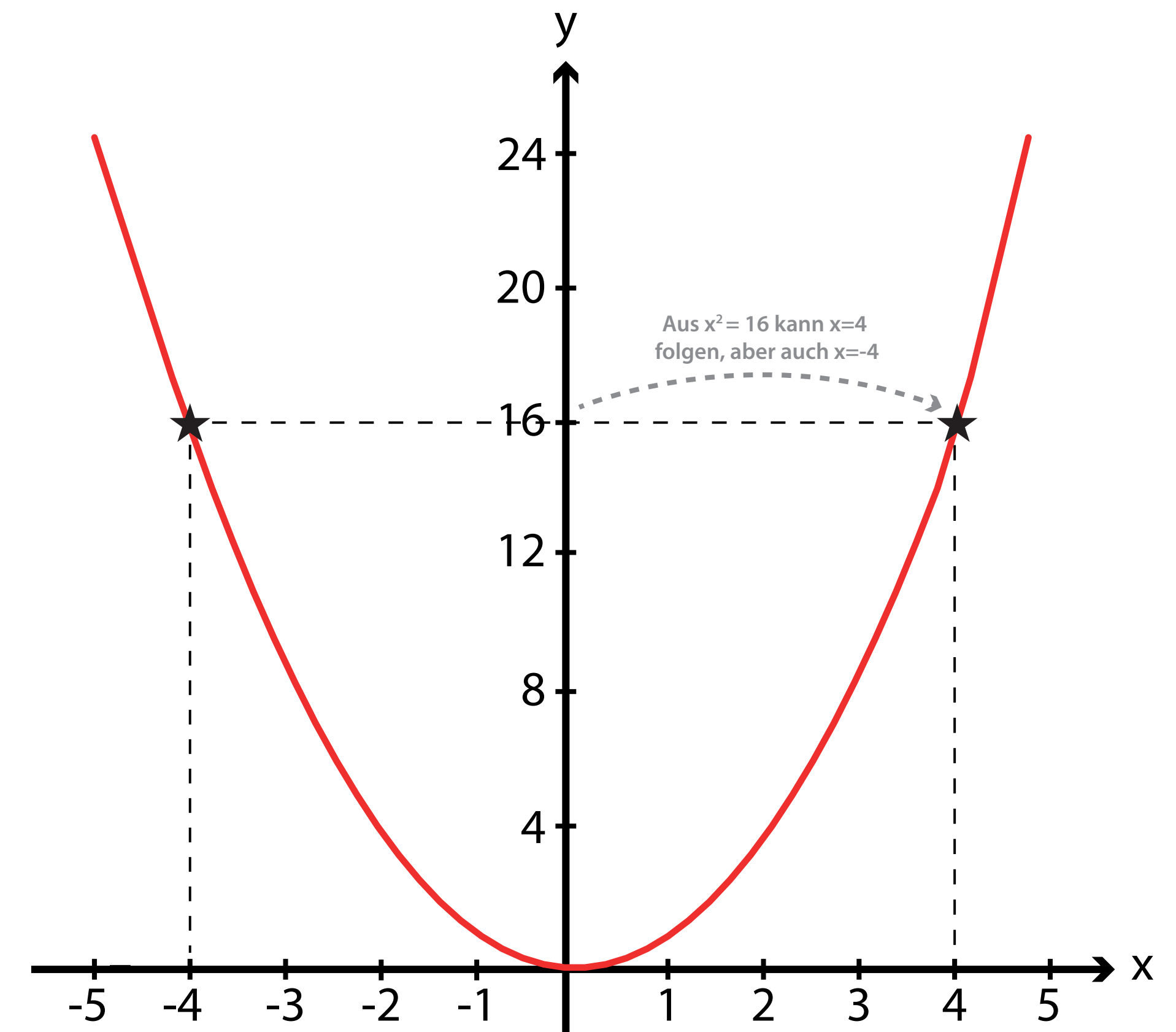
Gleichungen umformen

Bei fast allen Äquivalenzumformungen passen beide Variante!

Eine Ausnahme ist die Potenz- und Wurzelrechnung. Quadrieren wir z. B. beide Seiten einer Gleichung, dann zeigt der Pfeil nur nach rechts:

$$\begin{array}{ccc} x = 4 & & x^2 = 16 \\ \Rightarrow x^2 = 16 & \checkmark & \Rightarrow x = 4 \quad \times \end{array}$$

Warum stimmt die Variante rechts nicht? Weil x auch -4 sein könnte, denn -4 quadriert ergibt ebenfalls 16 .



Gleichungen umformen

Löse folgende Gleichungen nach x auf:

$$6x + 15 = 51$$

$$7x + 2x^2 = 3x$$

$$2xy - 4xz = 8$$

$$\frac{2}{7x} = 4$$

Gleichungen umformen

$$6x + 15 = 51 \quad | - 15$$

$$\Leftrightarrow 6x = 36 \quad | : 6$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

$$7x + 2x^2 = 3x \quad | - 3x$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2x^2 = 0 \quad | x(\dots)$$

$$\Leftrightarrow x(4 + 2x) = 0 \quad | : 2$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -2$$

$$2xy - 4xz = 8$$

$$\Leftrightarrow x(2y - 4z) = 8 \quad | : (\dots)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{y - 2z}$$

$$\frac{2}{7x} = 4 \quad | \cdot 7x$$

$$\Leftrightarrow 2 = 28x \quad | : 28$$

$$\Leftrightarrow x = 1/14$$

Quadratische Gleichungen

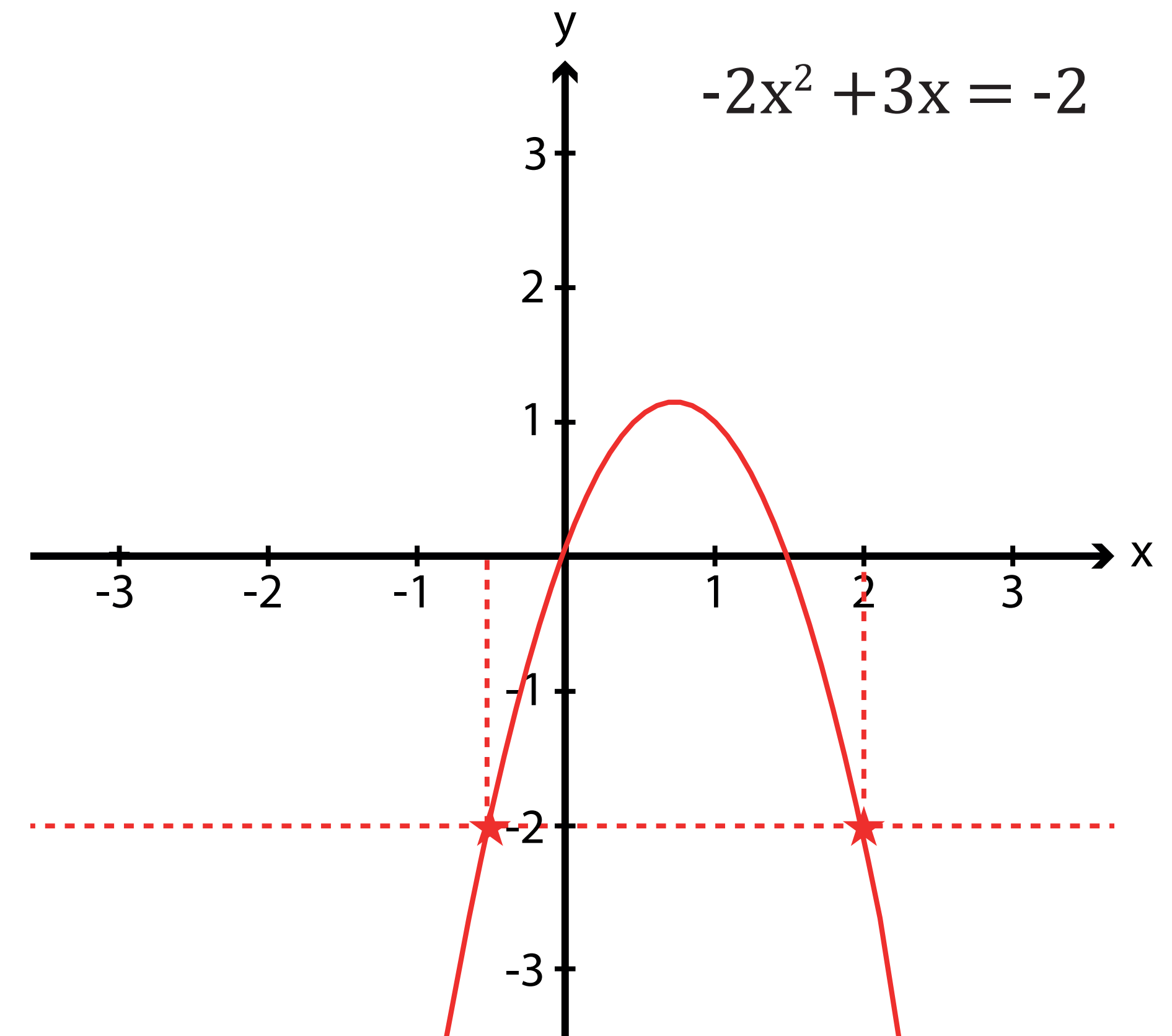
Quadratische Gleichungen lösen wir, indem wir sie zu der folgenden Form umformen:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dann wenden wir die Mitternachtsformel an!

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Schauen wir uns das Beispiel rechts an ...



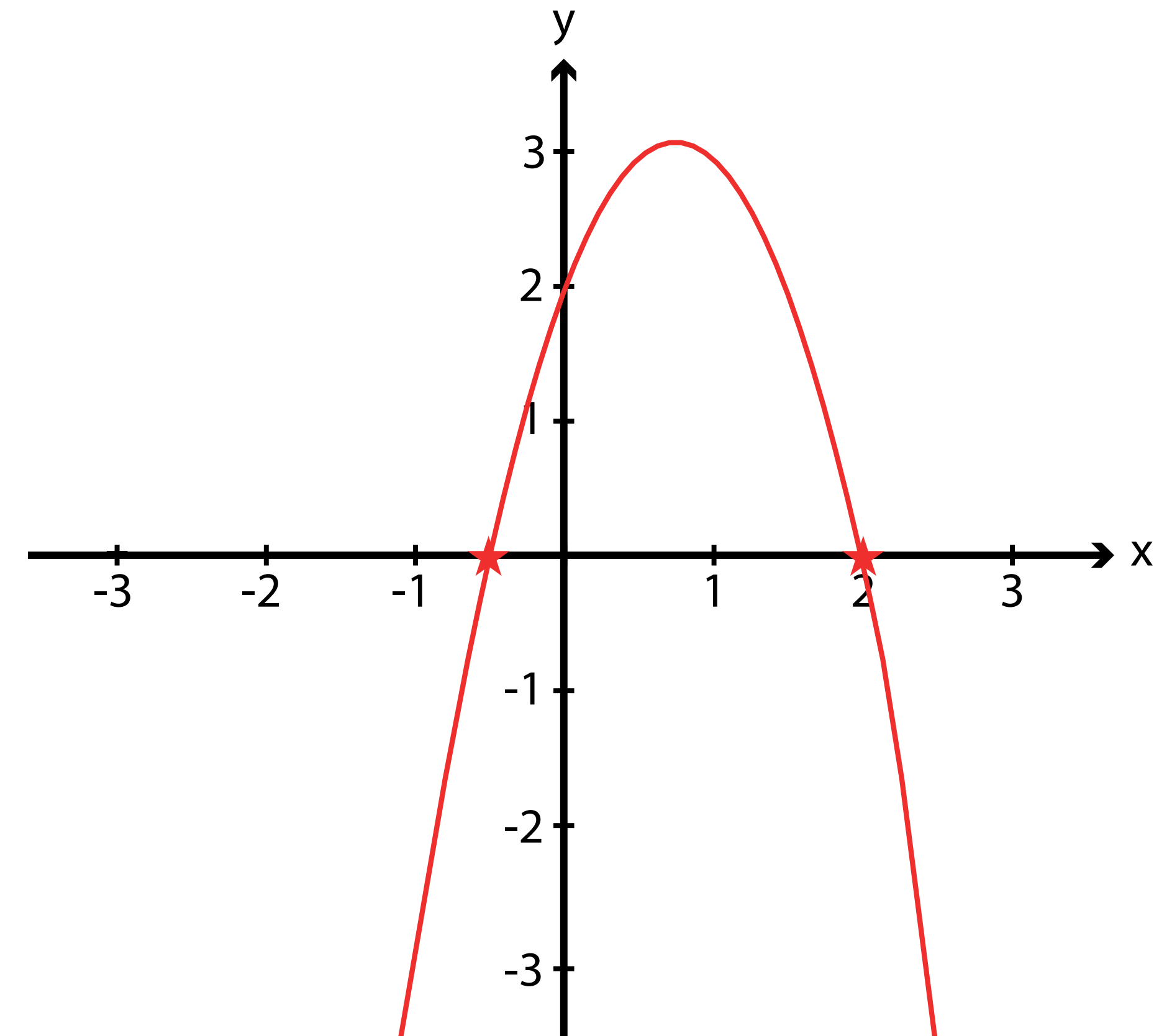
Quadratische Gleichungen

$$-2x^2 + 3x = -2 \quad | +2$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2}}{2 \cdot (-2)}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-4} \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -0.5$$



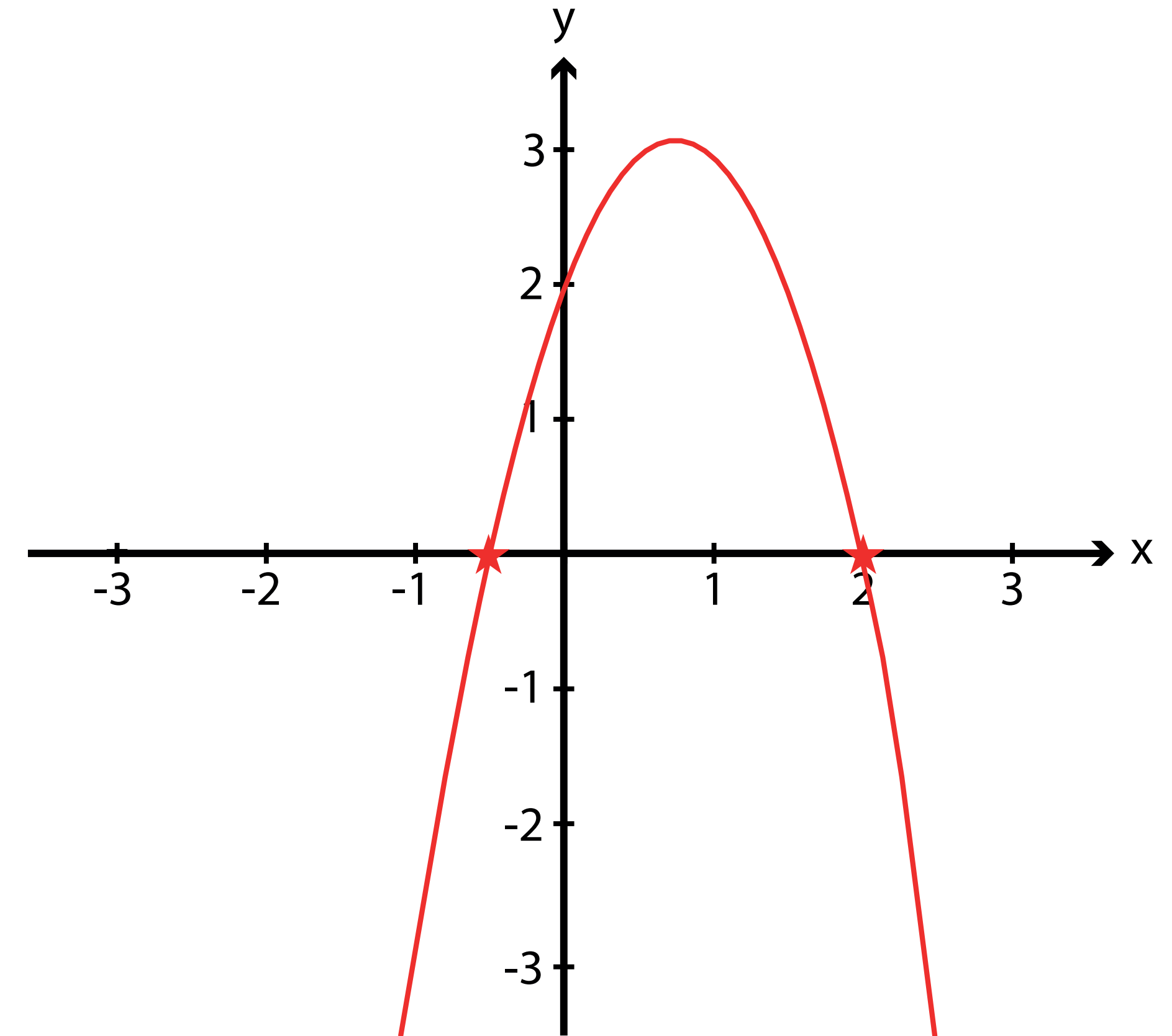
Quadratische Gleichungen

Im gegebenen Beispiel hat die Mitternachtsformel zwei verschiedene Lösungen:

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0$$

Dies ist nicht immer der Fall, sondern nur genau dann, wenn der Ausdruck unter der Wurzel (die sogenannte **Diskriminante**) einen positiven Wert hat.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



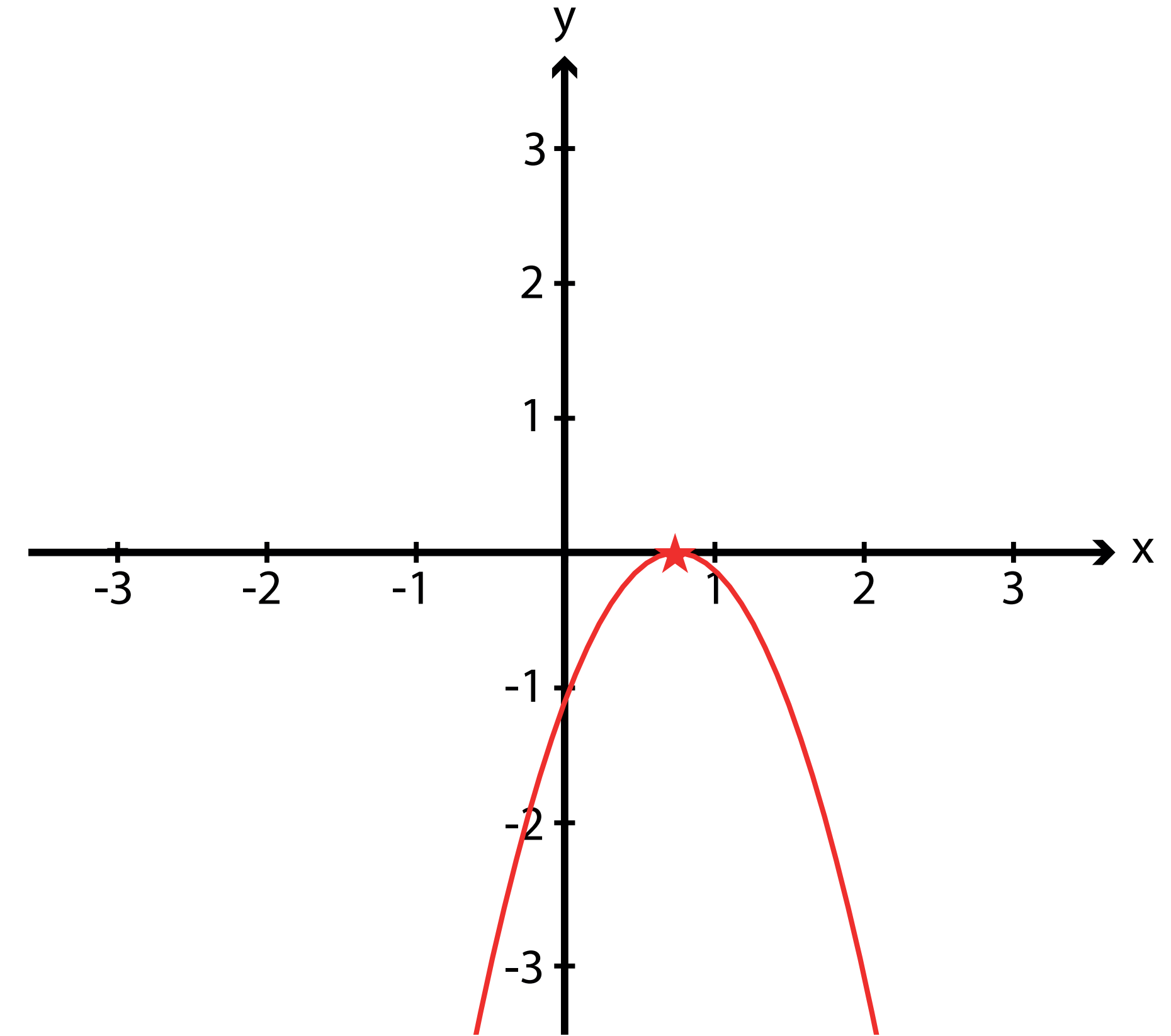
Quadratische Gleichungen

Folgende quadratische Gleichung hat nur eine Lösung:

$$-2x^2 + 3x - 1.125 = 0$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist genau null und daher spielt es keine Rolle, ob wir die Wurzel addieren oder abziehen.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



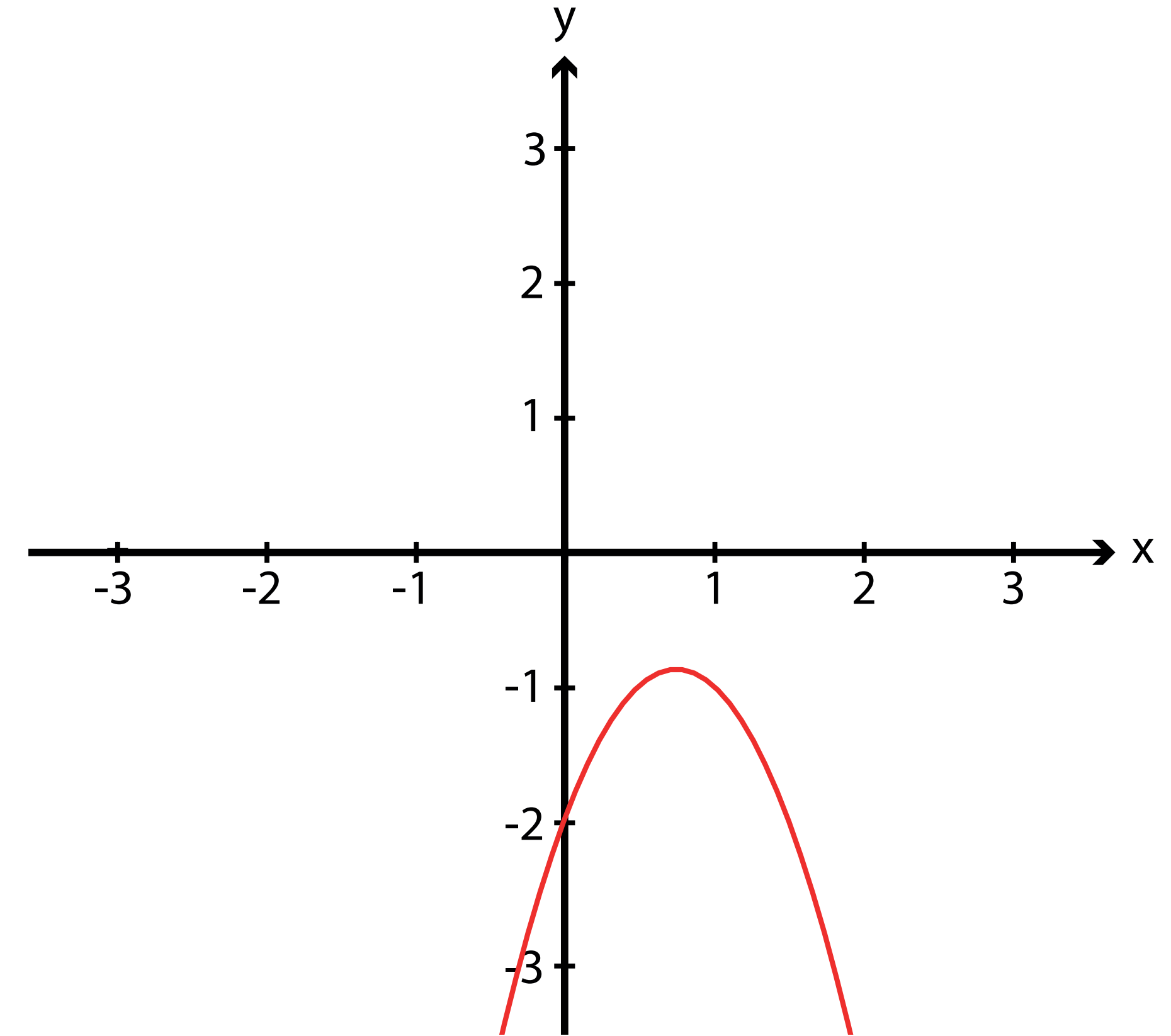
Quadratische Gleichungen

Folgende quadratische Gleichung hat keine Lösung:

$$-2x^2 + 3x - 2 = 0$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist negativ und hat daher keine reelle Lösung. Grafisch interpretiert: Es gibt keine Nullstelle.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Quadratische Gleichungen

Finde alle Lösungen folgender Gleichungen:

$$4x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$2x^2 = 10x$$

$$3x^3 - 4x^2 - 7x = 0$$

Quadratische Gleichungen

$$4x^2 - 6x + 2 = 0$$

Werte $a=4$, $b=-6$ und $c=2$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4}$$

Mitternachtsformel anwenden

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{8}$$

Determinante positiv - zwei Lösungen

$$= \frac{6 \pm 2}{8}$$

Einmal $6+2$ und einmal $6-2$ rechnen...

$$\Rightarrow x_1 = 0.5, x_2 = 1$$

Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Quadratische Gleichungen

$$2x^2 = 10x$$

Umformen, sodass rechts von $= 0$ steht

$$2x^2 - 10x = 0$$

Werte $a=2$, $b=-10$, $c=0$

$$x(2x-10) = 0$$

Alternativ: x ausklammern

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 0}}{4}$$

Mitternachtsformel anwenden

$$= \frac{10 \pm 10}{4}$$

Determinante positiv - zwei Lösungen

$$\rightarrow x_1 = 0, x_2 = 5$$

Einmal $10+10$ und einmal $10-10$ rechnen...

Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Quadratische Gleichungen

$$2x^2 = 10x$$

Umformen, sodass rechts von $= 0$ steht

$$2x^2 - 10x = 0$$

Abkürzung: Variable x ausklammern

$$x(2x - 10) = 0$$

Stimmt wenn x oder $(2x-10)$ null gibt

$$x_1 = 0, x_2 = 5$$

Da Klammer für $x=5$ null ergibt

Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Quadratische Gleichungen

$$3x^3 - 4x^2 - 7x = 0$$

Variable x Ausklammern

$$x(3x^2 - 4x - 7) = 0$$

Lösung $x_1=0$, Werte $a=3$, $b=-4$, $c=-7$

$$x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{6}$$

Mitternachtsformel anwenden

$$x_{2,3} = \frac{4 \pm 10}{6}$$

Determinante positiv - zwei Lösungen

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 7/3$$

Einmal $4+10$ und einmal $4-10$ rechnen..

Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Erste Lösung $x_1 = 0$

Gleichungssysteme

Gleichungssysteme bestehen aus mehreren Gleichungen, die mehrere Variablen miteinander verknüpfen.

Lineare Gleichungssysteme sind Gleichungssysteme, in denen die Variablen ausschließlich linear vorkommen, d. h. keine Quadrate, Wurzeln, Logarithmen usw.

Wir betrachten überwiegend lineare Gleichungssysteme!

$$x^2 + y + z = 6$$

$$x + y^2 + z = 8 \quad \text{Nichtlineares GS}$$

$$x + y + z^2 = 12$$

$$2x + y + z = 7$$

$$x + 2y + z = 8 \quad \text{Lineares GS}$$

$$x + y + 2z = 9$$

Gleichungssysteme

Beim Lösen von Gleichungssystemen suchen wir Werte für die Variablen, mit denen **alle** Gleichungen des Gleichungssystems erfüllt sind.

Lösung für das Beispiel rechts:

$$x=1, y=2, z=3$$

$$2x + y + z = 7$$

$$x + 2y + z = 8 \quad \text{Lineares GS}$$

$$x + y + 2z = 9$$

$$2 \cdot 1 + 2 + 3 = 7$$

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 = 8 \quad \text{Lösung}$$

$$1 + 2 + 2 \cdot 3 = 9$$

Gleichungssysteme

Beim Lösen von Gleichungssystemen suchen wir Werte für die Variablen, mit denen **alle** Gleichungen des Gleichungssystems erfüllt sind.

Keine Lösung für das Beispiel rechts:

$$x=0, y=3, z=4$$

$$2x + y + z = 7$$

$$x + 2y + z = 8$$

$$x + y + 2z = 9$$

Lineares GS

$$2 \cdot 0 + 3 + 4 = 7$$

$$0 + 2 \cdot 3 + 4 \neq 8$$

$$0 + 3 + 2 \cdot 4 \neq 9$$

Keine Lösung

Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme die mehr Variablen wie Gleichungen haben, sind zwar lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

Lösung für das Beispiel rechts:

$$x=10, y=0, z=1$$

Auch eine Lösung für das Beispiel rechts:

$$x=5, y=5, z=6$$

Nicht eindeutig lösbares
Gleichungssystem:

$$x + y = 10$$

$$x + z = 11$$

Gleichungssysteme

Das Problem ist nicht, dass es keine Lösung gibt. Im Gegenteil: Es gibt unendlich viele davon. Alle Werte für x , y und z , welche die folgenden Bedingungen erfüllen sind Lösungen.

$$z = y + 1$$

$$y = 10 - x$$

Nicht eindeutig lösbares
Gleichungssystem:

$$x + y = 10$$

$$x + z = 11$$

Gleichungssysteme

Auch lineare GS, die genauso viele Variablen wie Gleichungen haben, sind nicht immer eindeutig lösbar.

Lösung für das Beispiel rechts:

$$x=1, y=1, z=1$$

Auch eine Lösung für das Beispiel rechts:

$$x=1, y=2, z=0$$

Nicht eindeutig lösbares
Gleichungssystem:

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 2y + 2z = 6$$

$$x + y = 3 - z$$

Gleichungssysteme

Wir können hier unendlich viele Lösungen angeben, die jedoch alle folgende Bedingung erfüllen müssen:

$$x+y+z = 3$$

Problem Die zweite und dritte Gleichung sind nichts anderes als Umformungen der ersten Gleichung!

Für eine eindeutige Lösung, darf keine der Gleichungen eine Äquivalenzumformungen der anderen Gleichungen sein.

Nicht eindeutig lösbares Gleichungssystem:

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 2y + 2z = 6$$

$$x + y = 3 - z$$

Gleichungssysteme

Nehmen wir an, es gibt eine eindeutige Lösung. Wie finden wir diese? Schauen wir uns dazu ein einfaches Beispiel mit zwei Variablen an!

Wir dürfen beide Gleichungen mit Äquivalenzumformungen umformen. Zusätzlich gibt es drei Techniken, mit denen wir die Lösung finden können.

Einfaches Beispiel mit eindeutiger Lösung

$$x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

Auflösen und Einsetzen

Wir lösen eine der Gleichungen nach einer der Variablen auf und setzen das Ergebnis in die andere Gleichung ein. Wir können z. B. die erste Gleichung nach x auflösen ...

$$x = 5 - y$$

... und den dadurch gefundenen Ausdruck in der zweiten Gleichung für x einsetzen:

$$\underbrace{(5 - y)}_x - y = 1$$

Einfaches Beispiel mit eindeutiger Lösung

$$x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

Auflösen und Einsetzen

Diesen Ausdruck können wir nach y auflösen und mit dem Zwischenergebnis $y=2$ erhalten wir dann $x=3$!

$$\begin{aligned} & (5 - y) - y = 1 \\ \Leftrightarrow & \quad 5 - 2y = 1 \\ \Leftrightarrow & \quad - 2y = -4 \\ \Rightarrow & \quad y = 2 \end{aligned}$$

Einfaches Beispiel mit
eindeutiger Lösung

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Addieren von Gleichungen

Wir können Gleichungen aufeinander addieren oder voneinander abziehen. Ziel ist es dabei, eine Variable "loszuwerden".

In unserem Beispiel können wir die beiden Gleichungen addieren, um das y loszuwerden:

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 5 \\ + \quad x - y & = & 1 \\ \hline 2x & & = 6 \end{array}$$

Einfaches Beispiel mit eindeutiger Lösung

$$x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

Seiten Gleichsetzen

Ist eine Seite von zwei Gleichungen gleich, kann ich die anderen Seiten gleichsetzen.

Hier ist das nicht direkt möglich, aber wir könnten die Gleichungen entsprechend umformen.

$$x + y = 5 \iff x + y - 5 = 0$$

$$x - y = 1 \iff x - y - 1 = 0$$

Einfaches Beispiel mit
eindeutiger Lösung

$$x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

Seiten Gleichsetzen

Jetzt sind die rechten Seiten gleich und wir können die linken Seiten gleichsetzen! Wieder finden wir $y=2$ und $x=3$

$$\begin{aligned}x + y - 5 &= x - y - 1 \\ \Leftrightarrow y - 5 &= -y - 1 \\ \Leftrightarrow 2y &= 4\end{aligned}$$

Einfaches Beispiel mit
eindeutiger Lösung

$$\begin{aligned}x + y &= 5 \\ x - y &= 1\end{aligned}$$

Gleichungssysteme

Die drei Techniken sind je nach Gleichungssystem unterschiedlich effizient. Es gibt keine die immer besser ist.

- Auflösen und Einsetzen
- Gleichungen addieren/subtrahieren
- Rechte/Linke Seiten gleichsetzen

In der linearen Algebra lernen wir später Algorithmen kennen, die zwar umständlich sind, uns jedoch sicher zum Ziel führen.

Einfaches Beispiel mit eindeutiger Lösung

$$x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

Gleichungssysteme

Löse die folgenden Gleichungssysteme

$$2x - 4y = 4$$

$$x + 2y = 6$$

$$x + y + z = 8$$

$$x - y + z = 4$$

$$x + y - z = 6$$

$$3x + y + z = 5$$

$$y - z = 2$$

$$2x - y - z = 0$$

$$2x + y + z = 7$$

$$x + 2y + z = 8$$

$$x + y + 2z = 9$$

Gleichungssysteme

$$\begin{array}{l} x + 2y = 6 \iff x = \underline{6 - 2y} \\ 2x - 4y = 4 \end{array}$$

Einsetzen

$$\begin{array}{l} 12 - 8y = 4 \implies y = 1 \\ \implies x = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y + z = 8 \\ x - y + z = 4 \\ x + y - z = 6 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Gl. 1 und 2 addieren} \\ \text{Gl. 2 und 3 addieren} \end{array} \right.$$

$$2x + 2z = 12$$

$$2x = 10$$

$$\Rightarrow x = 5 \Rightarrow z = 1$$

$$\Rightarrow y = 2$$

$$\begin{array}{l} 3x + y + z = 5 \\ y - z = 2 \\ 2x - y - z = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Gleichung 1 und 3 addieren} \\ \Rightarrow 5x = 5 \\ \Rightarrow x = 1 \end{array} \right.$$

$$2 - y - z = 0 \Leftrightarrow y = 2 - z$$

$$(2 - z) - z = 2 \Leftrightarrow 2 - 2z = 2$$

$$\Rightarrow z = 0$$

$$\Rightarrow y = 2$$

$$\begin{array}{lcl} & \text{Einsetzen} & \\ \text{(I)} & 2x + y + z = 7 & \\ \text{(II)} & x + 2y + z = 8 \iff x = 8 - 2y - z & \\ \text{(III)} & x + y + 2z = 9 & \\ & \text{Einsetzen} & \end{array}$$

$$\text{(II) in (I)} \quad 2(8 - 2y - z) + y + z = 7 \iff -3y - z = -9$$

$$\text{(II) in (III)} \quad 8 - 2y - z + y + 2z = 9 \iff \underline{-y + z = 1}$$

$$-4y = -8$$

$$\implies y = 2$$

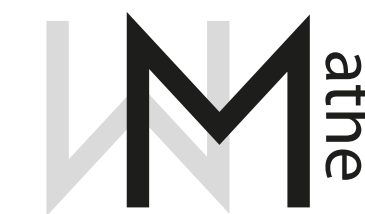
$$\implies z = 3$$

$$\implies x = 1$$

Analysis I

In der Analysis untersuchen wir Funktionen auf eine Vielzahl von Eigenschaften.

In Teil 1 beschränken wir uns auf Funktionen mit einer Variablen und lassen die Integralrechnung außen vor.



Inhalte Analysis I

- Funktionen
- Definitions- und Wertebereiche
- Grenzwerte
- Stetigkeit
- Differenzialrechnung
- Ableitungsregeln
- Extremstellen
- Monotonie
- Konvexität

Funktionen

Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jedem Element aus einer Menge M genau ein Element einer Menge N zuordnet:

$$f: M \rightarrow N$$

Wir bezeichnen die Menge M als Definitionsbereich und die Menge N als Wertebereich.



**Element aus
Menge M rein**



**Rechen-
vorschrift**



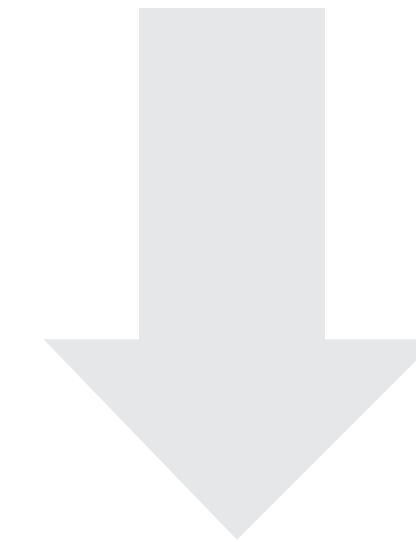
**Ergebnis aus
Menge N raus**

Funktionen

Wir betrachten fast nur reelle Funktionen, die von einer Teilmenge der reellen Zahlen auf eine Teilmenge von reellen Zahlen abbildet, d. h.:

$$f: M \rightarrow N$$

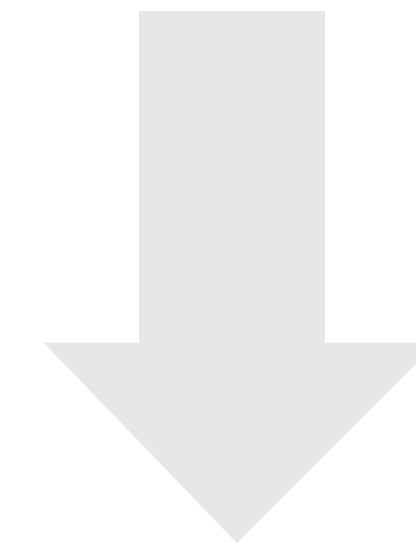
mit $M \subseteq \mathbb{R}, N \subseteq \mathbb{R}$



**Reelle Zahl
einsetzen**



**Rechen-
vorschrift**



**Reelle Zahl
rausbekommen**

Funktionen

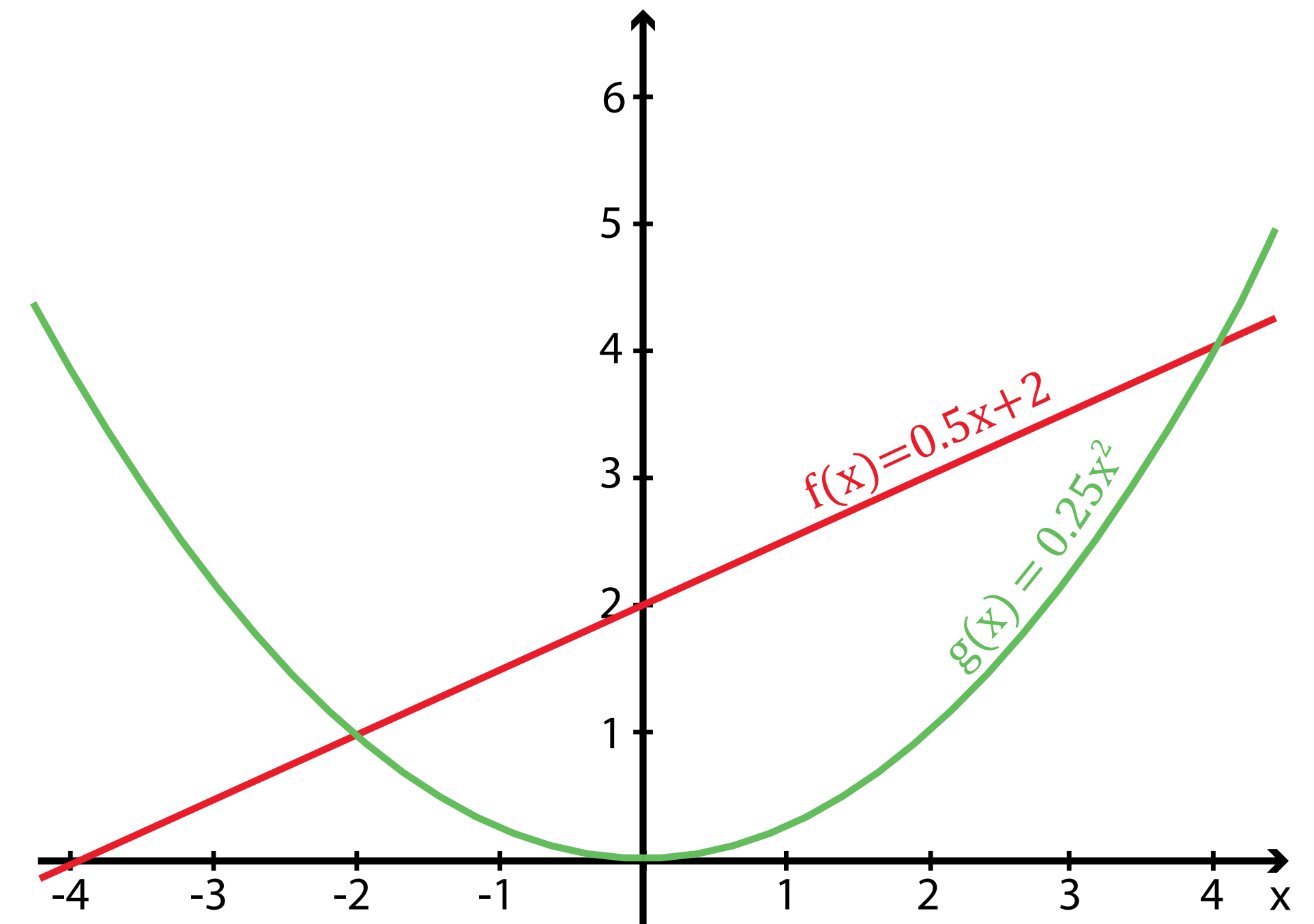
Funktionen haben einen Namen, wobei dieser üblicherweise nur aus einem einzelnen Zeichen besteht.

Hinter dem Funktionsnamen werden alle Variablen, von denen die Funktion abhängt, in Klammern aufgelistet.

Zwei einfache Beispiele:

$$f(x) = 0.5x + 2$$

$$g(x) = 0.25x^2$$



Funktionen

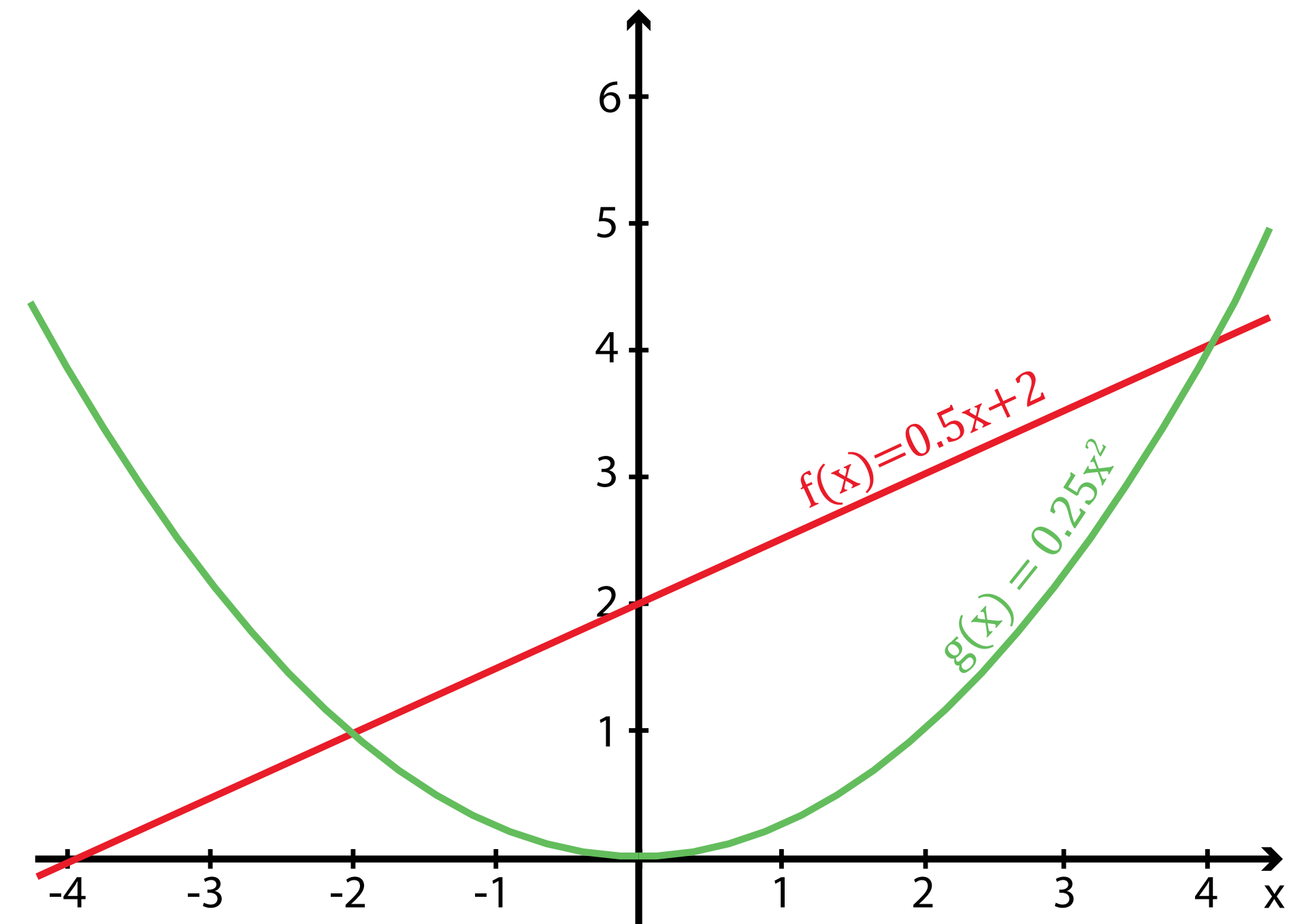
Unsere Beispiele haben die Definitions- und Wertebereiche:

$$f(x) = 0.5x + 2$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = 0.25x^2$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$



Funktionen

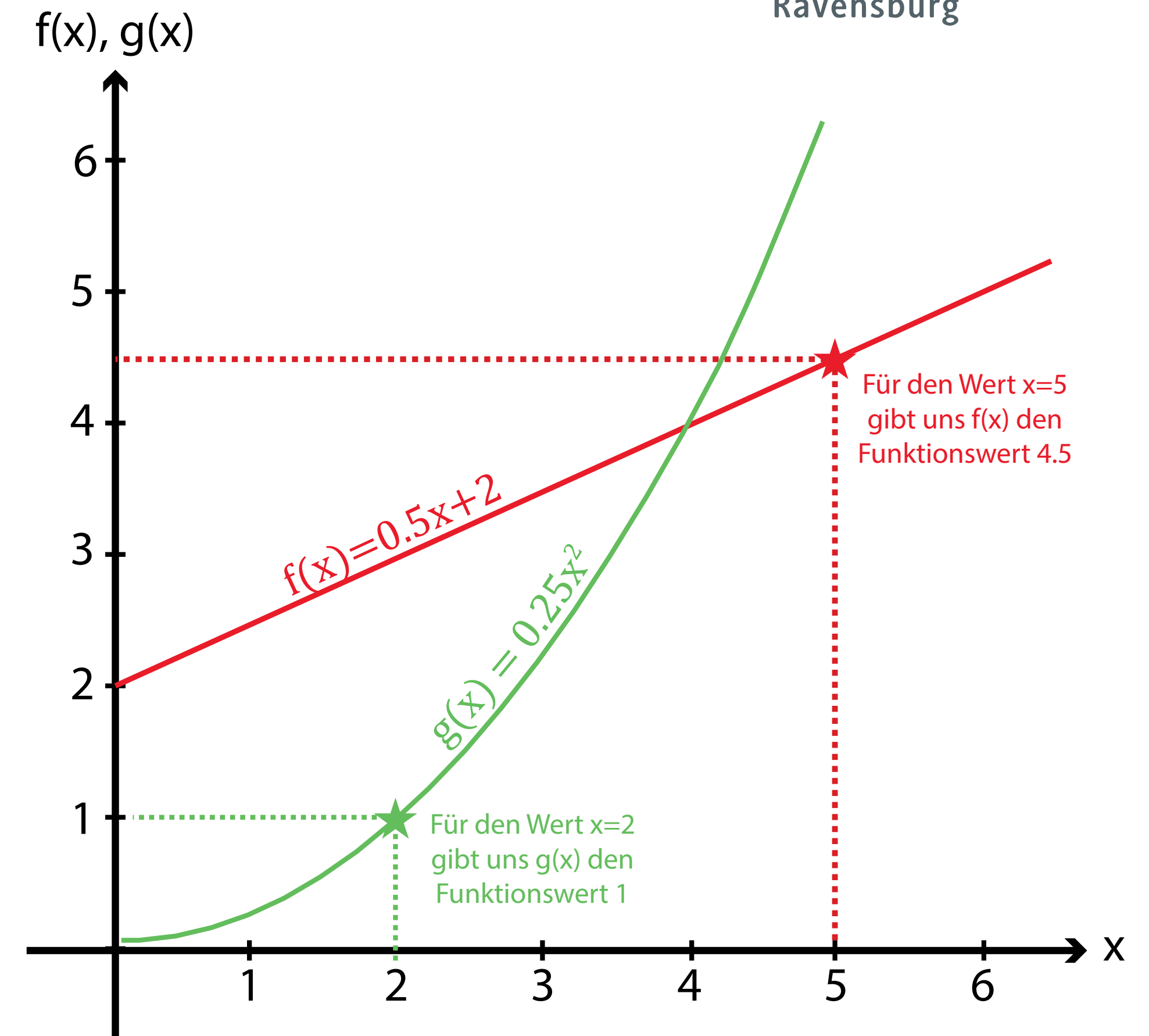
Übergeben wir der Funktion Werte für ihre Variablen, erhalten wir einen Funktionswert.

$$f(x) = 0.5x + 2$$

$$f(5) = 0.5 \cdot 5 + 2 = 4.5$$

$$g(x) = 0.25x^2$$

$$g(2) = 0.25 \cdot 2^2 = 1$$



Funktionen

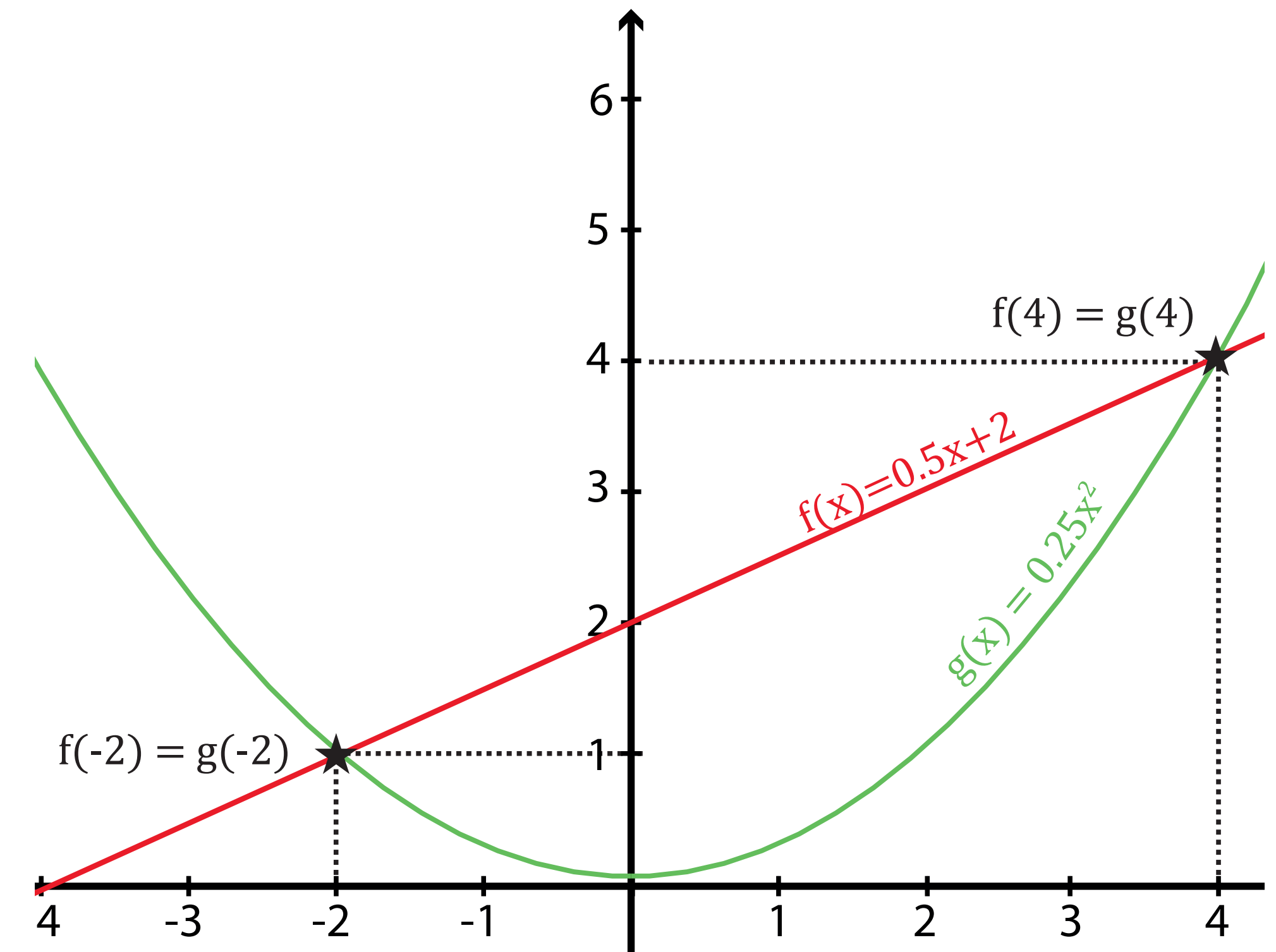
Um zu sehen, wann sich zwei Funktionen schneiden, können wir Funktionen gleichsetzen:

$$f(x) = 0.5x + 2 \quad g(x) = 0.25x^2$$

$$0.5x + 2 = 0.25x^2 \quad | - 0.25x^2$$

$$\Leftrightarrow -0.25x^2 + 0.5x + 2 = 0 \quad | \text{MN-Formel}$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 4$$

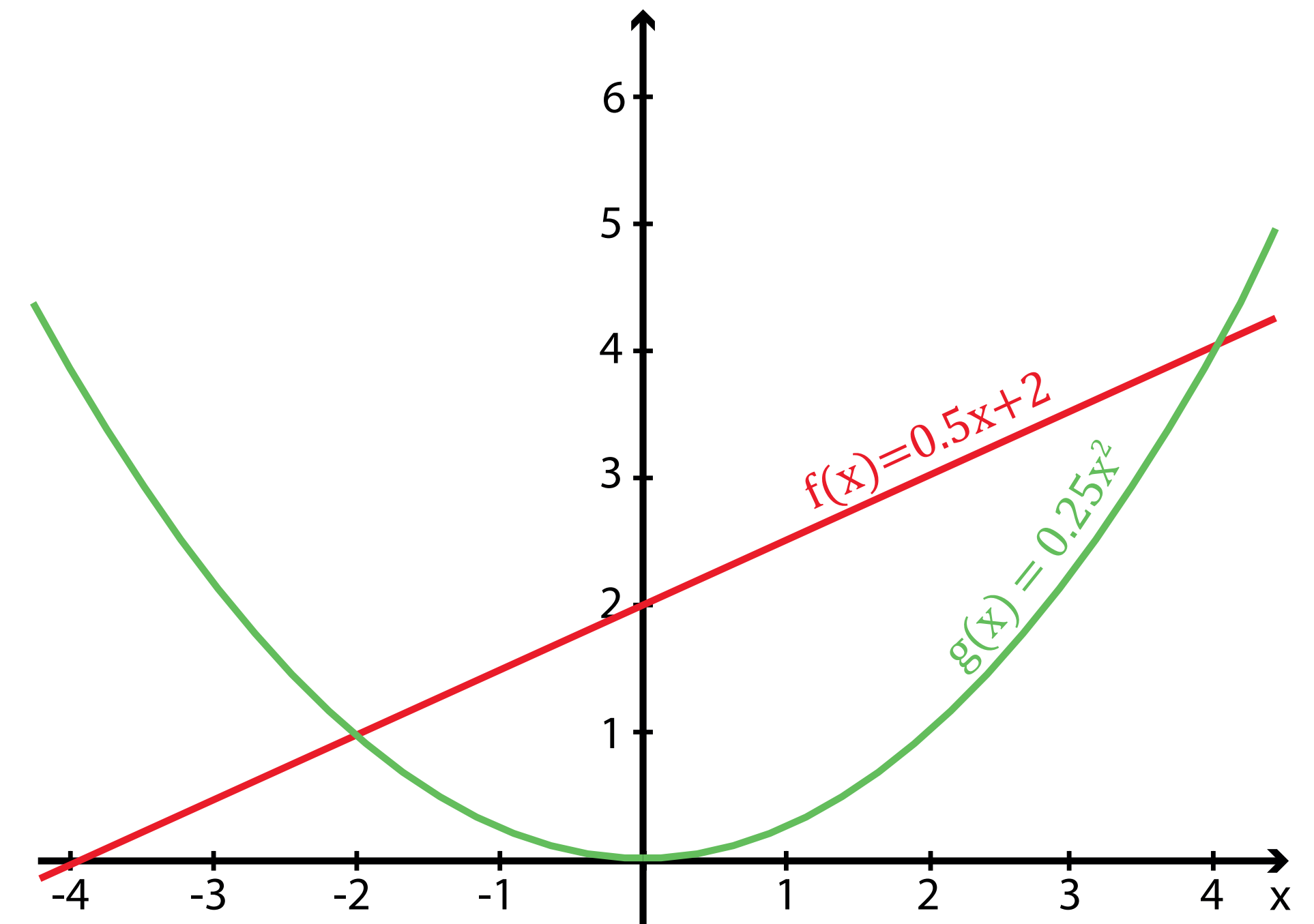


Funktionen

Die rechts gezeigten Funktionen sind für alle reellen Zahlen \mathbb{R} definiert. Wir können jede reelle Zahl einsetzen und erhalten ein Ergebnis.

Gibt es Funktionen, bei denen dies nicht der Fall ist?

Gibt es Funktionen, in denen wir bestimmte Zahlen nicht einsetzen dürfen?

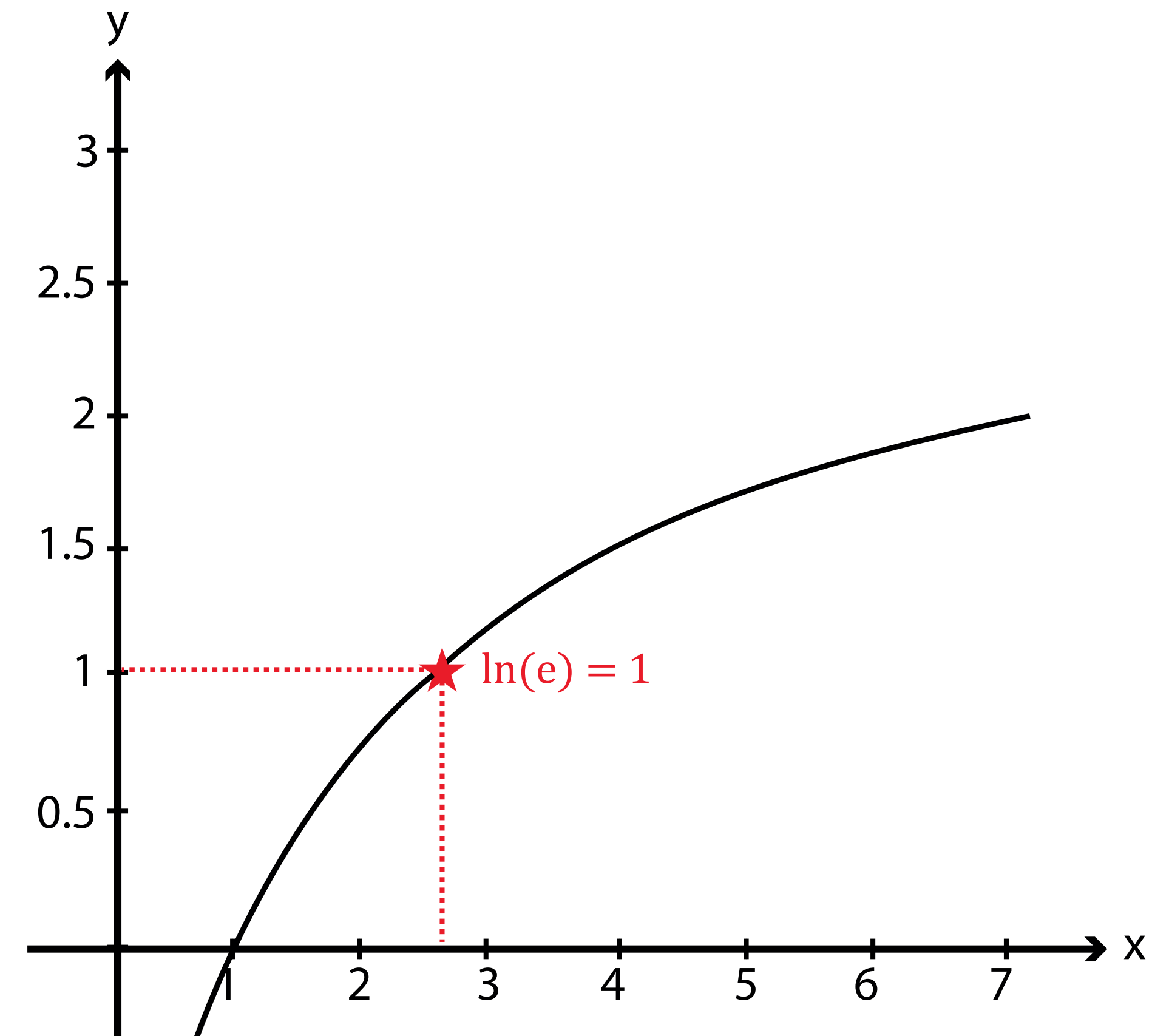


Funktionen

Funktionen sind an jenen Stellen nicht definiert, wo das Argument eines Logarithmus 0 oder negativ wird.

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f: \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

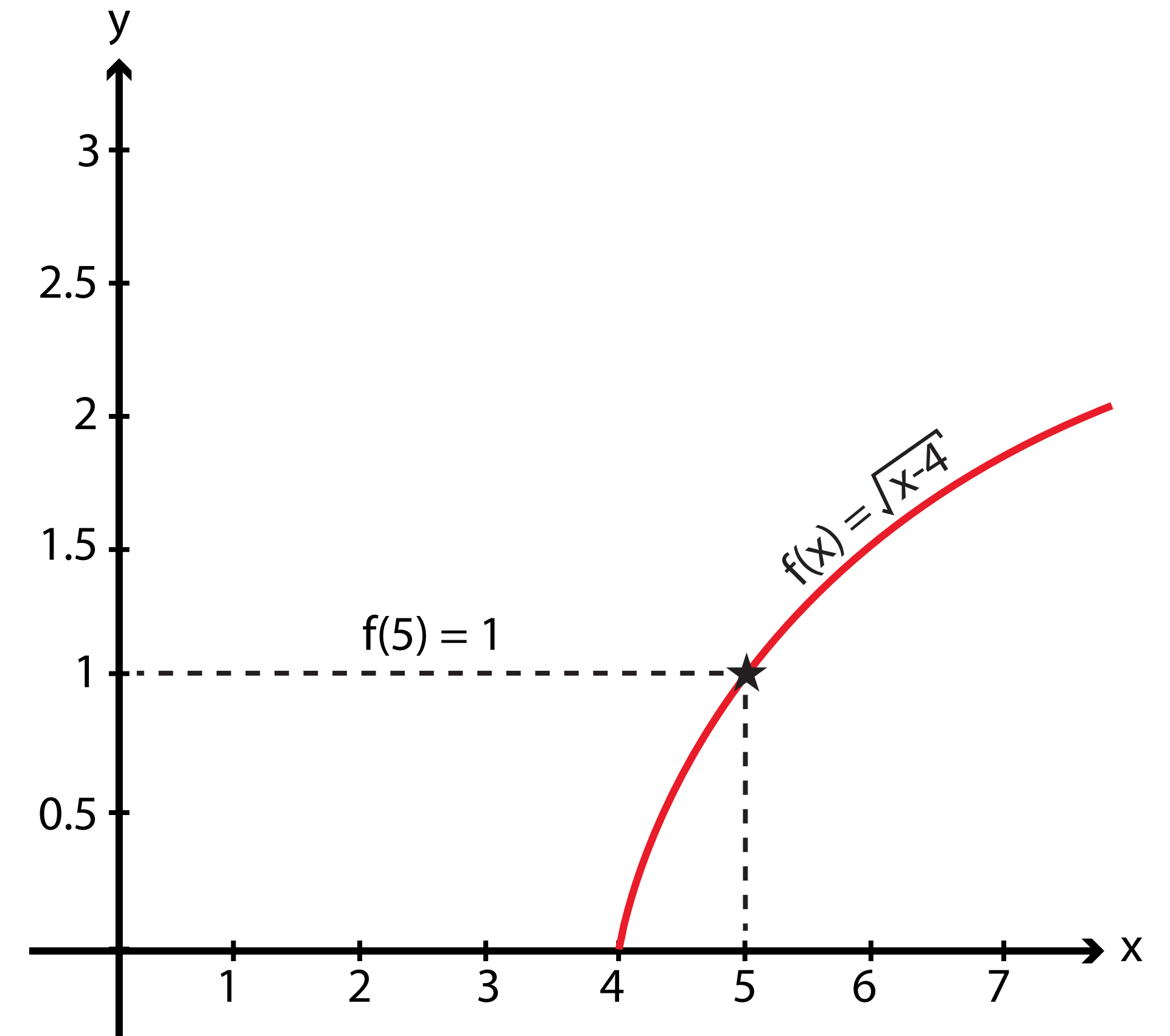


Funktionen

Funktionen sind an jenen Stellen nicht definiert, wo das Argument einer Wurzel negativ wird.

$$f(x) = \sqrt{x - 4}$$

$$f: \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

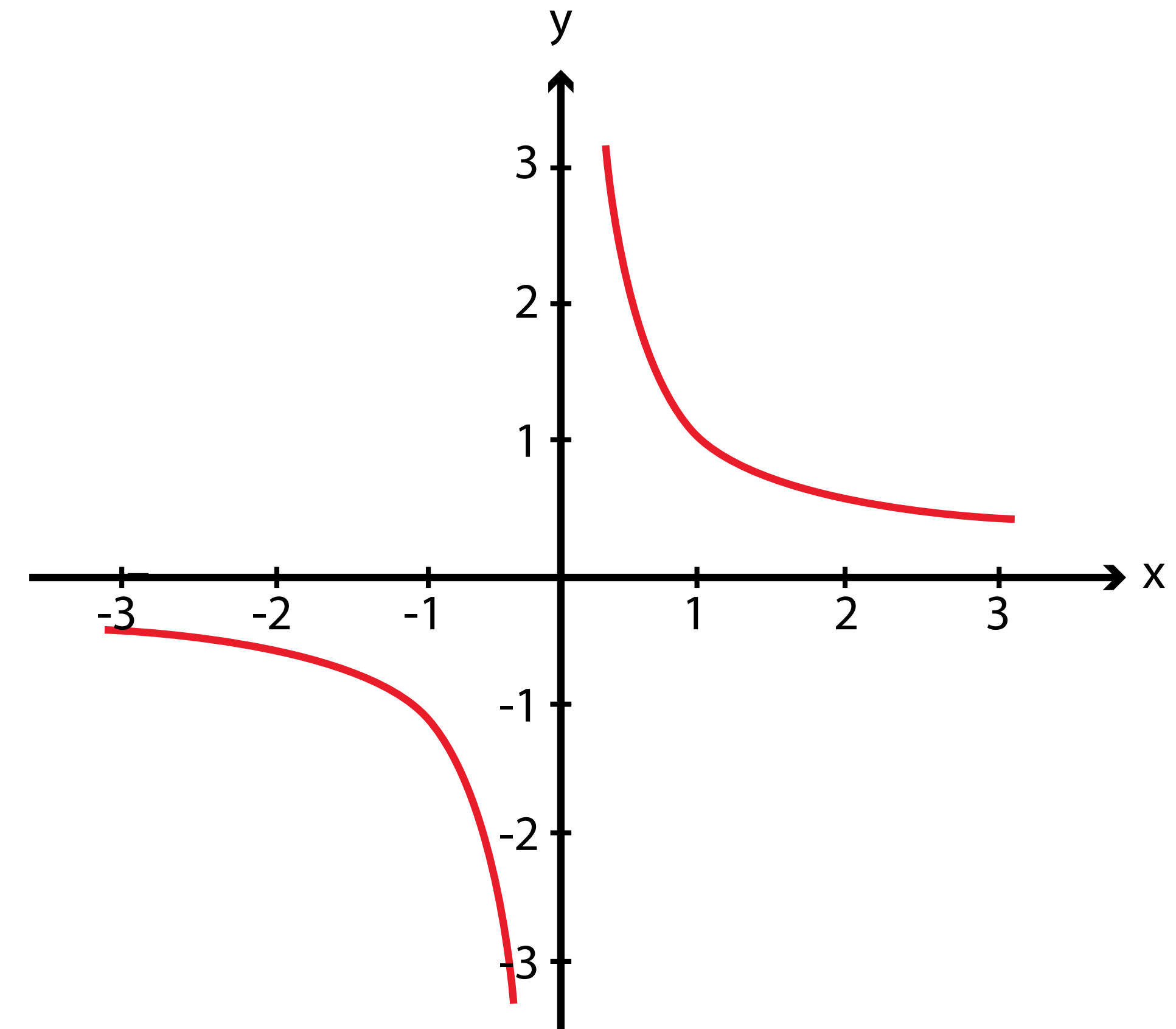


Funktionen

Funktionen sind an jenen Stellen nicht definiert, wo durch 0 geteilt werden würde.

$$f(x) = 1/x$$

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

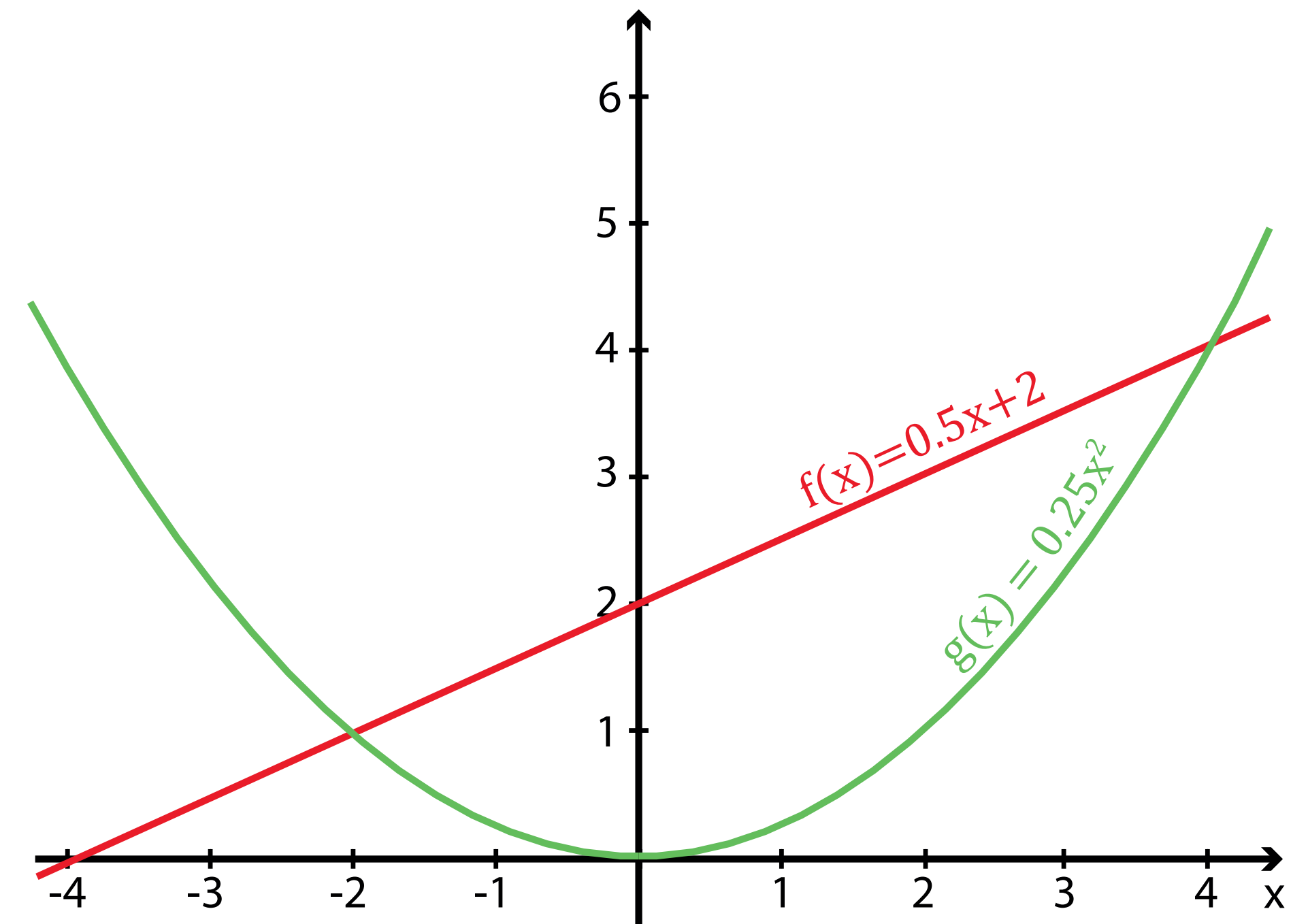


Grenzwerte

Der Grenzwert zeigt uns, gegen welchen Wert $f(x)$ eine Funktion strebt, wenn der Wert x gegen einen Wert x_0 geht.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \dots$$

Wir schieben den Wert x den wir einsetzen immer näher an x_0 heran und beobachten das Verhalten von $f(x)$.



Grenzwerte

An allen Stellen, an denen die Funktionen stetig ist (kommt später) gibt es keinen Unterschied zwischen Grenzwert und Funktionswert.

$$f(x) = 0.5x + 2$$

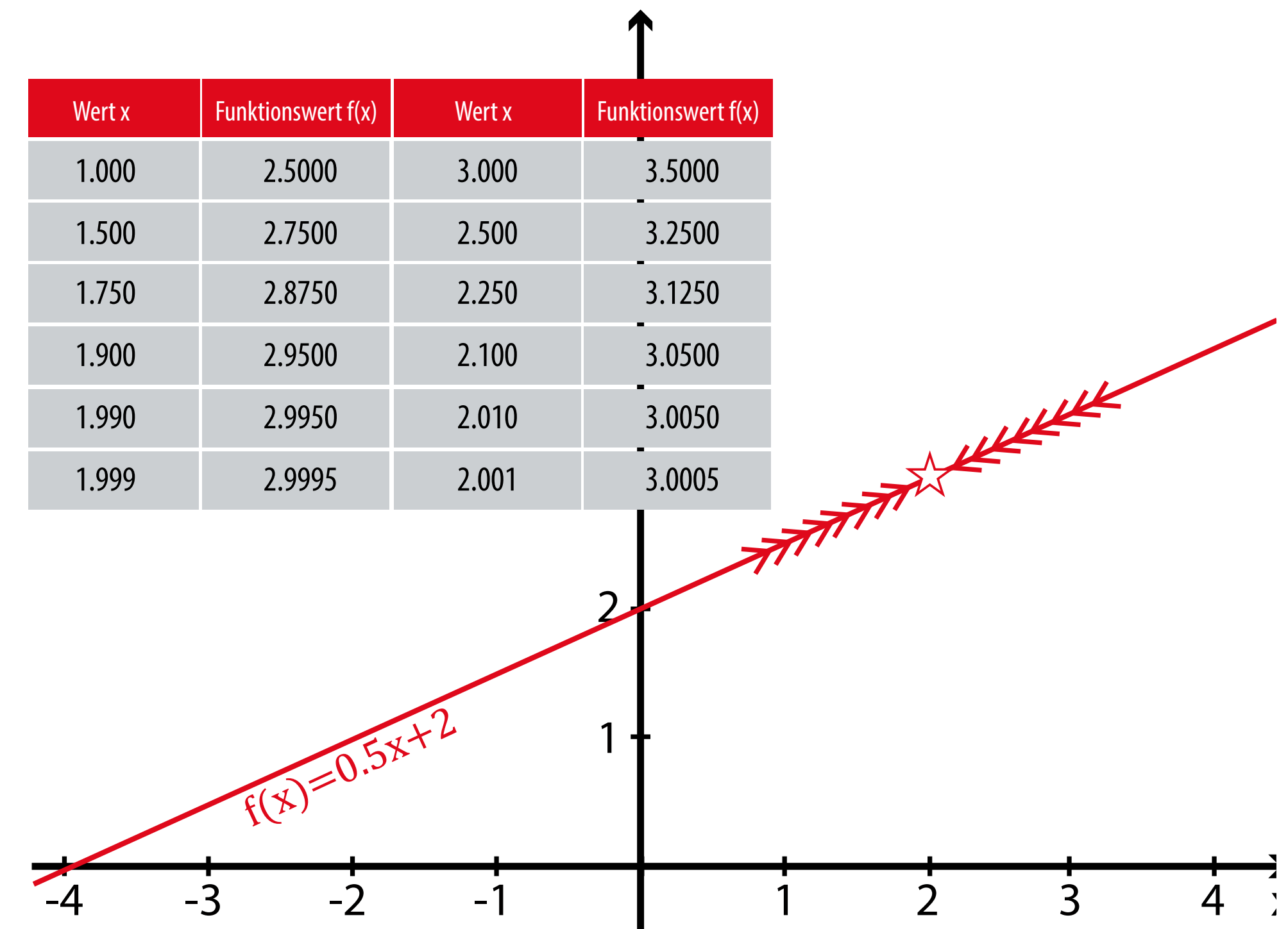
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

$$g(x) = 0.25x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$$



Grenzwerte

Mit dem Grenzwert können wir angeben, wie sich eine Funktion verhält, wenn der eingesetzte Wert gegen $\pm \infty$ geht.

$$f(x) = 0.5x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

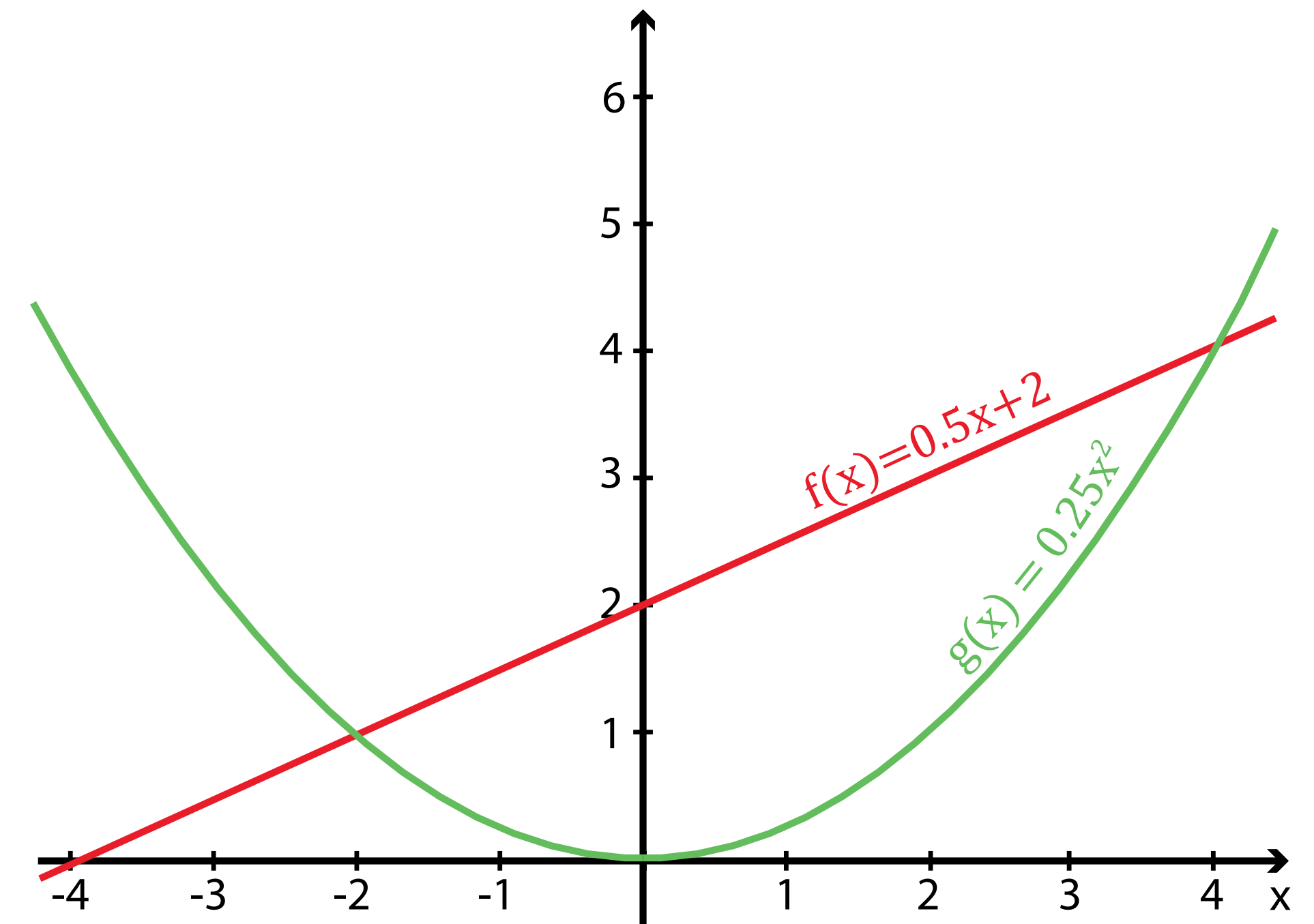
~~$$f(\infty) = \infty$$~~

$$g(x) = 0.25x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$$

~~$$g(\infty) = \infty$$~~



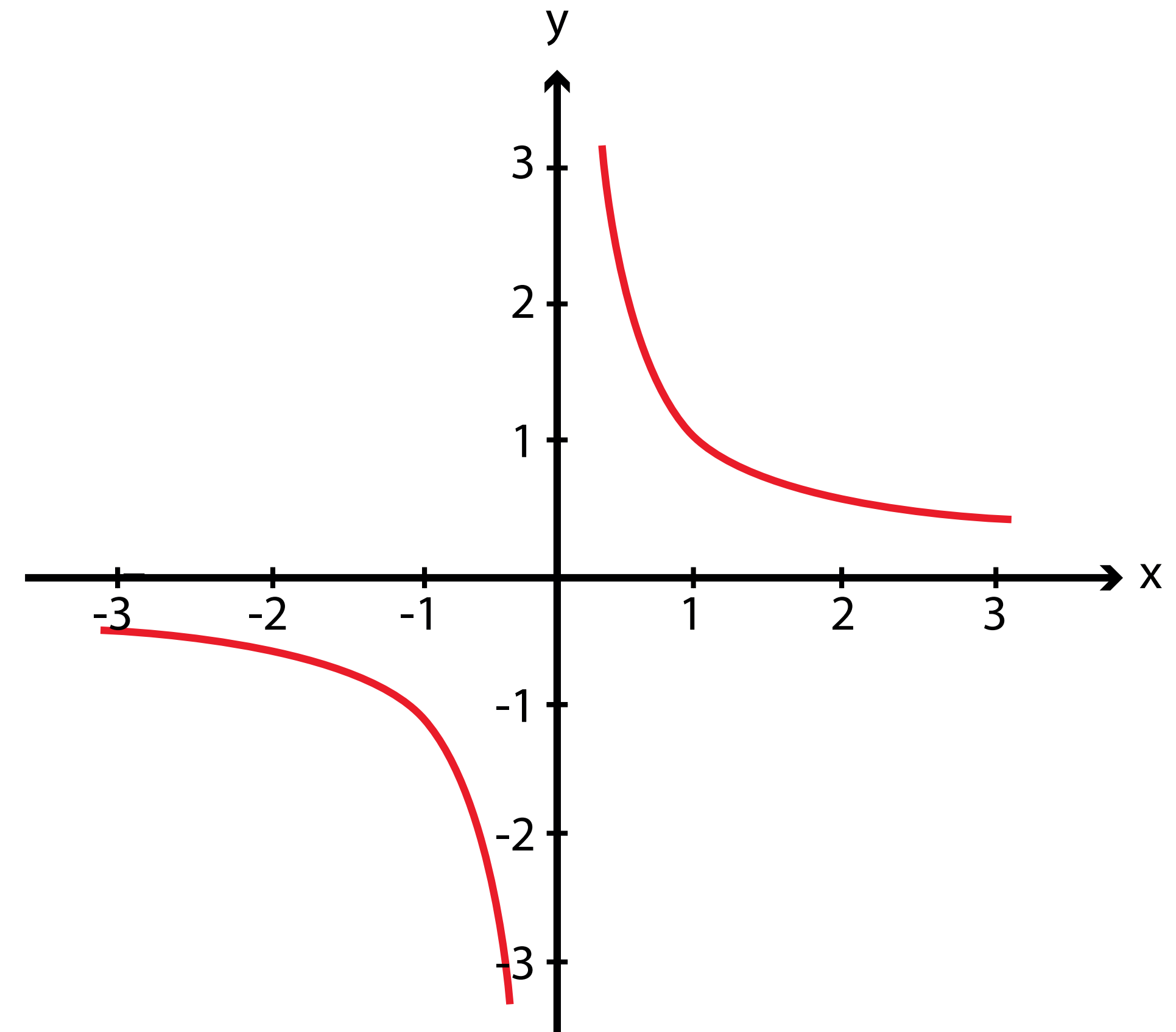
Grenzwerte

Mit dem Grenzwert können wir Stellen x_0 untersuchen, an denen die Funktion nicht definiert ist.

Im folgenden Beispiel können wir die 0 nicht einsetzen, aber wir können mit dem Grenzwert das Verhalten der Funktion für x gegen 0 untersuchen!

$$f(x) = 1/x$$

$$\cancel{f(0) = \infty}$$



Grenzwerte

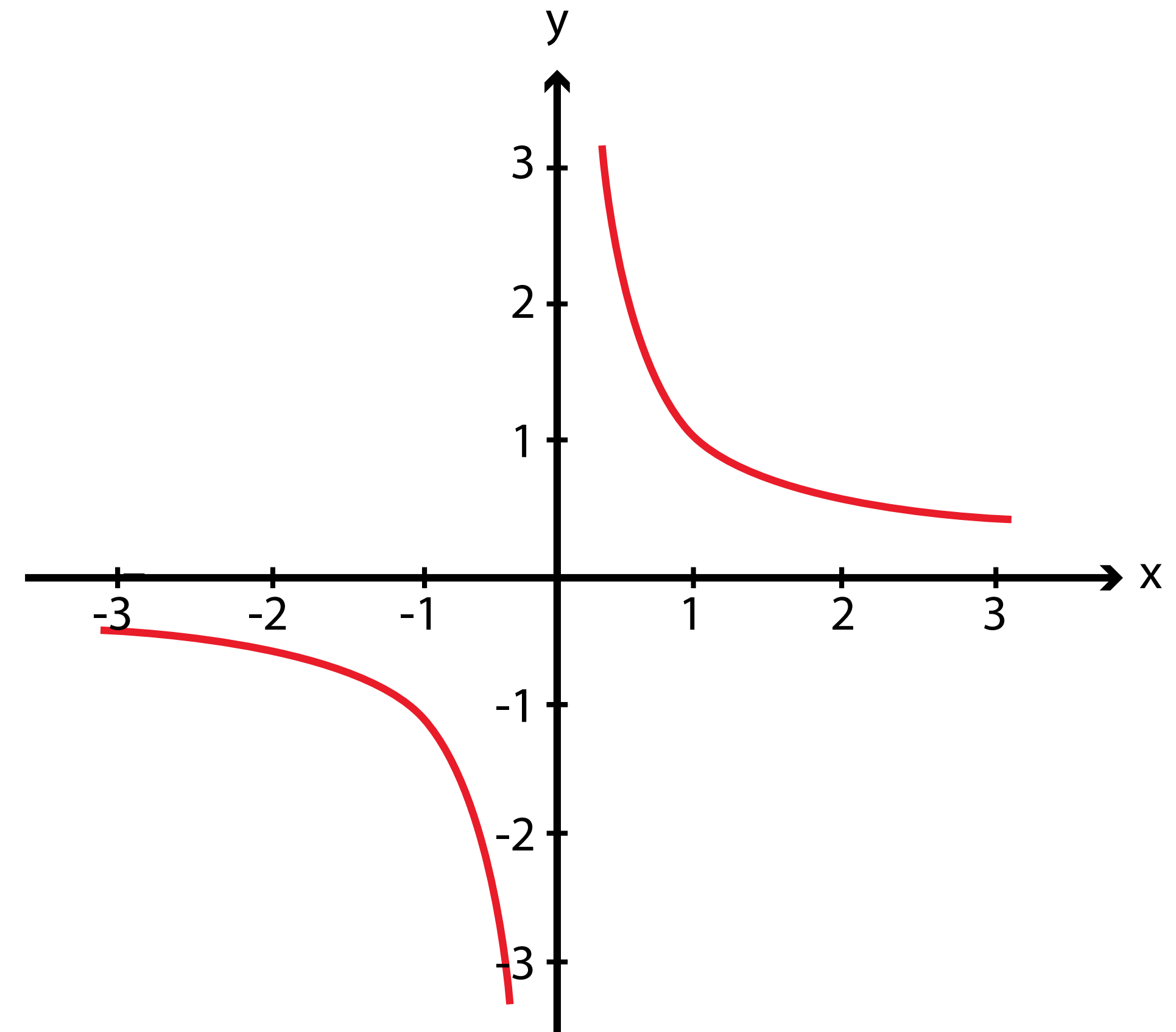
Bei Stellen x_0 die nicht unendlich sind, kann es einen Unterschied machen, ob wir uns von der rechten oder linken Seite annähern:

$$f(x) = 1/x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{linksseitiger Grenzwert}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{rechtsseitiger Grenzwert}$$

Die Richtung, aus der wir uns Annähern wird mit einem kleinen Plus oder Minus angezeigt.



Grenzwerte

Wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert denselben Wert haben, dann existiert der Grenzwert und hat auch eben diesen Wert.

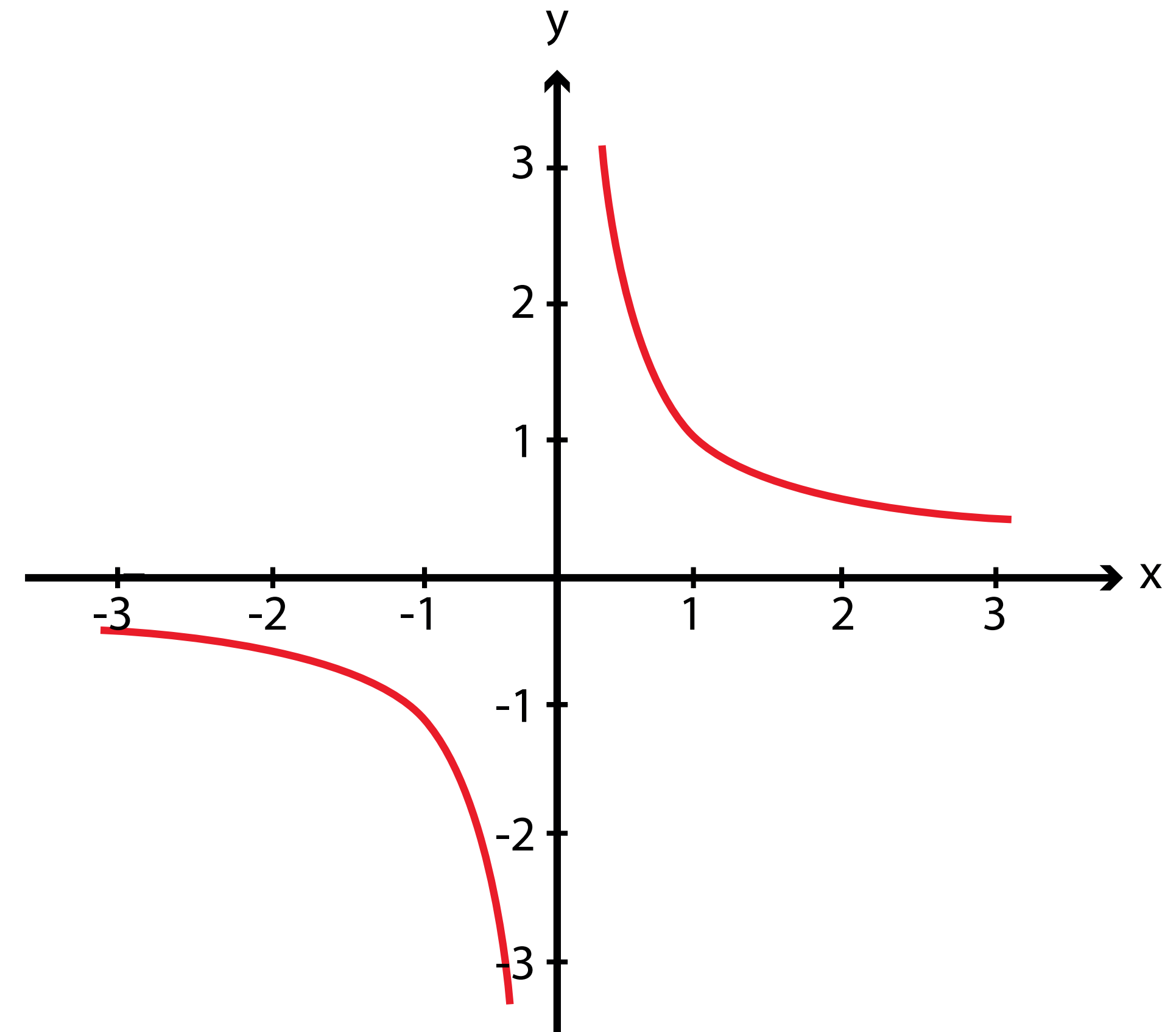
$$f(x) = 1/x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ???$$

Hier ist das nicht der Fall. Der richtungsunabhängige Grenzwert für x gegen 0 existiert nicht.



Grenzwerte

Wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert denselben Wert haben, dann existiert der Grenzwert und hat auch eben diesen Wert.

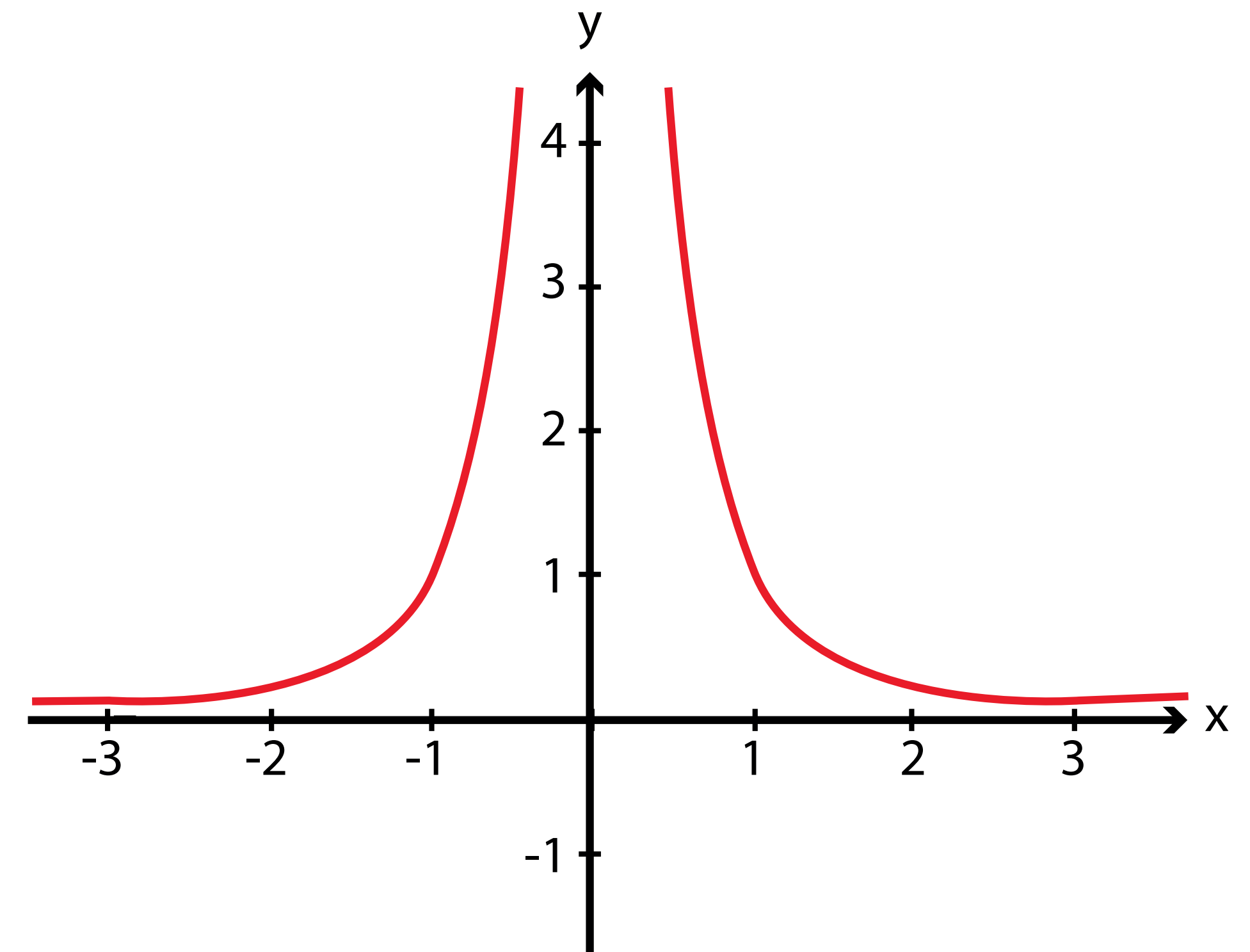
$$f(x) = 1/x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

Hier existiert den Grenzwert dagegen schon!



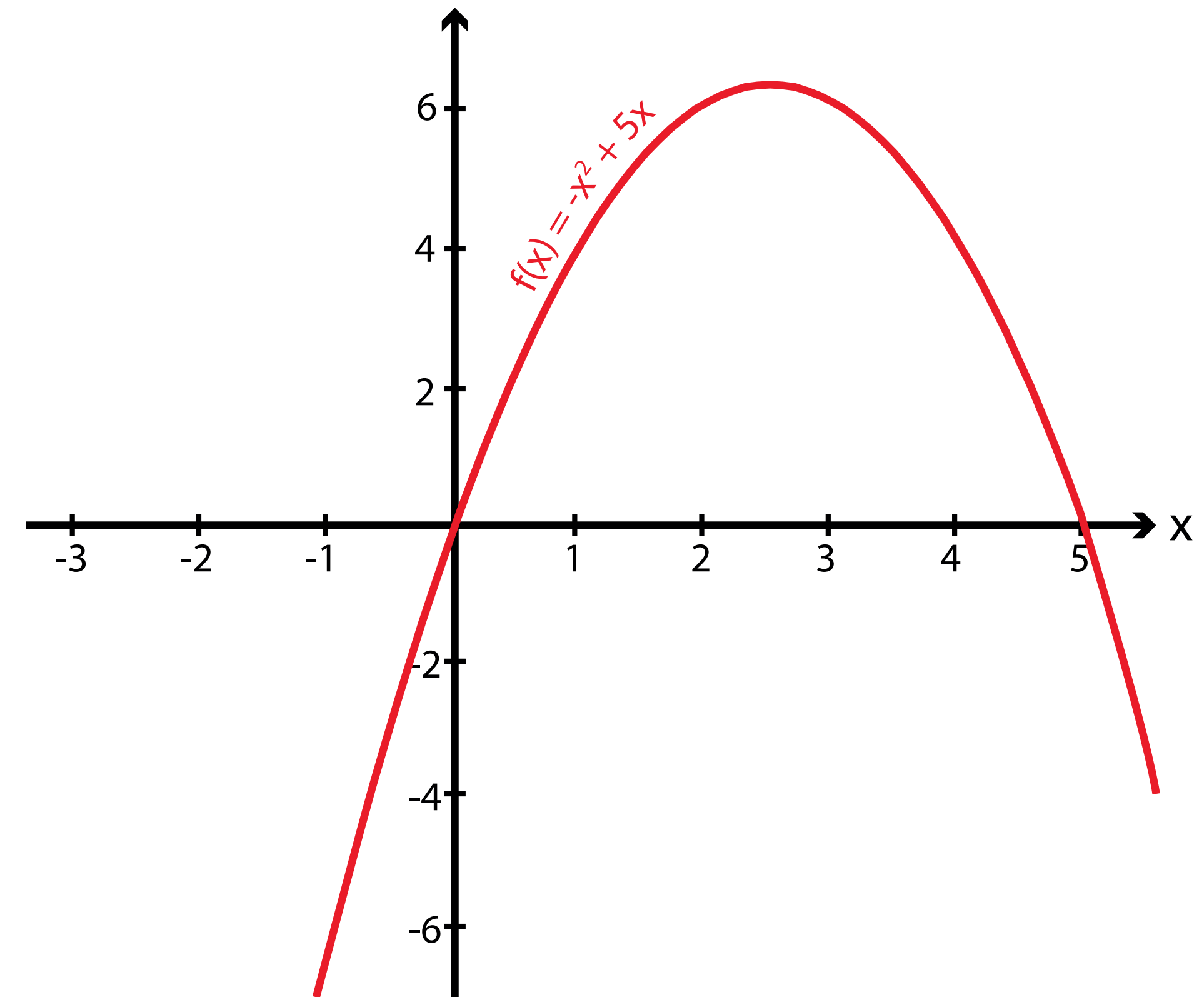
Grenzwerte

Wir betrachten nun explizit Grenzwerte gegen plus/minus unendlich. Wie können wir diese Grenzwerte ohne Schaubilder oder Wertetabellen berechnen?

Bei Polynomen (ganzrationalen Funktionen) setzt sich die höhere Potenz beim Grenzwert gegen plus/minus unendlich durch.

Im folgenden Beispiel gibt der Term $-x^2$ den Ton an. Wir müssen überlegen, wie sich $-x^2$ verhält, wenn x gegen plus oder minus unendlich geht!

$$f(x) = -x^2 + 5x$$



Grenzwerte

Das Verhalten der stärksten Potenz für x gegen plus oder minus unendlich können wir der rechts gezeigten Tabelle entnehmen.

Beim Term $-x^2$ ist der Vorfaktor (-1) negativ und der Exponent (2) gerade. Daher gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$$

Grenzwerte von Monomen	$\lim_{x \rightarrow -\infty}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty}$
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

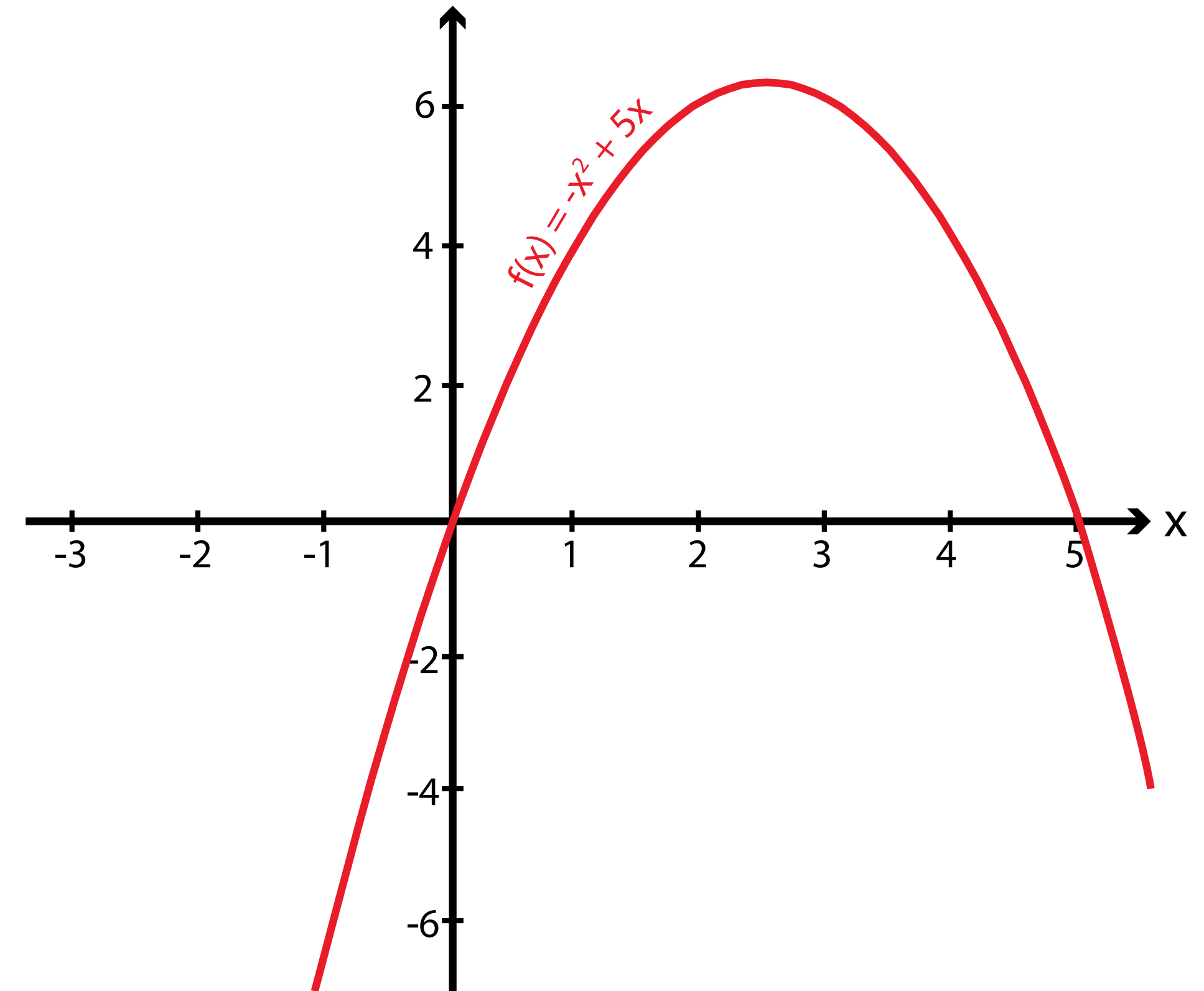
Grenzwerte

Die Funktion $f(x)$ verhält sich bei der Grenzwertbetrachtung für x gegen plus/minus unendlich genauso wie das Monom $-x^2$.

$$f(x) = -x^2 + 5x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

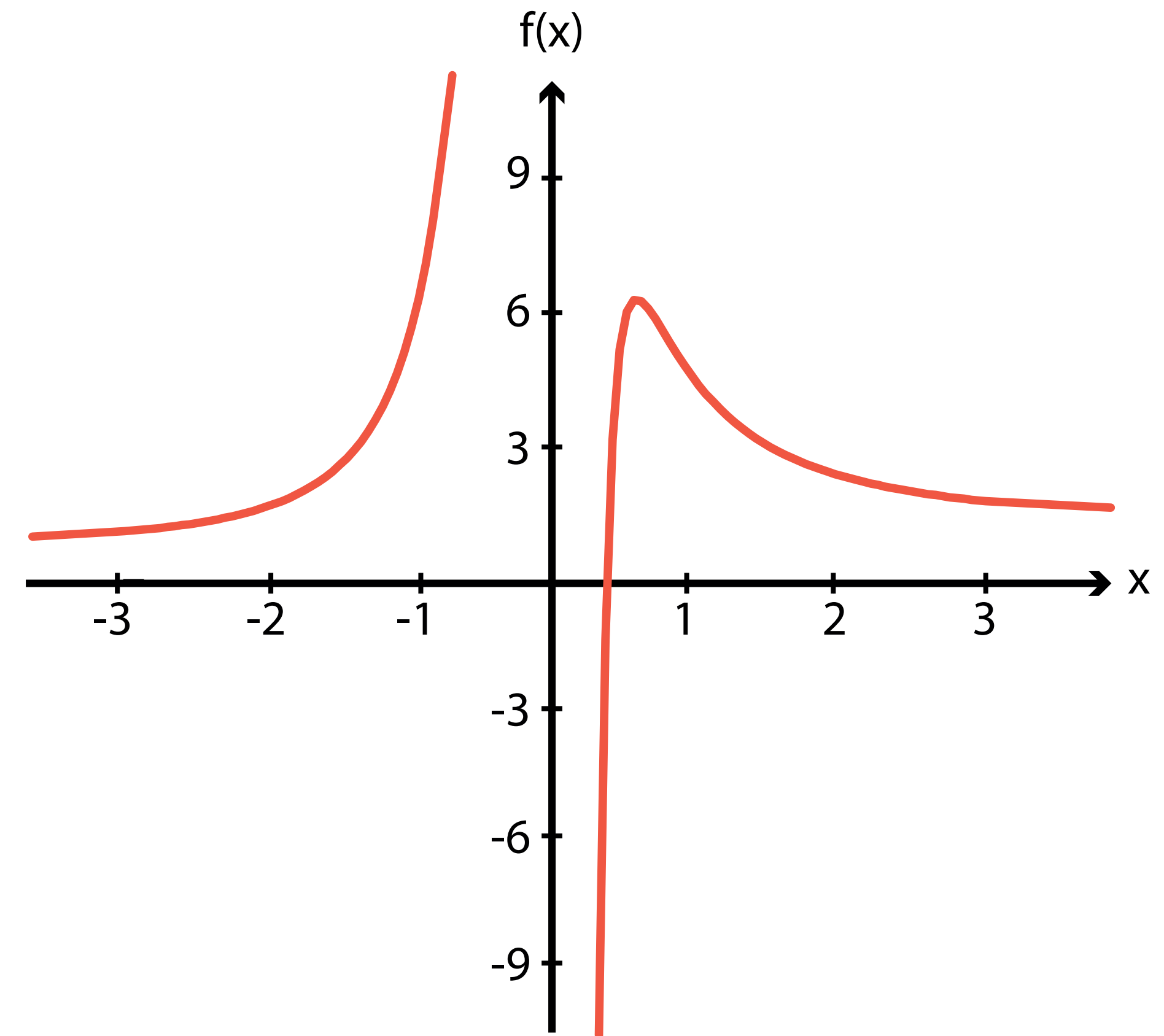


Grenzwerte

Bei gebrochen rationalen Funktionen betrachten wir Zähler und Nenner zunächst getrennt voneinander.

Wieder suchen wir nach der jeweils größten Potenz und blenden die anderen Terme aus!

$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x^3} \quad g(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x}$$



Grenzwerte

Die größte Potenz von f(x) im Zähler hat folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -\infty$$

Die größte Potenz von f(x) im Nenner hat folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$$

Zwischenergebnis

$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x^3} \quad \frac{-x^2}{x^3}$$

$$g(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x} \quad \frac{-x^2}{x}$$

Grenzwerte

Sowohl Zähler als auch Nenner werden unendlich groß! Was bedeutet das für den Wert des Bruches?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-\infty}{-\infty} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{-\infty}{\infty}$$

Zwischenergebnis

$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x^3} \quad \frac{-x^2}{x^3}$$

$$g(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x} \quad \frac{-x^2}{x}$$

Grenzwerte

Zwischen Zähler und Nenner setzt sich die stärkere Potenz durch!
Bei $f(x)$ gehen sowohl Zähler als auch Nenner gegen (minus) unendlich ...

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-\infty}{-\infty} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{-\infty}{\infty}$$

... aber der Nenner tut es schneller und damit gilt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Zwischenergebnis

$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x^3} \quad \frac{-x^2}{x^3}$$

$$g(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x} \quad \frac{-x^2}{x}$$

Grenzwerte

Die größte Potenz von $g(x)$ im Zähler hat folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -\infty$$

Die größte Potenz von $g(x)$ im Nenner hat folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

Zwischenergebnis

$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x^3} \quad \frac{-x^2}{x^3}$$

$$g(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x} \quad \frac{-x^2}{x}$$

Grenzwerte

Zwischen Zähler und Nenner setzt sich die stärkere Potenz durch!
Bei $g(x)$ gehen Zähler und Nenner gegen (minus) unendlich ...

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{-\infty}{-\infty} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{-\infty}{\infty}$$

... aber der Zähler tut es schneller und damit gilt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$$

Zwischenergebnis

$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x^3} \quad \frac{-x^2}{x^3}$$

$$g(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x} \quad \frac{-x^2}{x}$$

Grenzwerte

Zwischen Zähler und Nenner setzt sich die stärkere Potenz durch!
Bei $g(x)$ gehen Zähler und Nenner gegen (minus) unendlich ...

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{-\infty}{-\infty} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{-\infty}{\infty}$$

... aber der Zähler tut es schneller und damit gilt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$$

Zwischenergebnis

$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x^3} \quad \frac{-x^2}{x^3}$$

$$g(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x} \quad \frac{-x^2}{x}$$



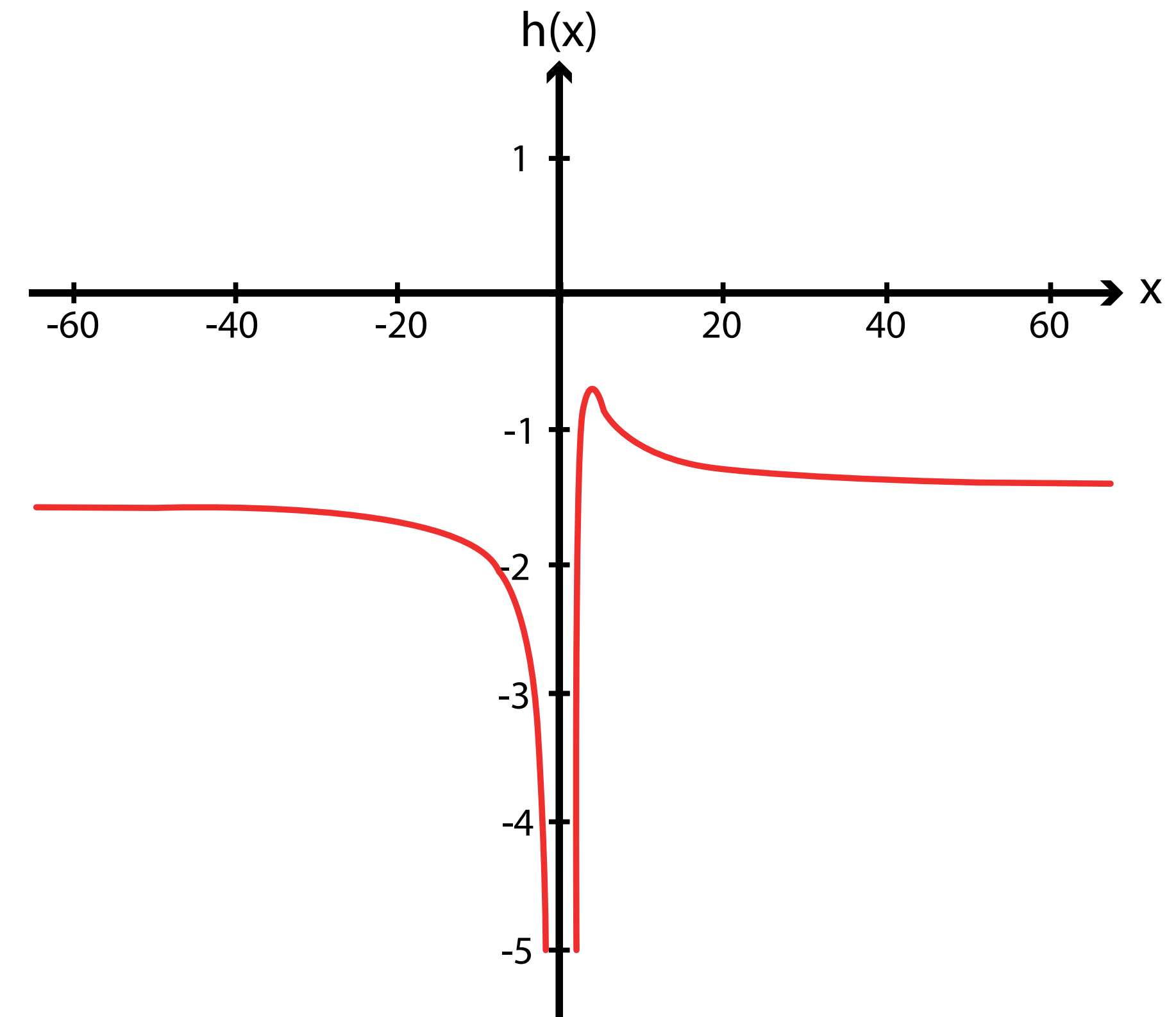
Hinweis: Die Vorzeichen ergeben sich aus den Vorzeichen vor den Unendlich-Zeichen in Zähler und Nenner.

Zähler	Minus durch Minus gibt Plus
Nenner	Minus durch Plus gibt Minus

Grenzwerte

Zwischen Zähler und Nenner setzt sich die stärkere Potenz durch, aber was passiert bei einem Gleichstand? Betrachten wir dazu:

$$h(x) = \frac{-3x^2 + 8x - 10}{2x^2}$$



Grenzwerte

Zwischen Zähler und Nenner setzt sich die stärkere Potenz durch, aber was passiert bei einem Gleichstand? Betrachten wir dazu:

$$h(x) = \frac{-3x^2 + 8x - 10}{2x^2}$$

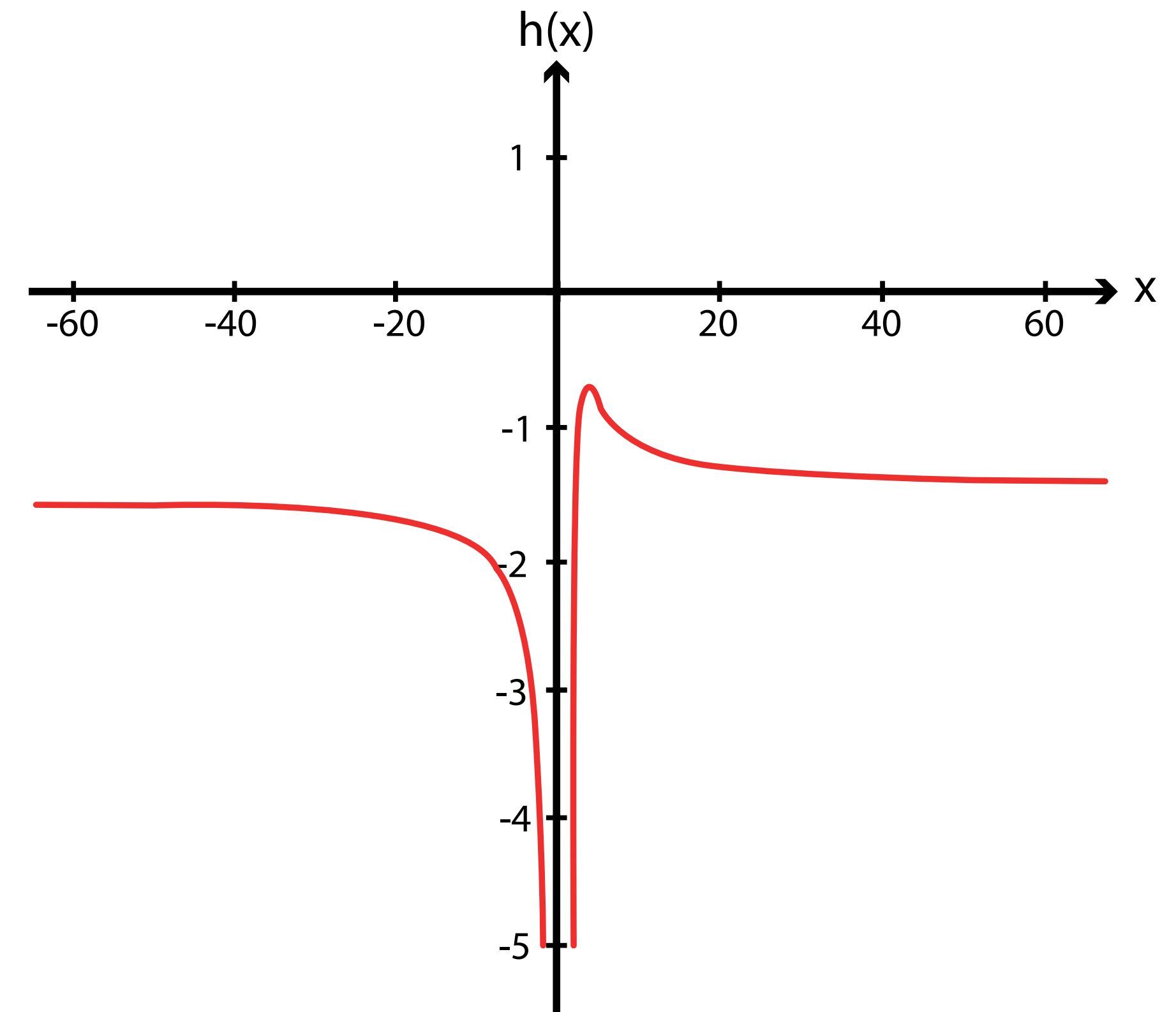
Wieder betrachten wir die stärkste Potenz im Zähler und Nenner getrennt voneinander:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -3x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 = \infty$$



Grenzwerte

Da Zähler und Nenner gleich schnell gegen unendlich gehen, geht der Bruch gegen ...

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\frac{3}{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\frac{3}{2}$$

Wir erkennen die Faktoren der stärksten Potenzen wieder!

Zwischenergebnis

$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x^3} \quad \frac{-x^2}{x^3}$$

$$g(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x} \quad \frac{-x^2}{x}$$

$$h(x) = \frac{-3x^2 + 8x - 10}{2x^2} \quad \frac{-3x^2}{2x^2}$$

Grenzwerte

Gib die Grenzwerte der folgenden Funktionen nach $\pm\infty$ an. Gib wenn möglich auch rechts- & linksseitige Grenzwerte für Polstellen an.

$$f(x) = 18x - x^2$$

$$g(x) = \frac{4}{-x^2}$$

$$h(x) = x + x^{-1}$$

$$k(x) = \frac{16x^3}{2x(1+4x^2)}$$

Grenzwerte

$$f(x) = 18x - x^2 \quad \text{stärkste Potenz ist } -x^2$$

Der Exponent 2 ist gerade, der Vorfaktor -1 negativ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -\infty$$

Grenzwerte von
Monomen

$\lim_{x \rightarrow -\infty}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty}$

Exponent ungerade
Vorfaktor plus

$-\infty$

∞

Exponent ungerade
Vorfaktor minus

∞

$-\infty$

Exponent gerade
Vorfaktor plus

∞

∞

Exponent gerade
Vorfaktor minus

$-\infty$

$-\infty$

Grenzwerte

$$g(x) = \frac{4}{-x^2} \quad \text{Verhalten gegen } \pm \text{ unendlich}$$

Im Zähler ist die 4 die stärkste Potenz, im Nenner $-x^2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4 = 4 \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4 = 4 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -\infty$$

Der Zähler ist immer 4, der Nenner wird unendlich groß

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

Grenzwerte von
Monomen

$\lim_{x \rightarrow -\infty}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty}$

Exponent ungerade
Vorfaktor plus

$-\infty$

∞

Exponent ungerade
Vorfaktor minus

∞

$-\infty$

Exponent gerade
Vorfaktor plus

∞

∞

Exponent gerade
Vorfaktor minus

$-\infty$

$-\infty$

Grenzwerte

$$g(x) = \frac{4}{-x^2} \quad \text{Polstellen}$$

Der Nenner wird 0, wenn $-x^2 = 0$, also wenn $x = 0$

Wir betrachten das Verhalten von $g(x)$ für $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

Links- und rechtsseitiger Grenzwert sind gleich

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

Grenzwerte von
Monomen

$\lim_{x \rightarrow -\infty}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty}$

Exponent ungerade
Vorfaktor plus

$-\infty$

∞

Exponent ungerade
Vorfaktor minus

∞

$-\infty$

Exponent gerade
Vorfaktor plus

∞

∞

Exponent gerade
Vorfaktor minus

$-\infty$

$-\infty$

Grenzwerte

$h(x) = x + x^{-1}$ Verhalten gegen \pm unendlich

Die stärkste Potenz ist x (entspricht x^1)

Ungerader Exponent 1 mit positivem Vorfaktor 1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

Grenzwerte von
Monomen

$\lim_{x \rightarrow -\infty}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty}$

Exponent ungerade
Vorfaktor plus

$-\infty$

∞

Exponent ungerade
Vorfaktor minus

∞

$-\infty$

Exponent gerade
Vorfaktor plus

∞

∞

Exponent gerade
Vorfaktor minus

$-\infty$

$-\infty$

Grenzwerte

Polstellen $h(x) = x + x^{-1} = x + \frac{1}{x}$

Division durch 0, wenn $x = 0$ da $x^{-1} = 1/x$

Wir betrachten das Verhalten von $h(x)$ für $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \infty$$

Links- und rechtsseitiger Grenzwert unterschiedlich

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) \text{ existiert nicht}$$

Grenzwerte von
Monomen

$\lim_{x \rightarrow -\infty}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty}$

Exponent ungerade
Vorfaktor plus

$-\infty$

∞

Exponent ungerade
Vorfaktor minus

∞

$-\infty$

Exponent gerade
Vorfaktor plus

∞

∞

Exponent gerade
Vorfaktor minus

$-\infty$

$-\infty$

Grenzwerte

$$k(x) = \frac{16x^3}{2x(1+4x^2)} = \frac{16x^3}{2x+8x^3}$$

Im Zähler ist $16x^3$ stärkste Potenz, im Nenner $8x^3$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 16x^3 = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 8x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 16x^3 = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 8x^3 = \infty$$

Zähler und Nenner werden beide unendlich groß

Zähler und Nenner sind mit Exponent 3 gleich stark

Grenzwerte von
Monomen

$\lim_{x \rightarrow -\infty}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty}$

Exponent ungerade
Vorfaktor plus

$-\infty$

∞

Exponent ungerade
Vorfaktor minus

∞

$-\infty$

Exponent gerade
Vorfaktor plus

∞

∞

Exponent gerade
Vorfaktor minus

$-\infty$

$-\infty$

Grenzwerte

Zähler und Nenner werden beide unendlich groß

Zähler und Nenner sind mit Exponent 3 gleich stark

Grenzwert entspricht Bruch der Vorfaktoren 16/8

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 2$$

Grenzwerte von
Monomen

$\lim_{x \rightarrow -\infty}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty}$

Exponent ungerade
Vorfaktor plus

$-\infty$

∞

Exponent ungerade
Vorfaktor minus

∞

$-\infty$

Exponent gerade
Vorfaktor plus

∞

∞

Exponent gerade
Vorfaktor minus

$-\infty$

$-\infty$

Grenzwerte

Wir erkennen eine Division durch 0, wenn $x = 0$ aber:

$$k(x) = \frac{16x^3}{2x(1+4x^2)} = \frac{16x^3}{2x+8x^3} = \frac{16x^2}{2+8x^2}$$

Führen wir die Grenzwertbetrachtung dennoch durch, erhalten wir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 0$$

Grenzwerte von
Monomen

$\lim_{x \rightarrow -\infty}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty}$

Exponent ungerade
Vorfaktor plus

$-\infty$

∞

Exponent ungerade
Vorfaktor minus

∞

$-\infty$

Exponent gerade
Vorfaktor plus

∞

∞

Exponent gerade
Vorfaktor minus

$-\infty$

$-\infty$

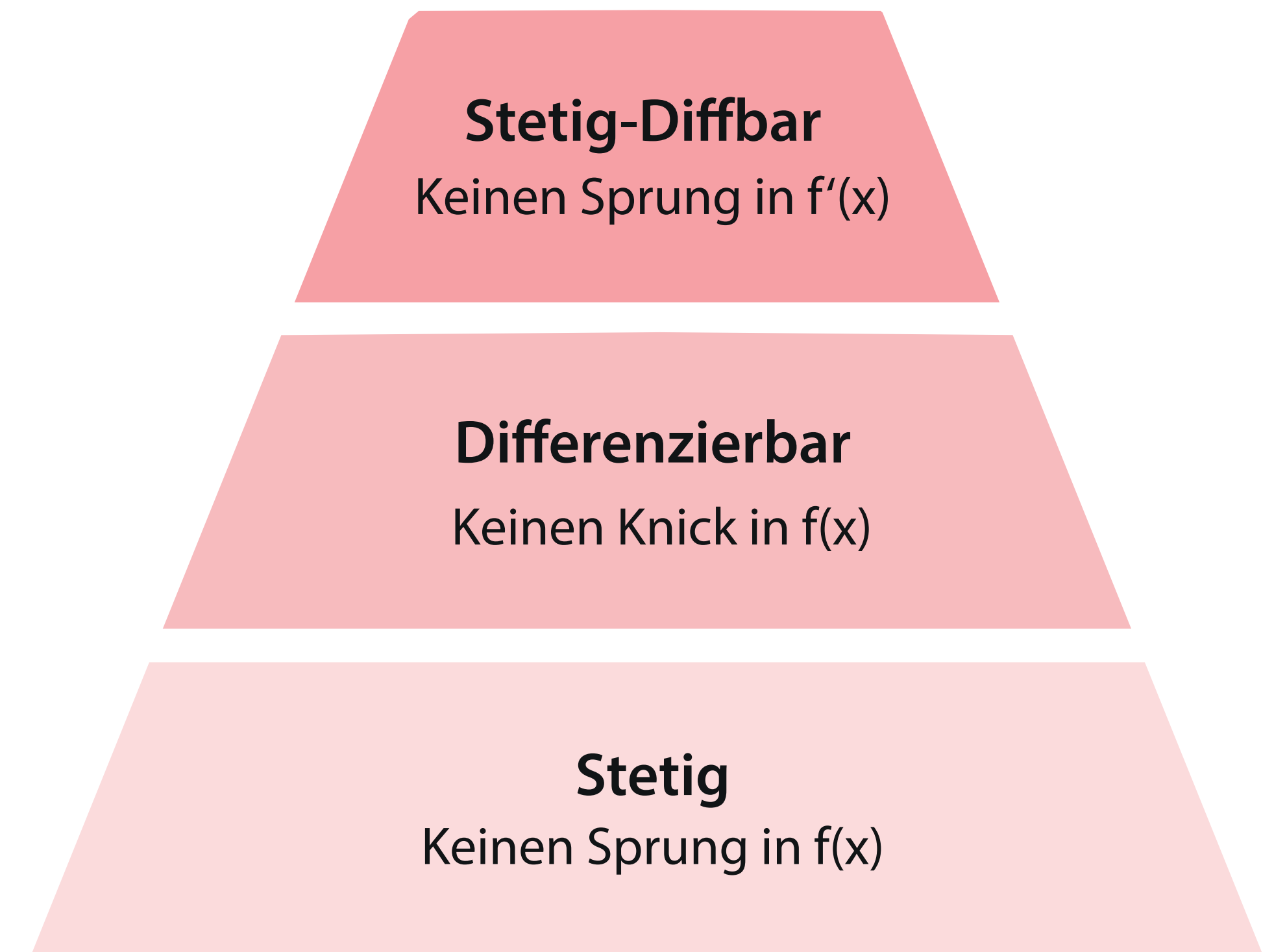
Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Wir betrachten nun die beiden Eigenschaften Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Diese Eigenschaften bauen aufeinander auf:

Eine Funktion die nicht stetig ist, kann nicht differenzierbar sein.

Differenzierbare Funktionen sind immer auch stetig

Nicht jede stetige Funktionen ist auch differenzierbar.



Stetigkeit

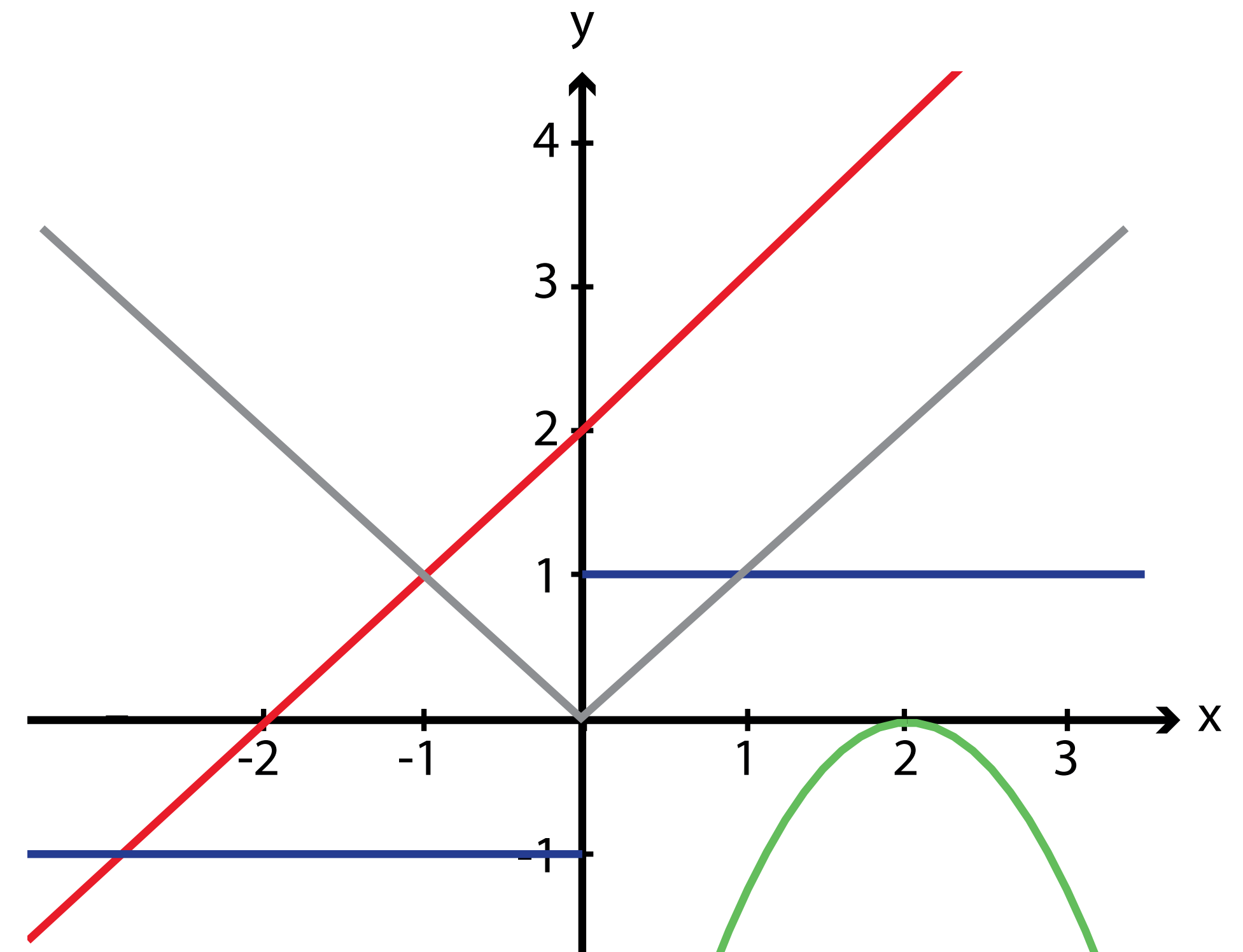
Das einfachere Kriterium ist die Stetigkeit. Wir betrachten dazu folgende Funktionen:

$$f(x) = x + 2$$

$$g(x) = -(x-2)^2$$

$$h(x) = \text{sign}(x)$$

$$j(x) = |x|$$

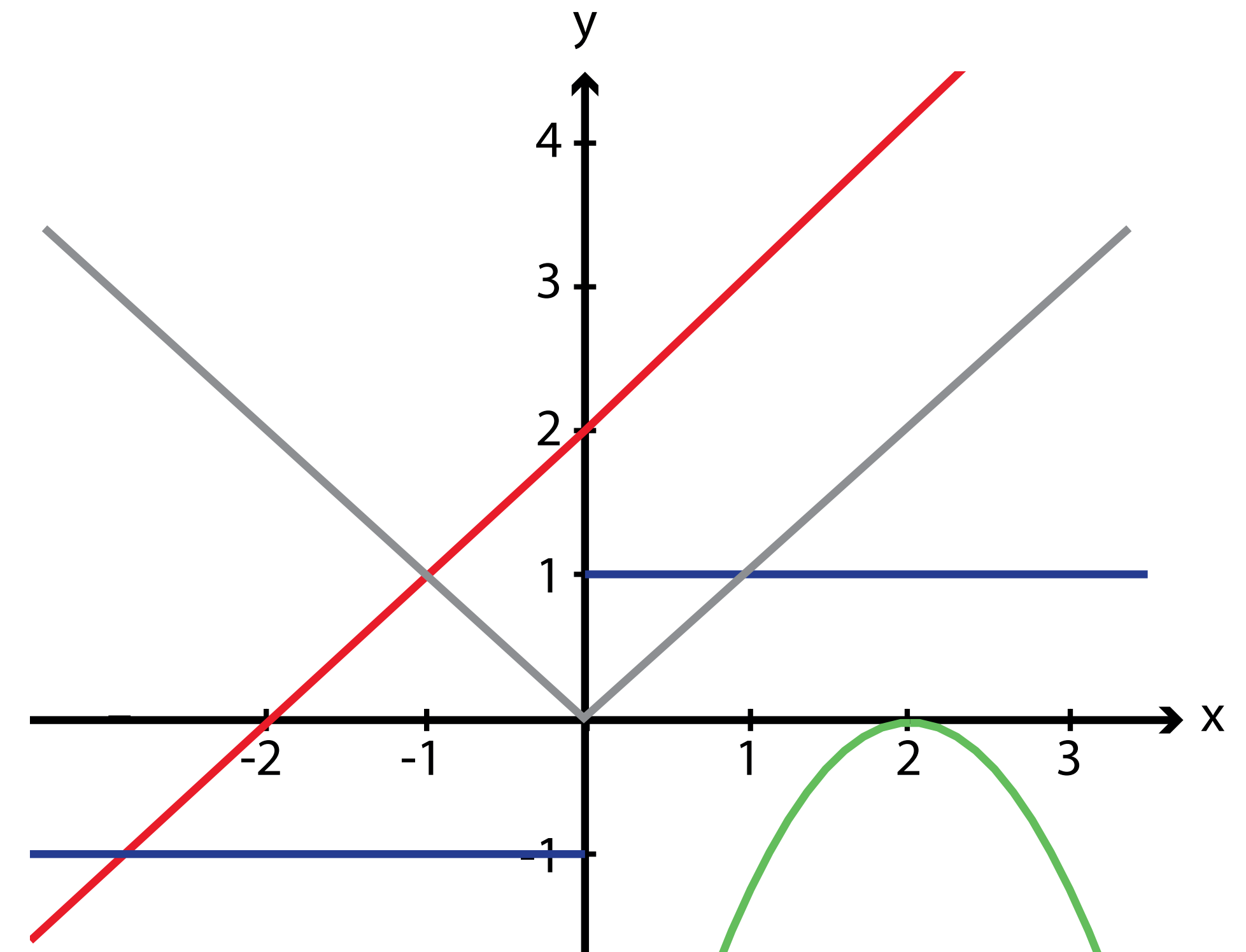


Stetigkeit

Wir können die Stetigkeit grafisch bzw. optisch definieren:

Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn ihr Schaubild keine Sprünge macht.

Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn man sie ohne Absetzen des Stiftes zeichnen kann.



Stetigkeit

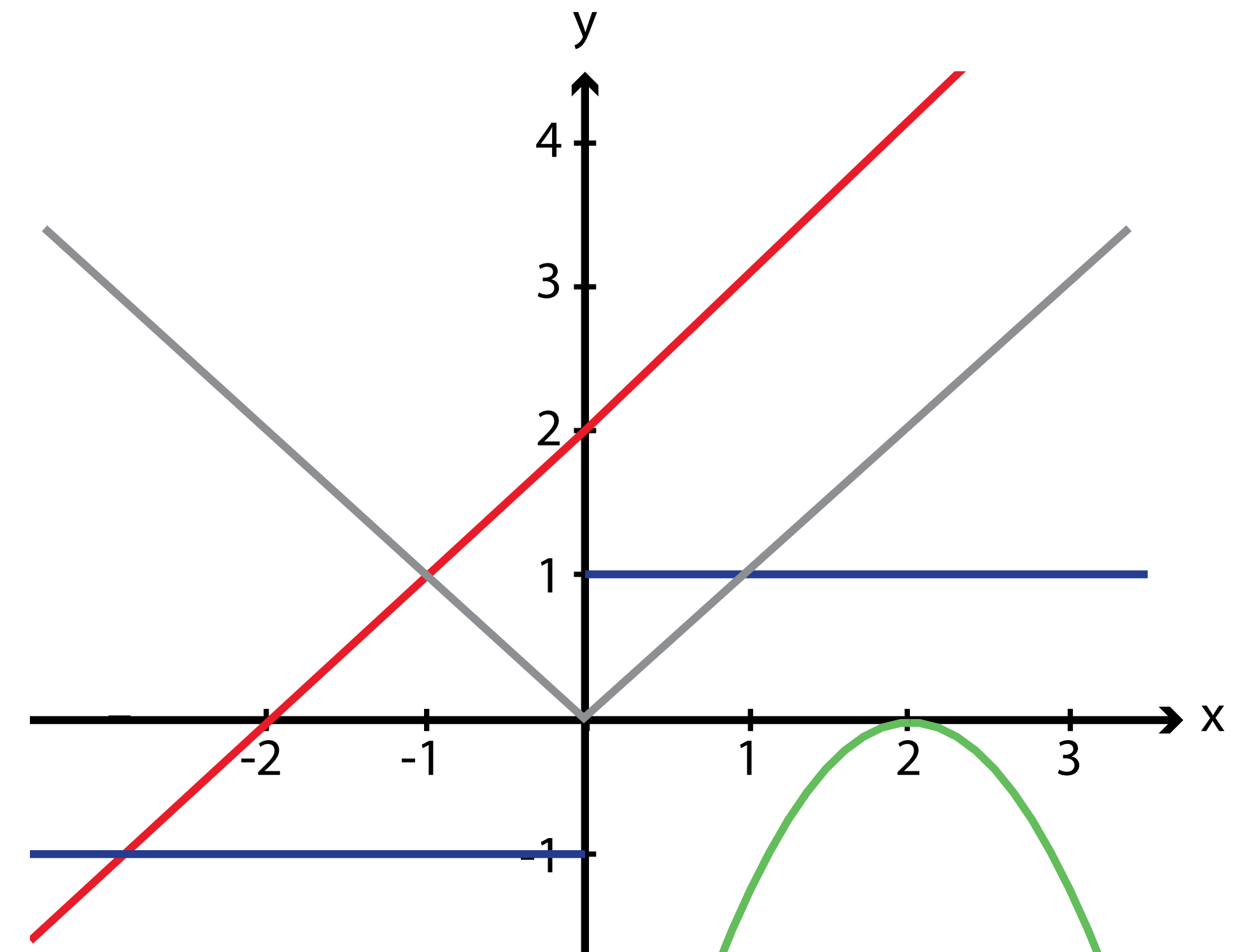
Nach diesen Definitionen sind alle Funktionen bis auf $h(x)$ stetig. Diese macht einen Sprung bei $x=0$, d. h. dort müssten wir den Stift neu ansetzen!

$$f(x) = x + 2$$

$$g(x) = -(x-2)^2$$

$$h(x) = \text{sign}(x)$$

$$j(x) = |x|$$



Stetigkeit

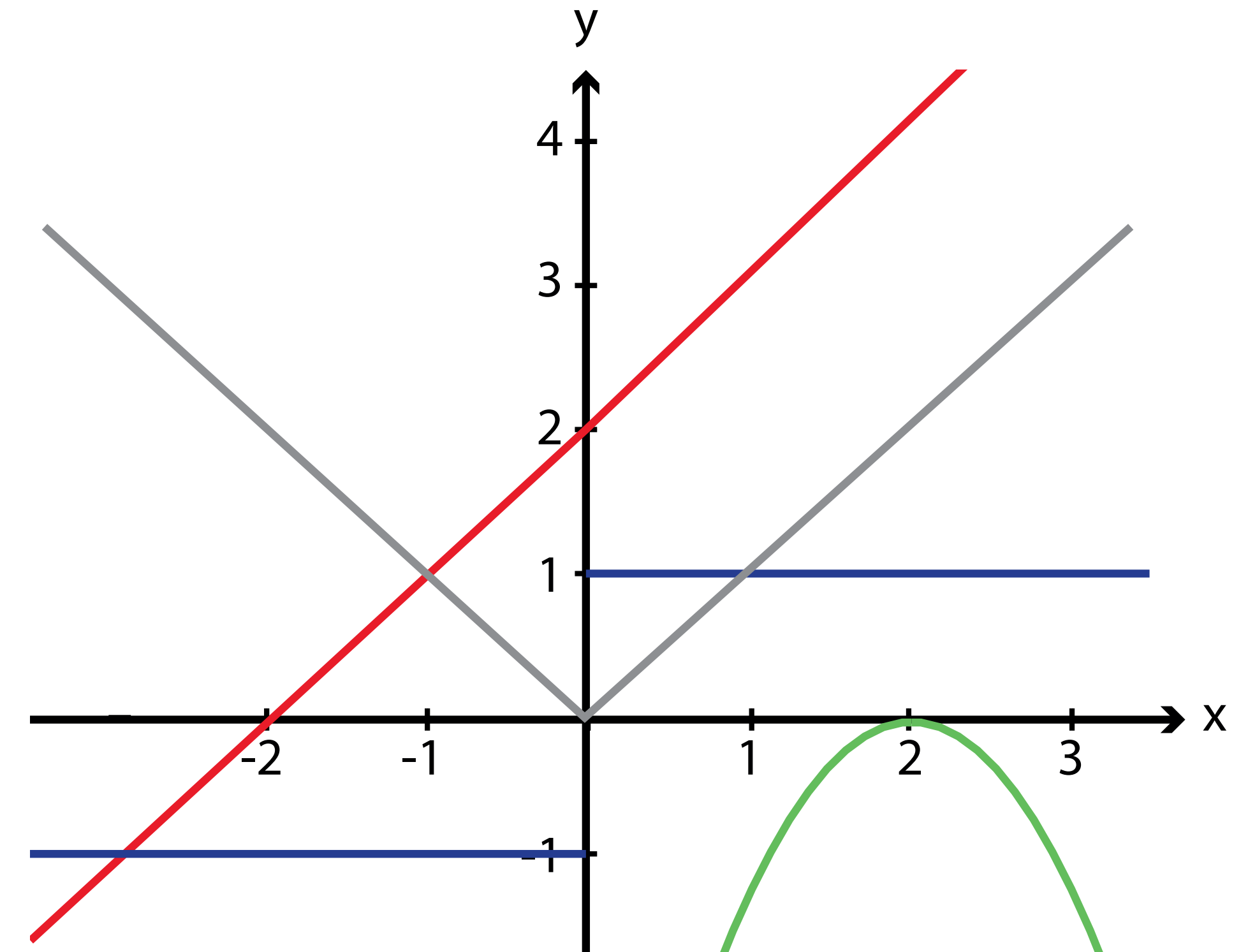
Grenzwertdefinition Eine Funktion ist genau dann stetig in einem Punkt x_0 wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Das ist insbesondere dann der Fall, wenn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Gilt diese Bedingung auf einem Intervall, ist die Funktion in diesem Intervall stetig.



Stetigkeit

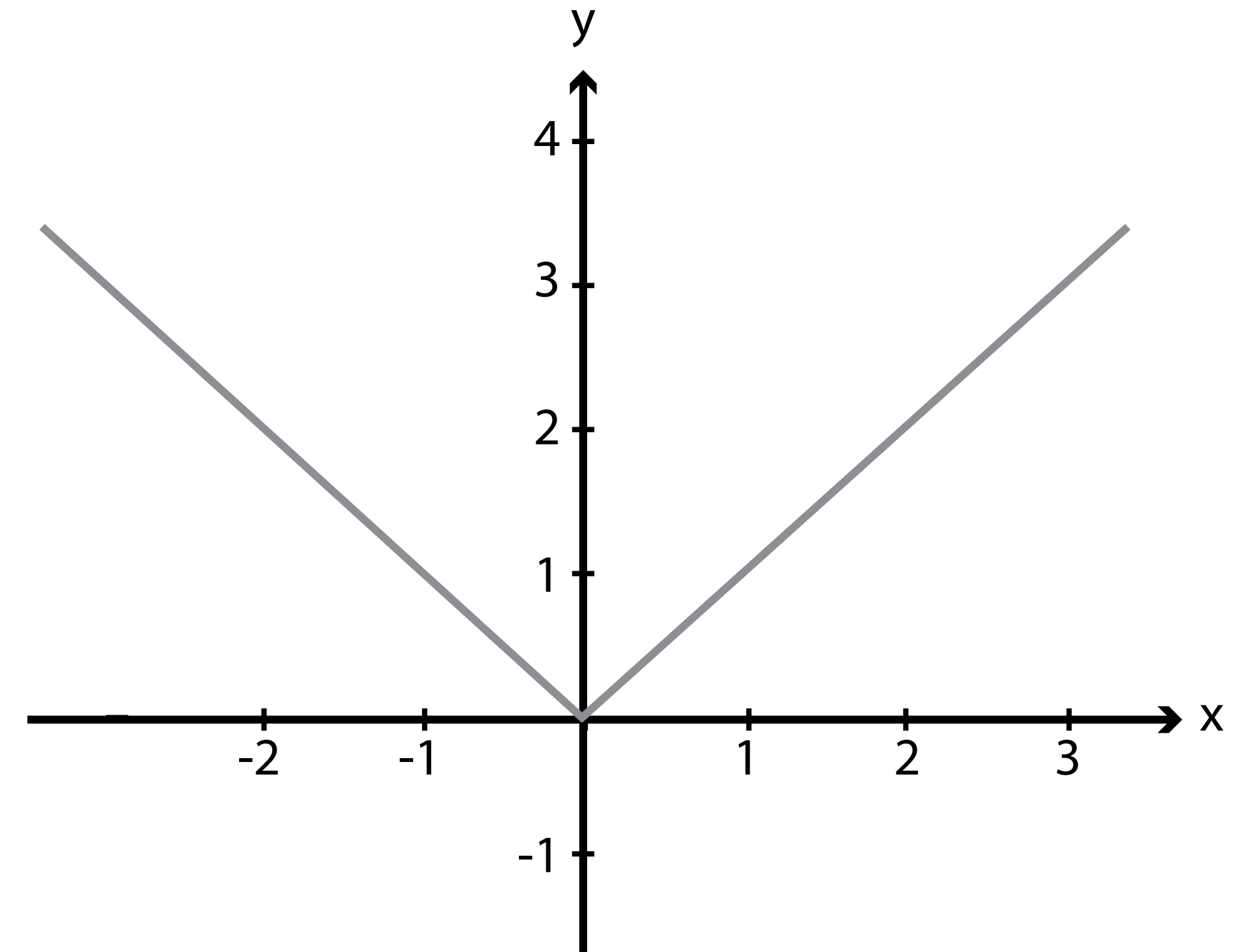
Grenzwertdefinition mit grafischer Veranschaulichung:

$$j(x) = |x|$$

gibt den Betrag einer Zahl wieder. Dieser ist in \mathbb{R}^1 definiert als:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{wenn } x < 0 \\ x & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$

Im Prinzip entfernt der Betrag das Minuszeichen von negativen Zahlen und lässt positive Zahlen unverändert.



Stetigkeit

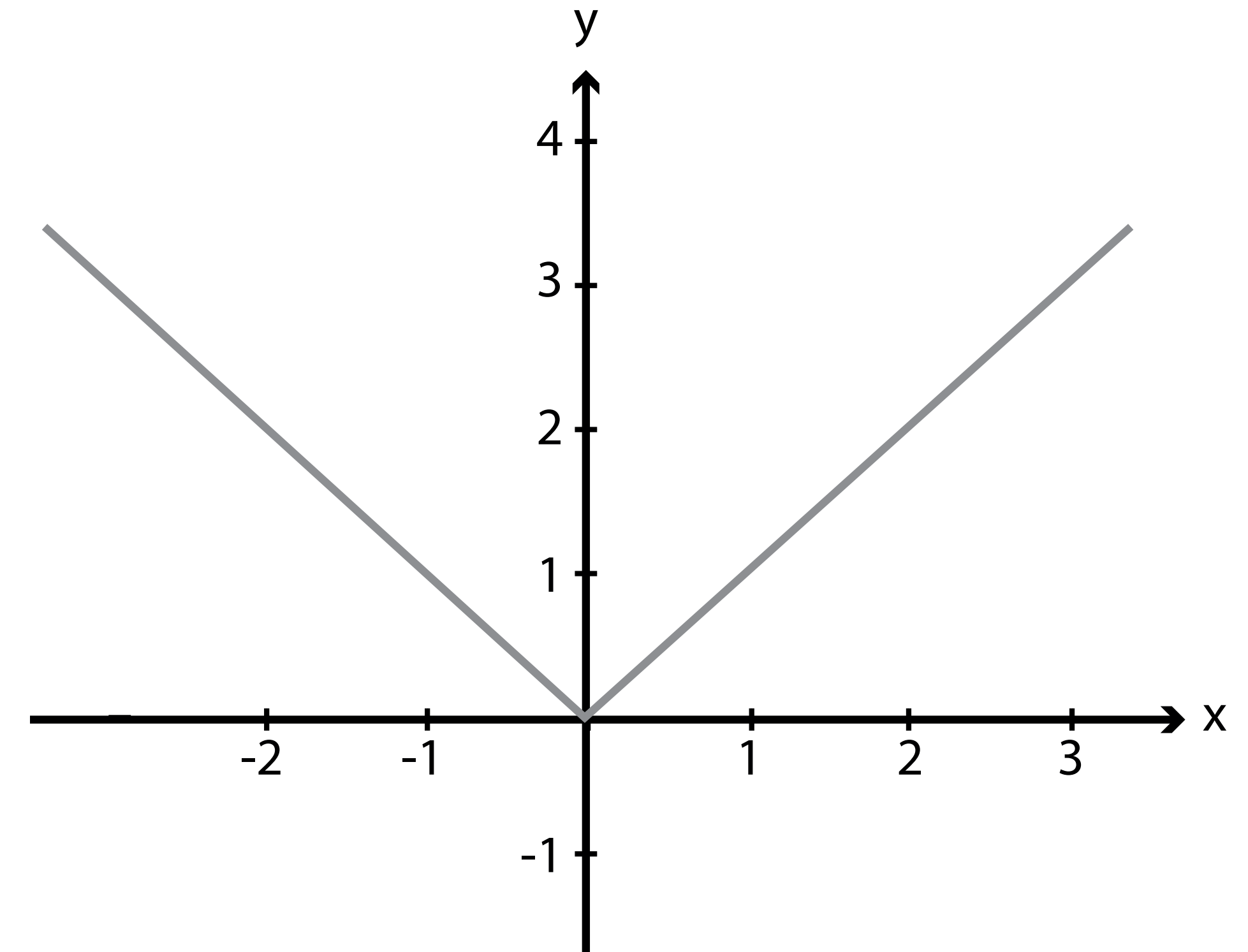
Grenzwertdefinition mit grafischer Veranschaulichung:

$$j(x) = |x|$$

An jeder Stelle x_0 gilt ...

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} j(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} j(x) = j(x_0)$$

...und das insbesondere auch an der Knickstelle. Egal ob wir von links oder rechts darauf zugehen, erhalten wir dort den Grenzwert 0, was auch dem Funktionswert entspricht.

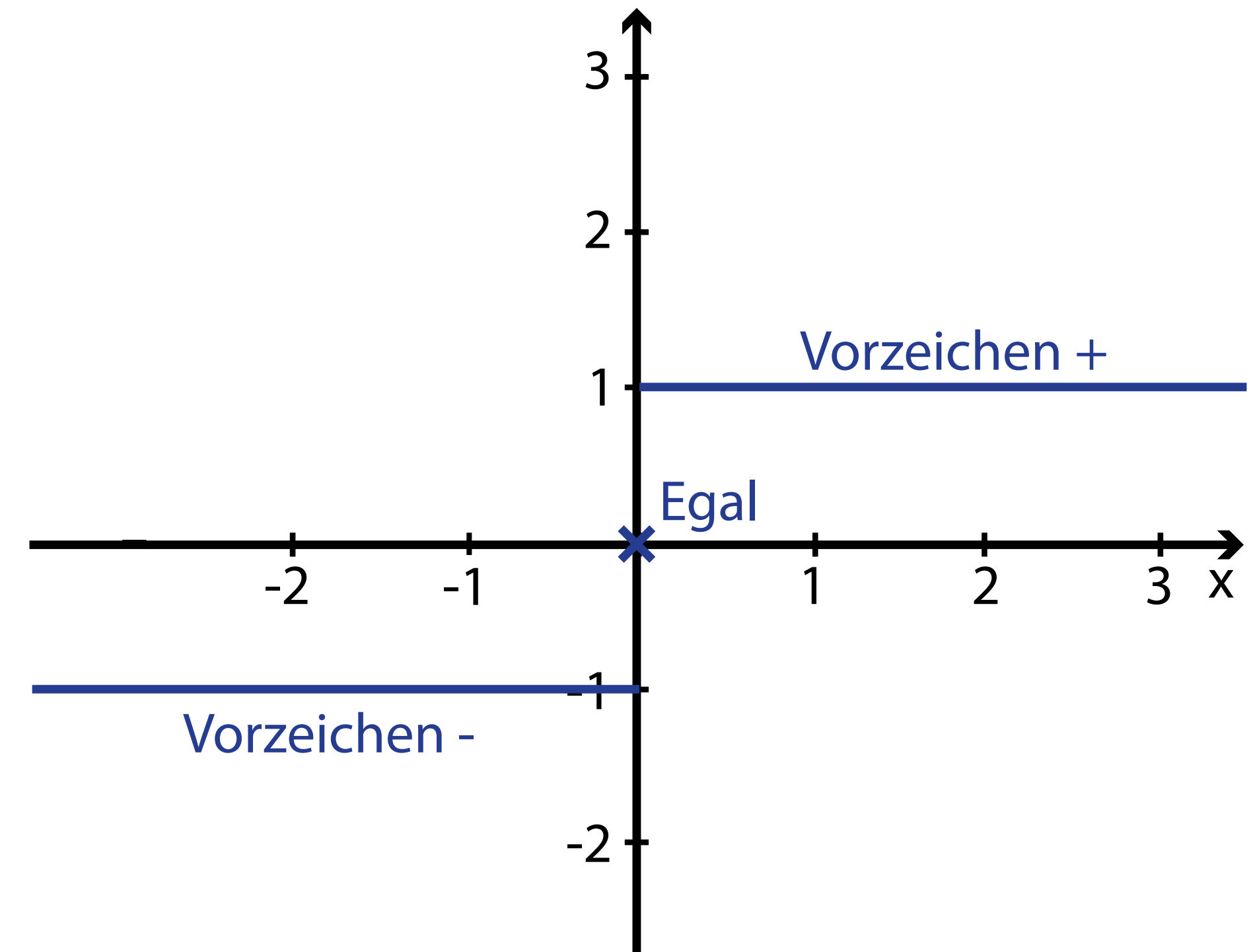


Stetigkeit

Grenzwertdefinition mit grafischer Veranschaulichung:

Die Funktion $\text{sign}(x)$ ist eine abschnittsweise definierte Funktion, die uns das Vorzeichen einer Zahl angibt:

$$h(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{wenn } x < 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ 1 & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$



Stetigkeit

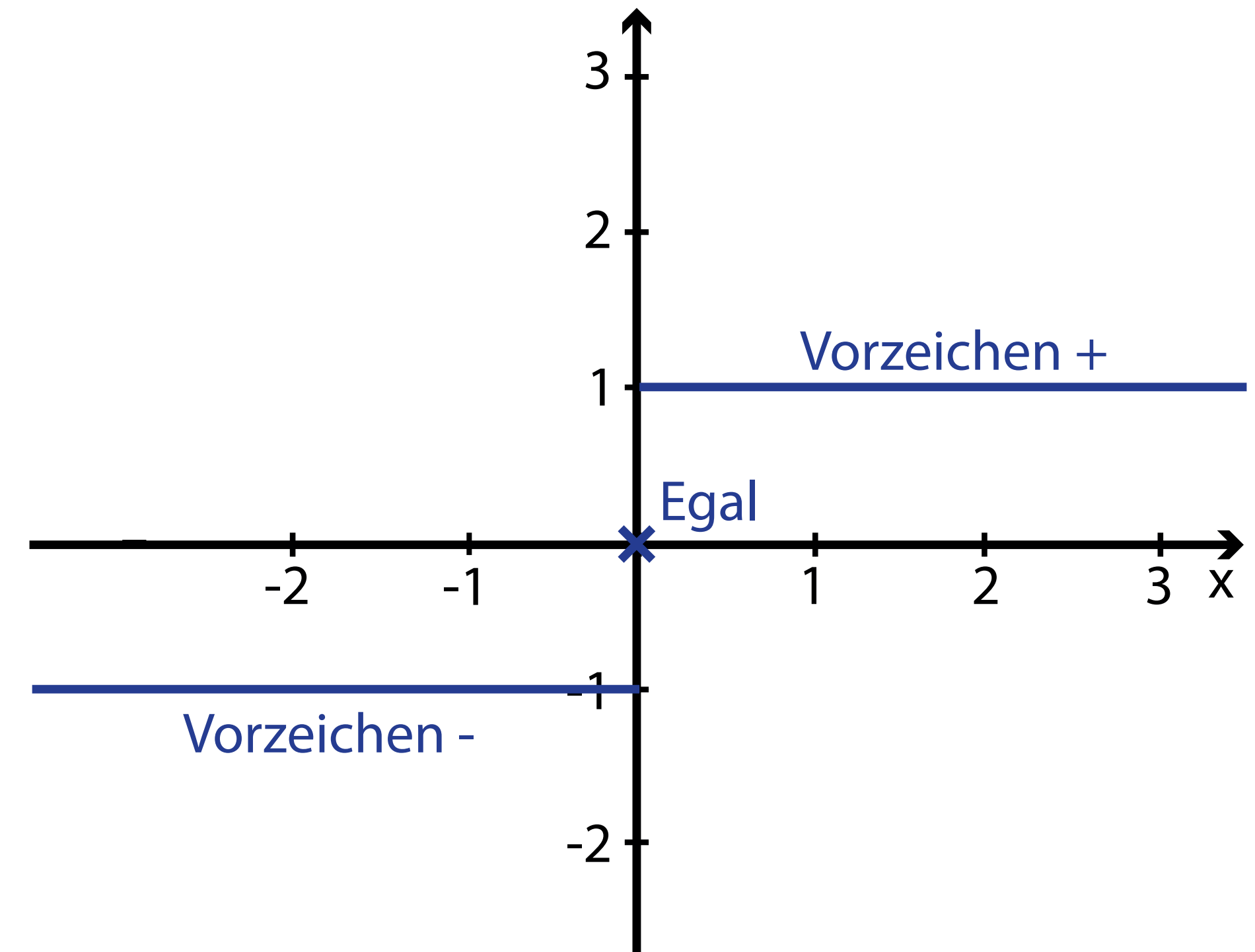
Grenzwertdefinition mit grafischer Veranschaulichung:

Die Funktion $h(x)$ ist nicht in ganz \mathbb{R} stetig, denn am Punkt $x_0 = 0$ sind die links- und rechtsseitigen Grenzwerte unterschiedlich:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$$

$$h(0) = 0$$



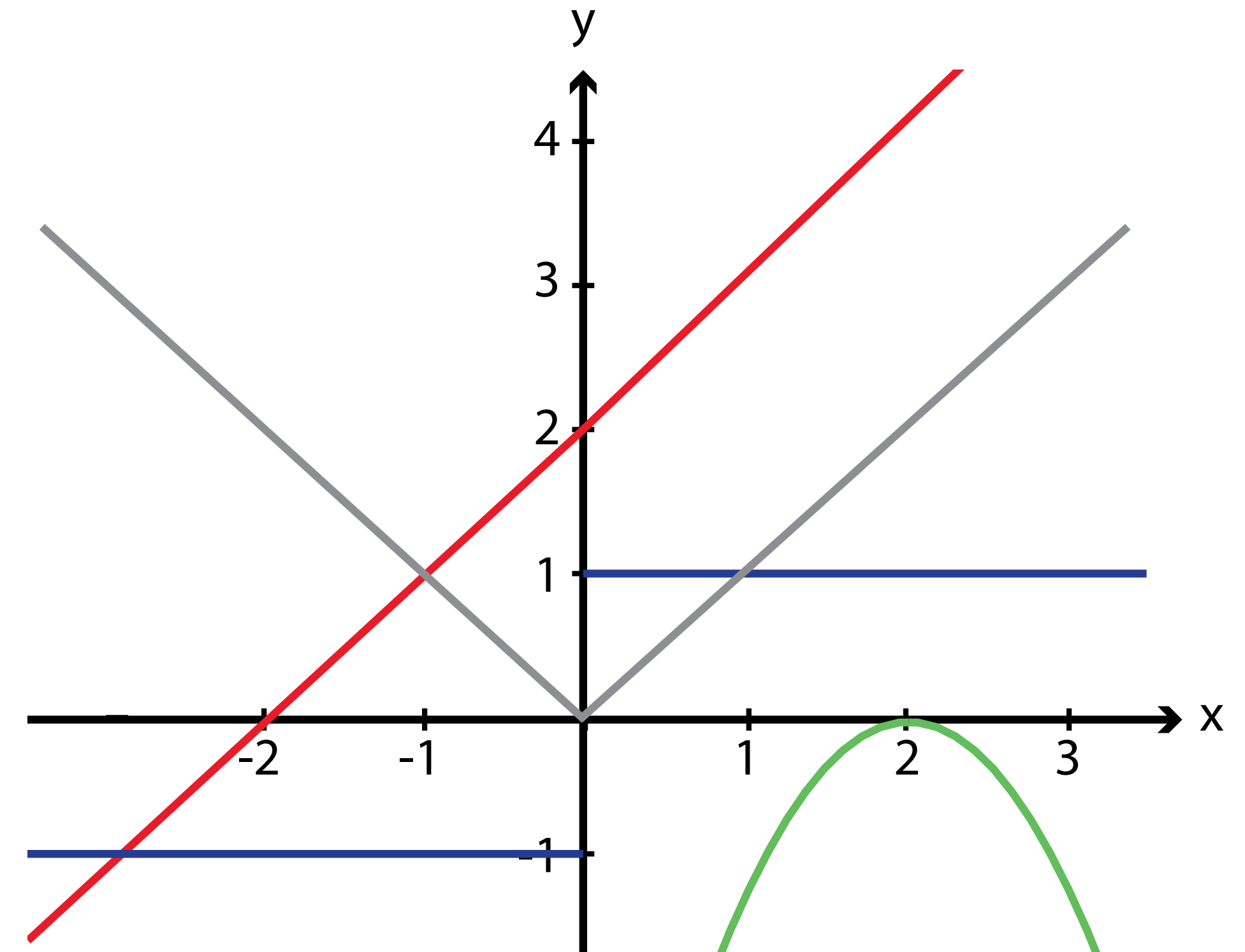
Stetigkeit

Epsilon-Delta Definition Eine Funktion ist genau dann stetig in einem Punkt x_0 wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$$

$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Gilt diese Bedingung auf einem Intervall, ist die Funktion in diesem Intervall stetig.



Stetigkeit

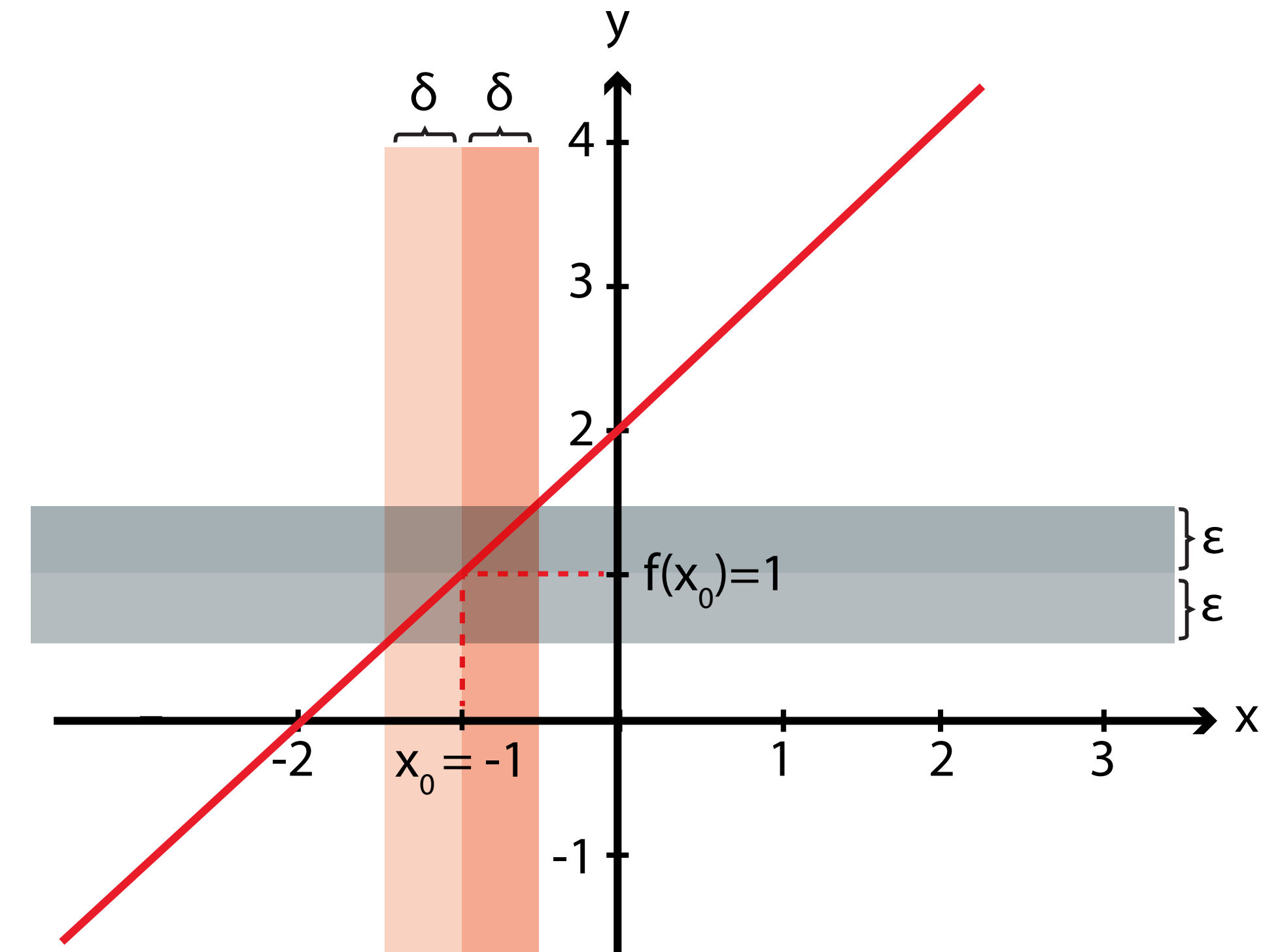
Epsilon-Delta Definition mit grafischer Veranschaulichung:

$$f(x) = x + 2$$

Im Punkt $x_0 = -1$ hat die Funktion den Wert $f(x_0) = 1$

Ich wähle eine Toleranz ε um die der Funktionswert von diesem Wert $f(x_0)$ abweichen darf, hier z. B. $\varepsilon = 0.5$

Ich finde einen Bereich $x_0 \pm \delta$ innerhalb dem die Toleranz eingehalten wird, hier z. B. $\delta = 0.5$

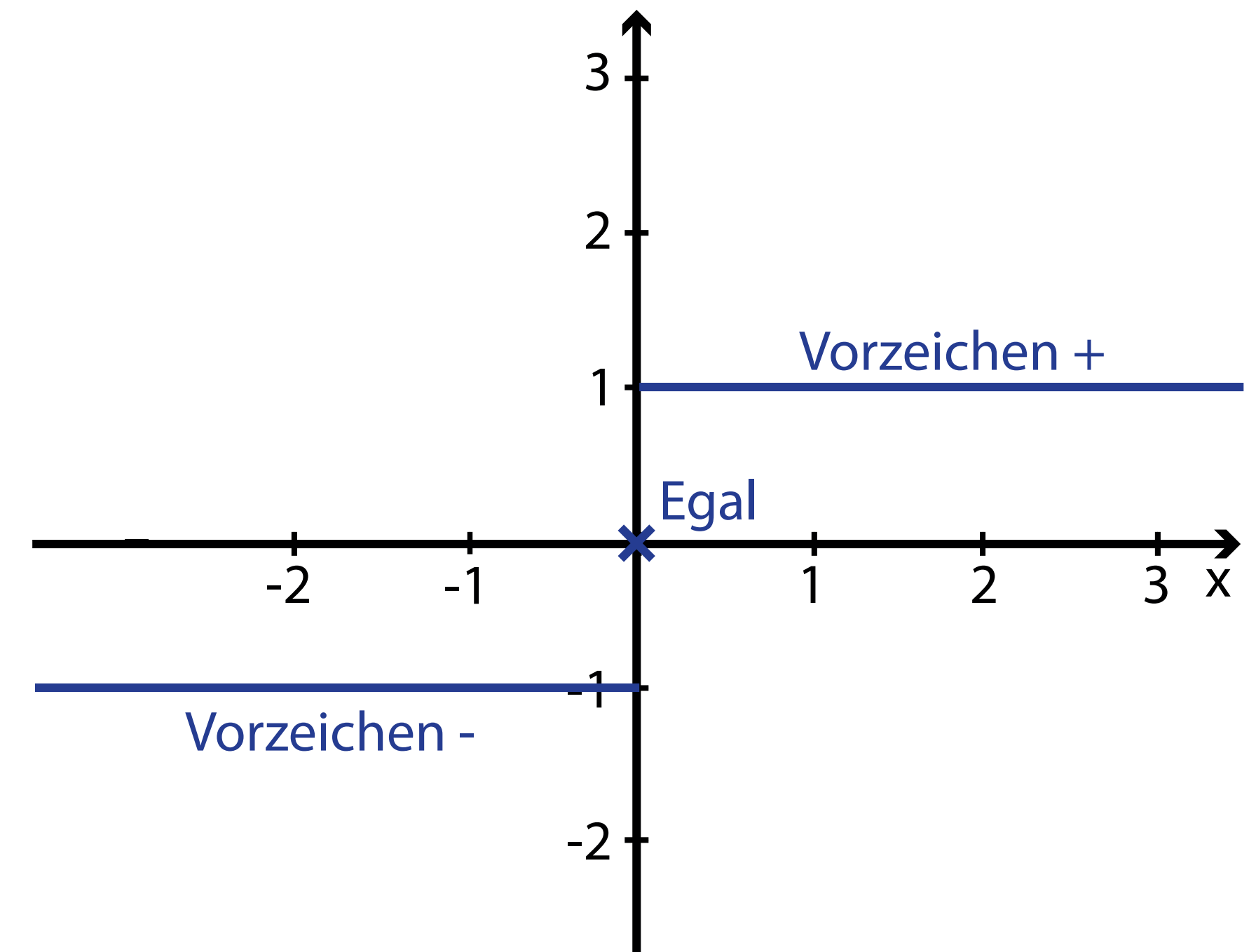


Stetigkeit

Epsilon-Delta Definition mit grafischer Veranschaulichung:

Zur Erinnerung: $h(x)$ ist eine abschnittsweise definierte Funktion, die uns das Vorzeichen einer Zahl angibt:

$$h(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{wenn } x < 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ 1 & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$



Stetigkeit

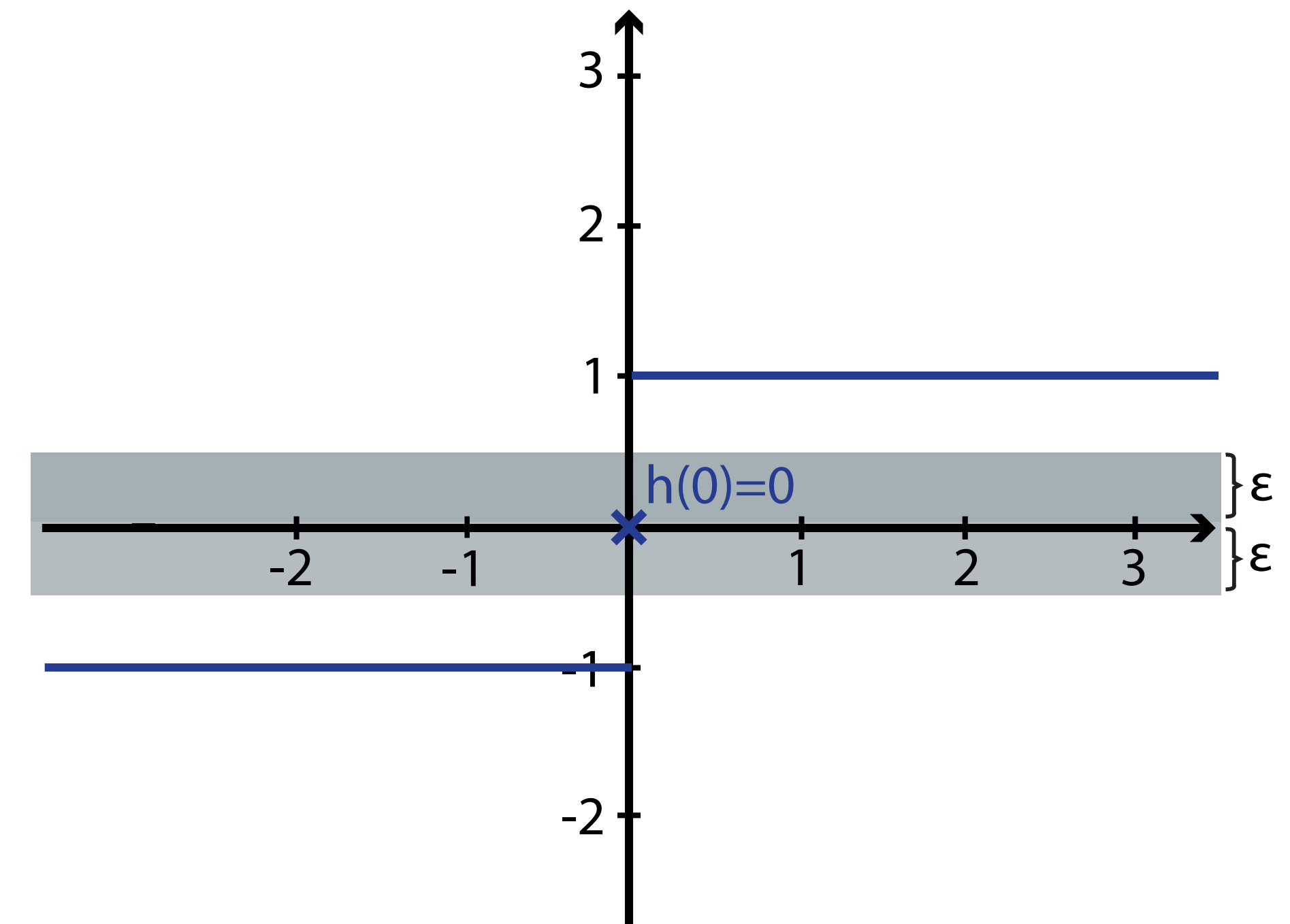
Epsilon-Delta Definition mit grafischer Veranschaulichung:

Im Punkt $x_0 = 0$ hat die Funktion den Wert $h(0)=0$

$$h(x) = \text{sign}(x)$$

Ich wähle eine Toleranz ε um die der Funktionswert von diesem Wert $h(x_0)$ abweichen darf, hier z. B. $\varepsilon = 0.5$

Ich finde keinen Bereich $x_0 \pm \delta$ innerhalb dem die Toleranz eingehalten wird. Warum?



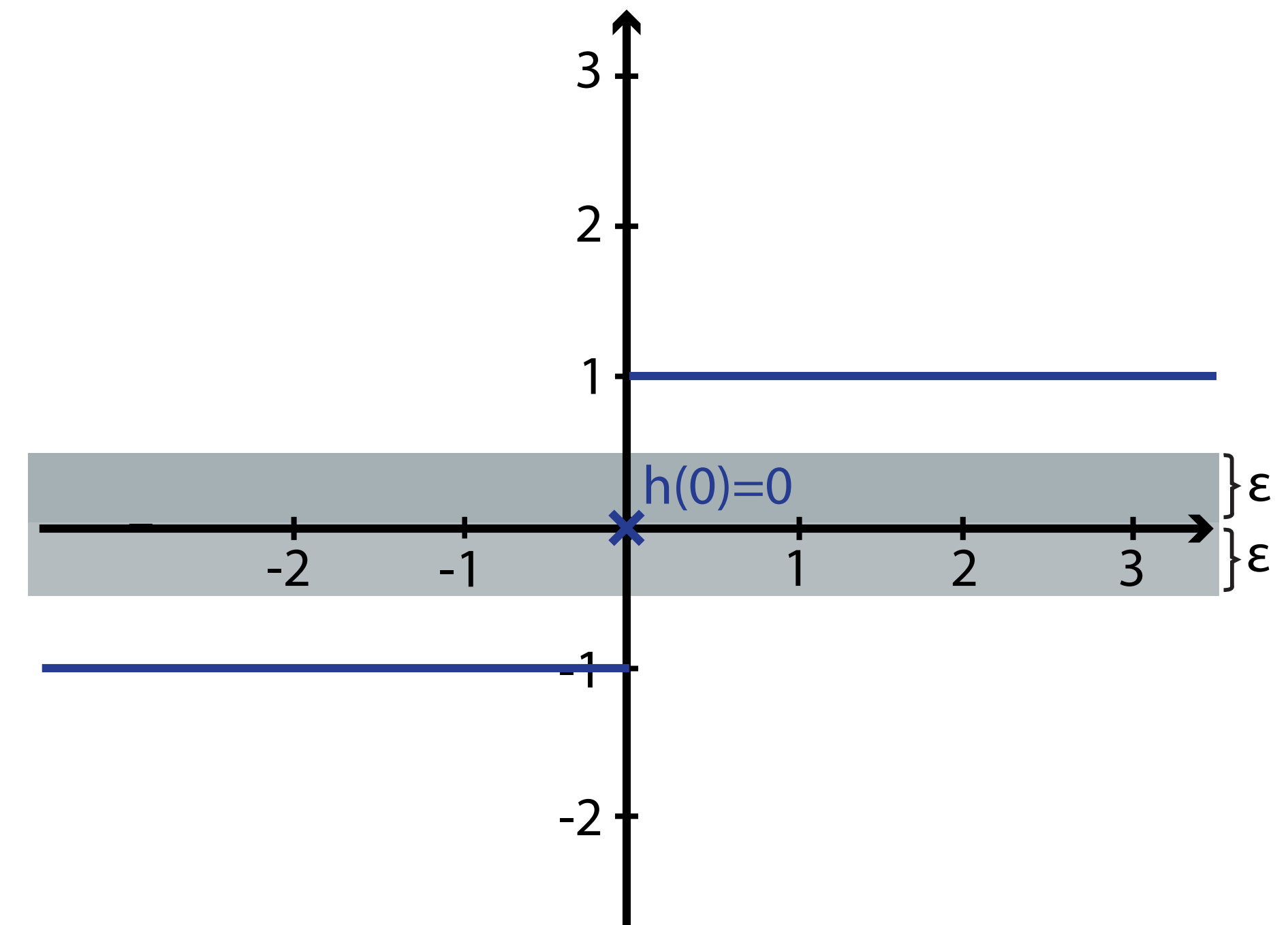
Stetigkeit

Epsilon-Delta Definition mit grafischer Veranschaulichung:

Ich finde keinen Bereich $x_0 \pm \delta$ innerhalb dem die Toleranz eingehalten wird. Warum?

Bereits eine unendlich kleine Bewegung nach links bringt uns zu $h(x_0 - \delta) = -1$

Bereits eine unendlich kleine Bewegung nach rechts bringt uns zu $h(x_0 + \delta) = 1$

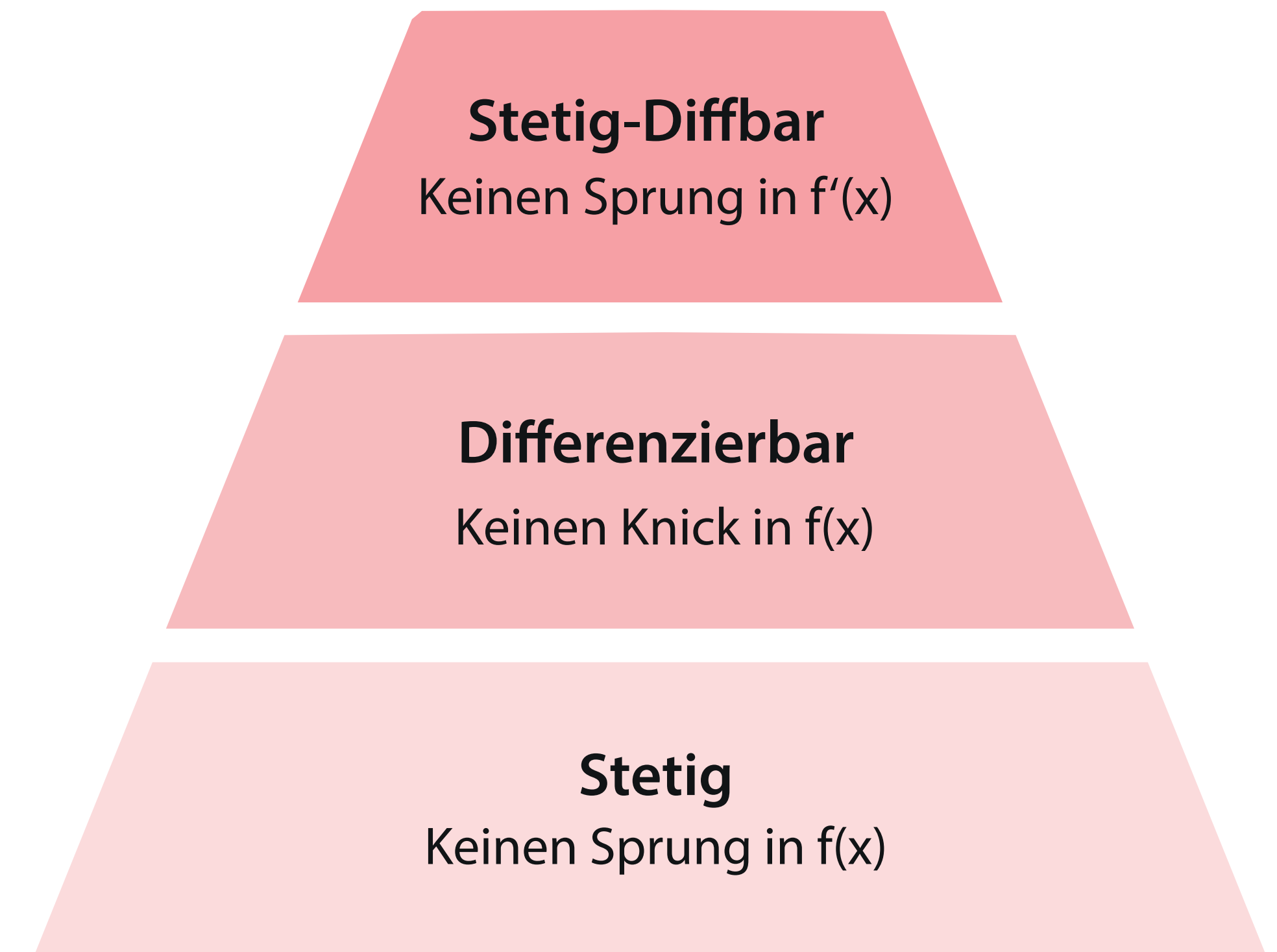


Differenzierbarkeit

Das Kriterium der Differenzierbarkeit baut auf Stetigkeit auf:

Differenzierbare Funktionen sind immer auch stetig, aber stetige Funktionen sind nicht immer differenzierbar.

Die Bezeichnung "stetig differenzierbar" bedeutet, dass eine Funktion differenzierbar und ihre Ableitung stetig ist.

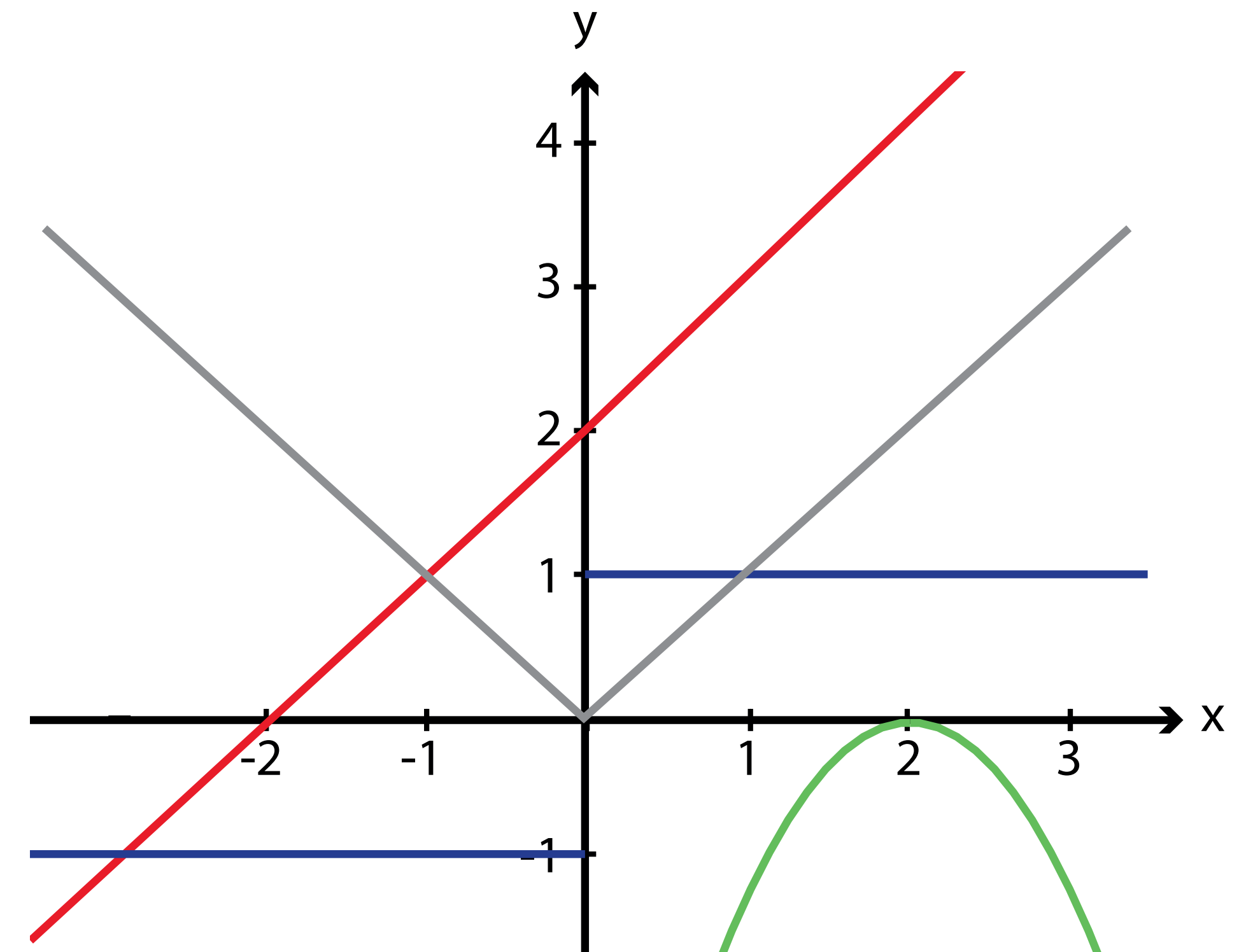


Differenzierbarkeit

Wir können Differenzierbarkeit grafisch bzw. optisch definieren:

Eine Funktion ist genau dann differenzierbar, wenn sie weder Sprünge noch Knickstellen hat.

Eine Funktion ist genau dann differenzierbar, wenn man sie ohne Absetzen des Stiftes zeichnen kann und die Bewegungsrichtung des Stiftes nicht ruckartig geändert werden muss.



Differenzierbarkeit

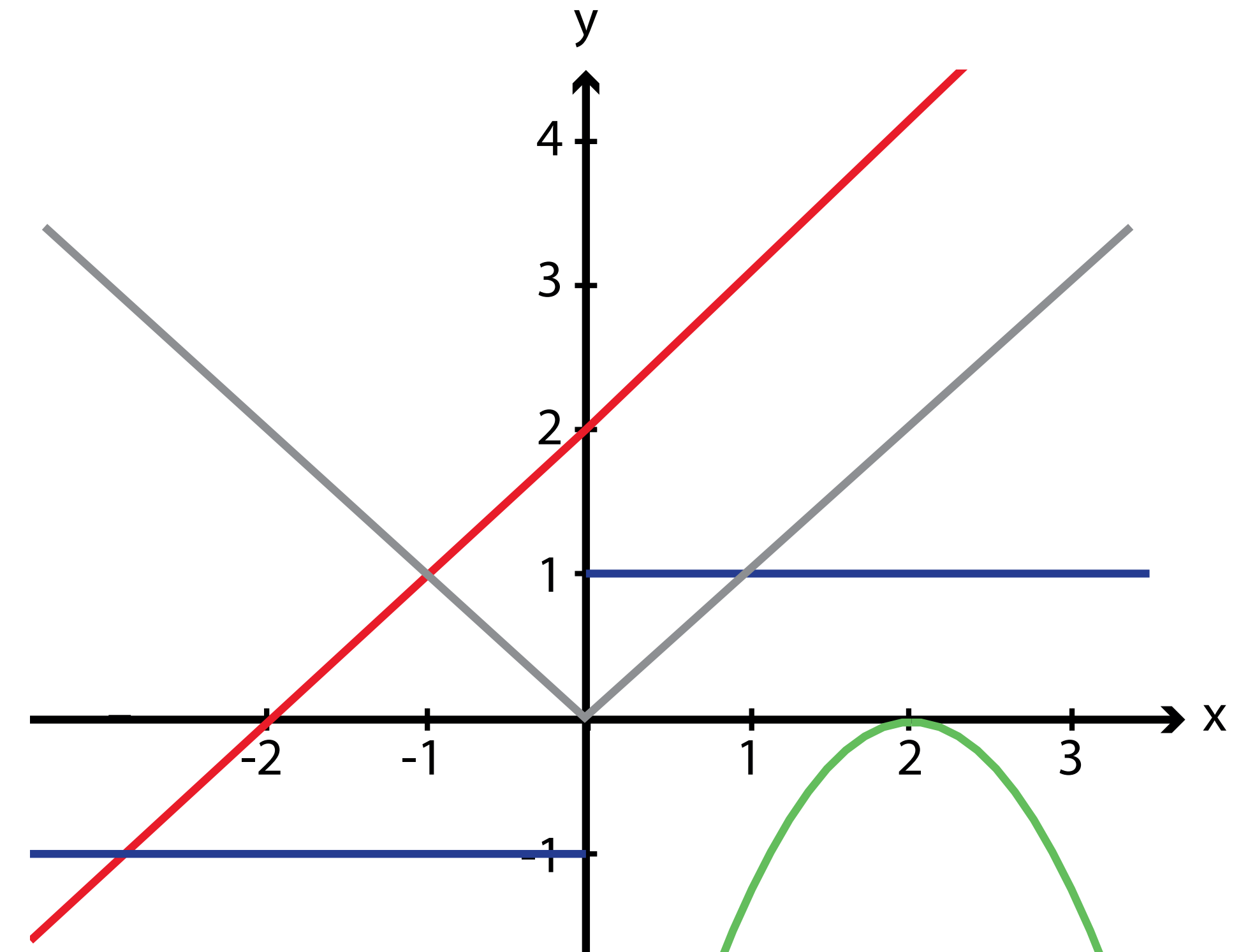
Nach diesen Definitionen sind nur $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar. Bei $h(x)$ haben wir einen Sprung und bei $j(x)$ haben wir einen Knick.

$$f(x) = x + 2$$

$$g(x) = -(x-2)^2$$

$$h(x) = \text{sign}(x)$$

$$j(x) = |x|$$



Differenzierbarkeit

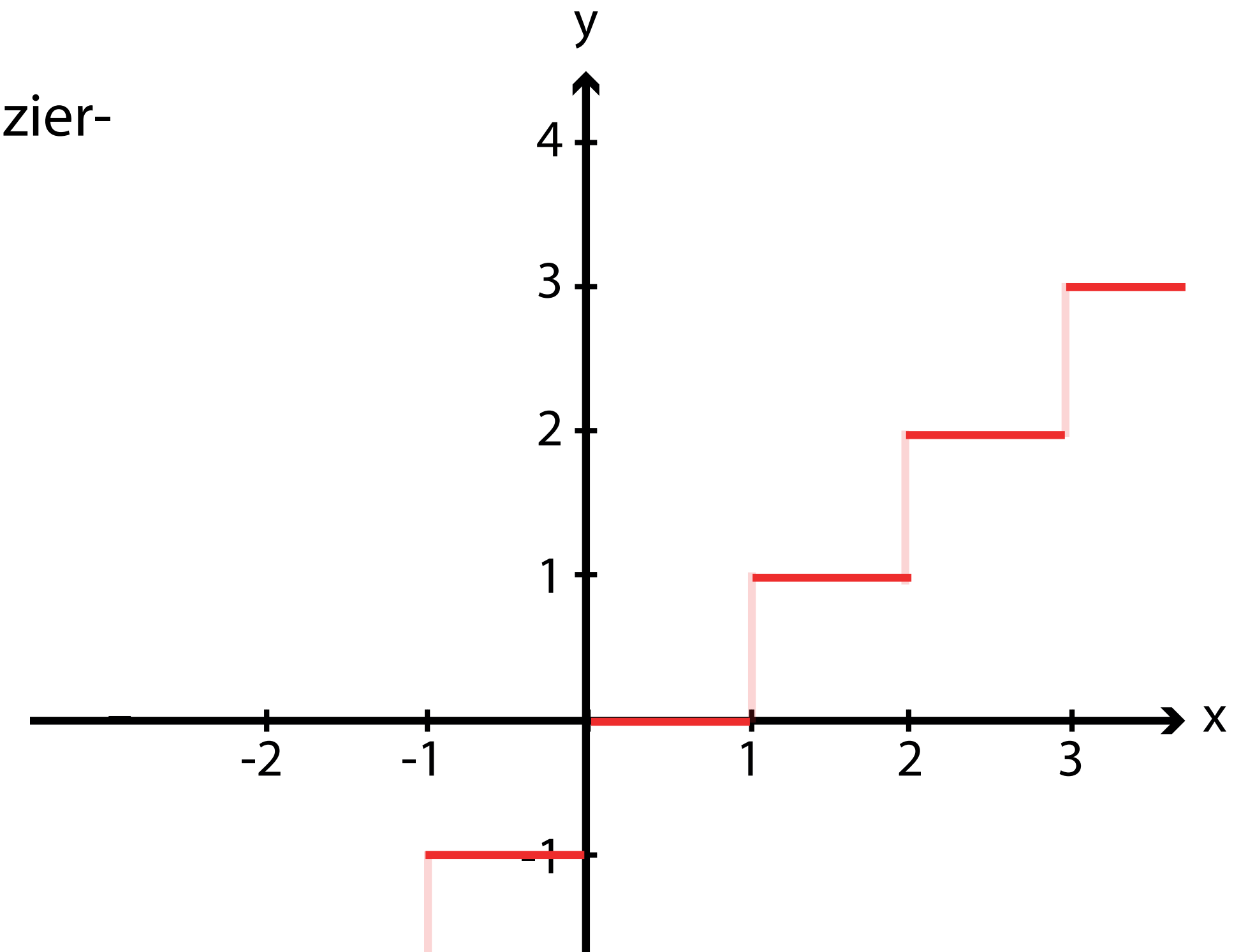
Untersuche die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Ein Beweis ist dabei nicht erforderlich!

$$f(x) = 20x + 8$$

$$g(x) = \frac{4}{x-4}$$

$$h(x) = \text{floor}(x)$$

$$k(x) = |x^2 - 1|$$



Die Funktion $\text{floor}(x)$ schneidet die Nachkommastellen von x ab, ändert jedoch nichts am Vorzeichen.

Beispiel: $\text{floor}(-4.215) = -4$

Differenzierbarkeit

$$f(x) = 20x + 8$$

stetig und differenzierbar auf \mathbb{R}

$$g(x) = \frac{4}{x-4}$$

stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

$$h(x) = \text{floor}(x)$$

nur Stückweise stetig und differenzierbar

$$k(x) = |x^2 - 1|$$

stetig auf \mathbb{R} , differenzierbar nur auf $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

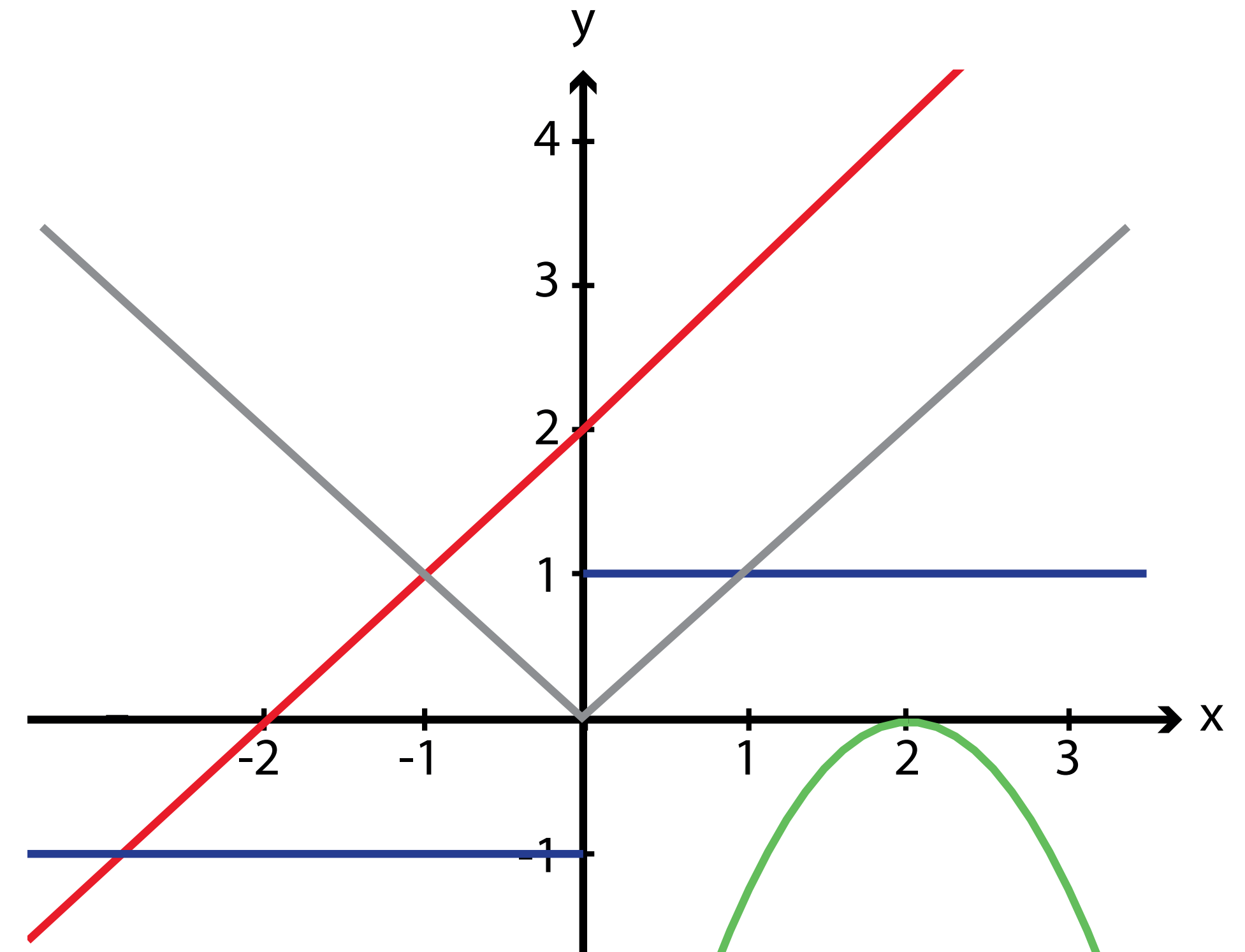
Differenzierbarkeit

Auch für die Differenzierbarkeit gibt es eine Grenzwertdefinition.

Eine Funktion ist genau dann differenzierbar in einem Punkt x_0 wenn diese in einem Bereich um x_0 definiert ist und folgender Grenzwert existiert:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Gilt diese Bedingung auf einem Intervall, ist die Funktion in diesem Intervall differenzierbar.



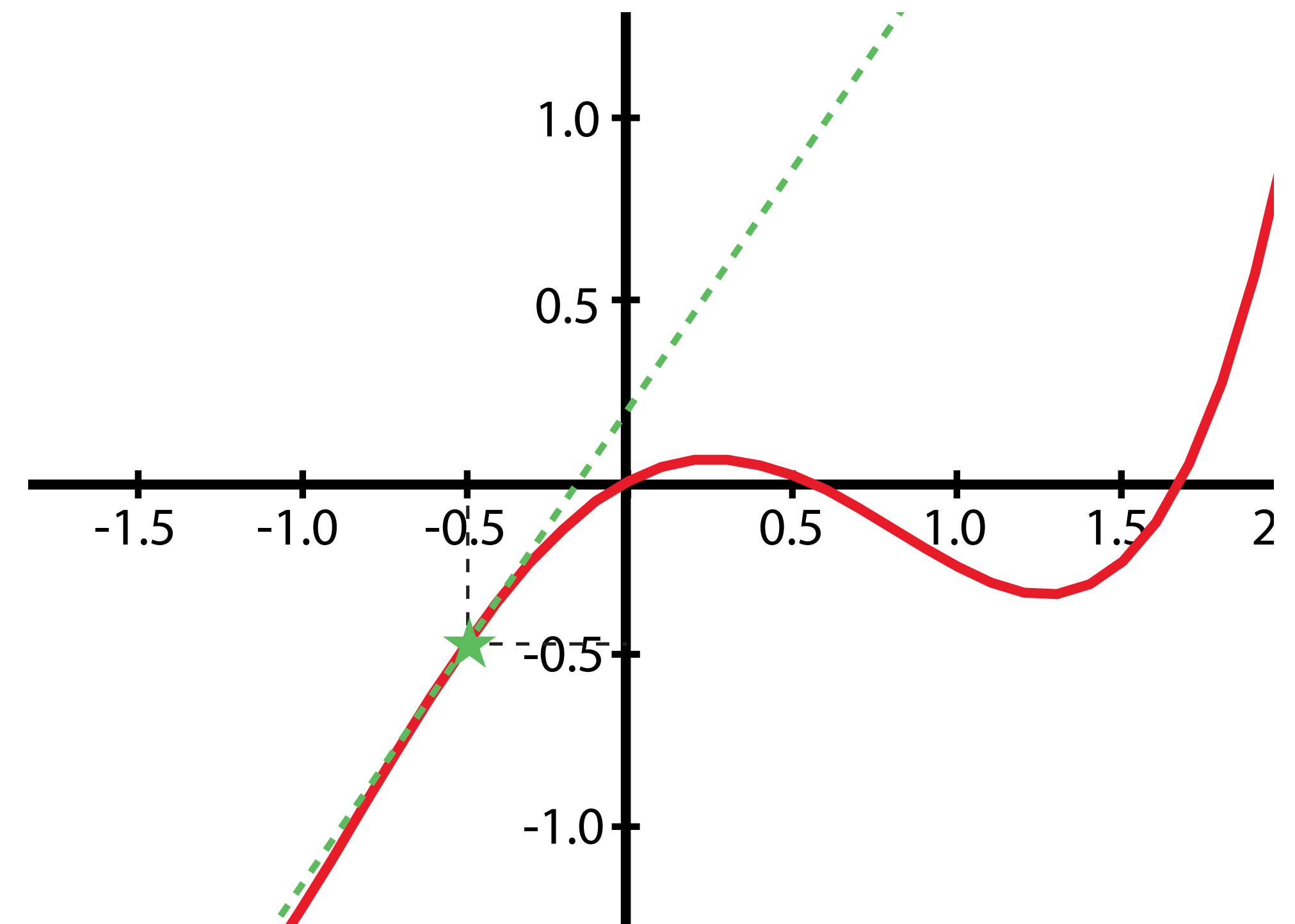
Differenzierbarkeit

Mit dieser Grenzwertdefinition erhalten wir gleichzeitig die Definition der Ableitung einer Funktion.

Die Ableitung einer Funktion gibt deren **Steigung** an und wird über den folgenden Grenzwert definiert:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Präziser: die **Steigung** der Tangente die wir an der Stelle x_0 an die Funktion $f(x)$ anlegen.



Differenzialrechnung

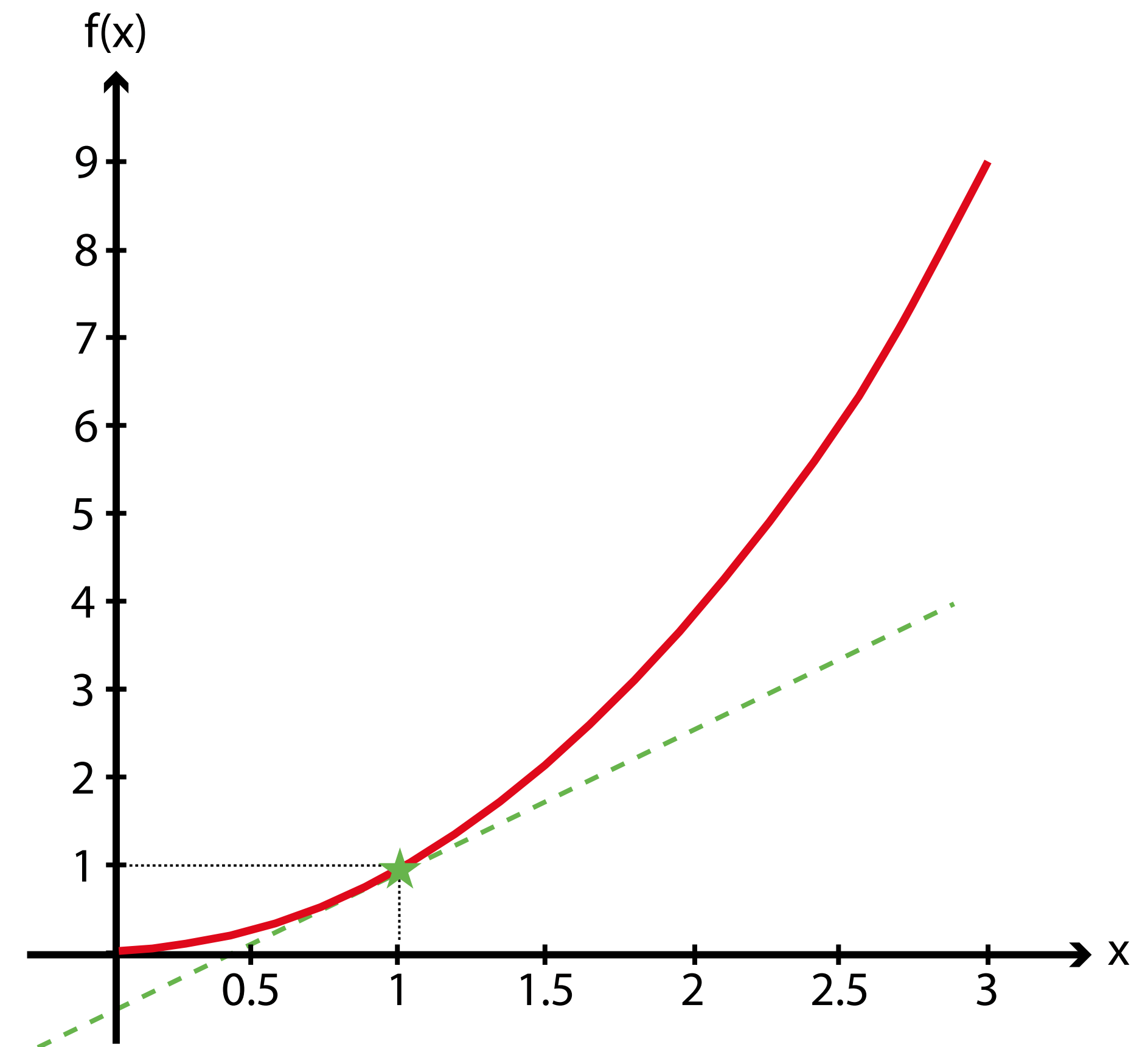
Was bedeutet dieser Grenzwert anschaulich?

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Betrachten wir dazu das Beispiel:

$$f(x) = x^2$$

Wie hoch ist deren Steigung an der Stelle $x_0 = 1$?



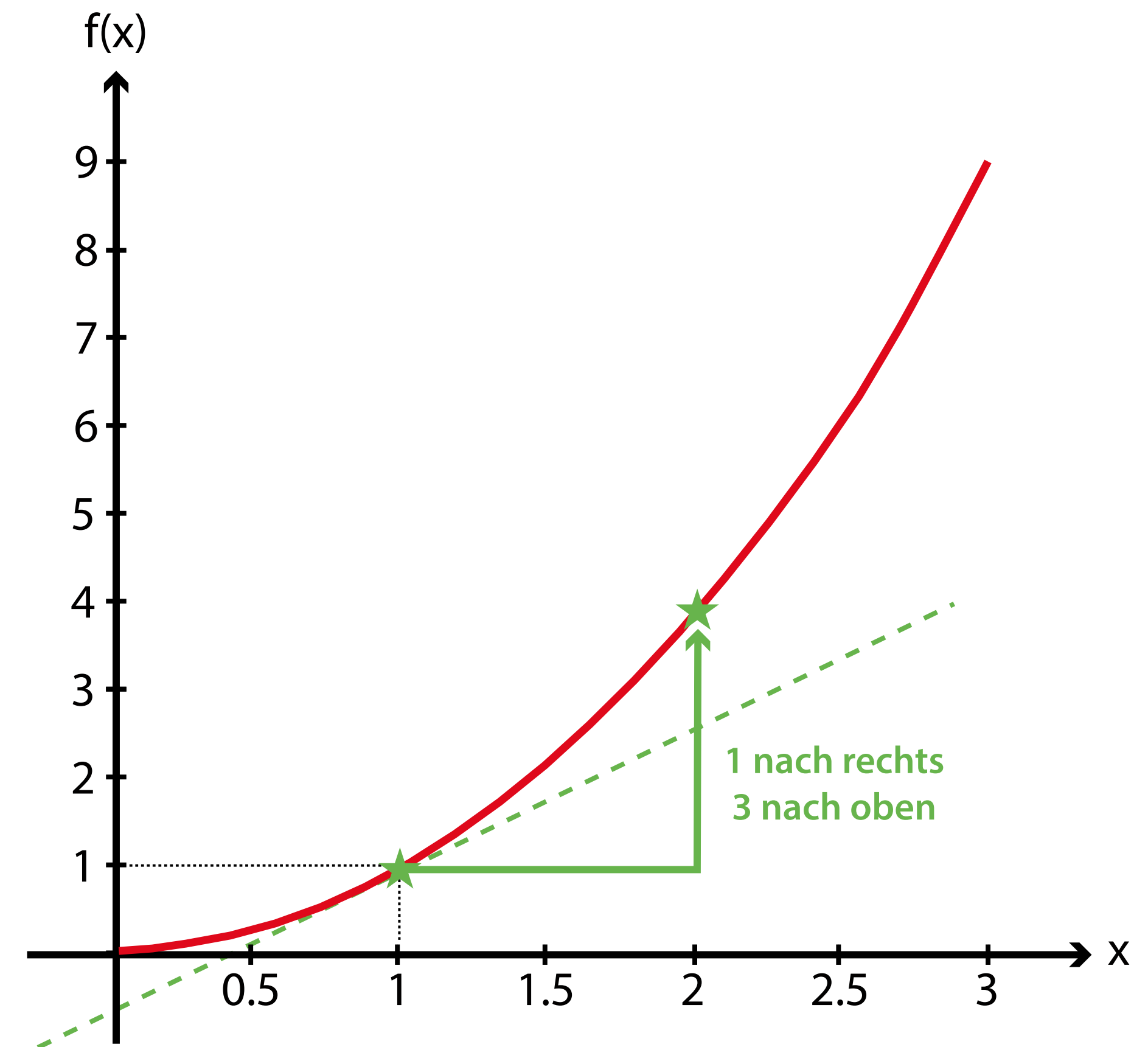
Differenzialrechnung

Näherung über Steigungsdreieck Die Steigung an der Stelle x_0 wird näherungsweise berechnet mit:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

wobei h die Breite des Steigungsdreiecks ist. Hier verwenden wir $x_0 = 1$ und $h = 1$ und erhalten damit den Wert:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(1+1) - f(1)}{1} = \frac{4 - 1}{1} = 3$$



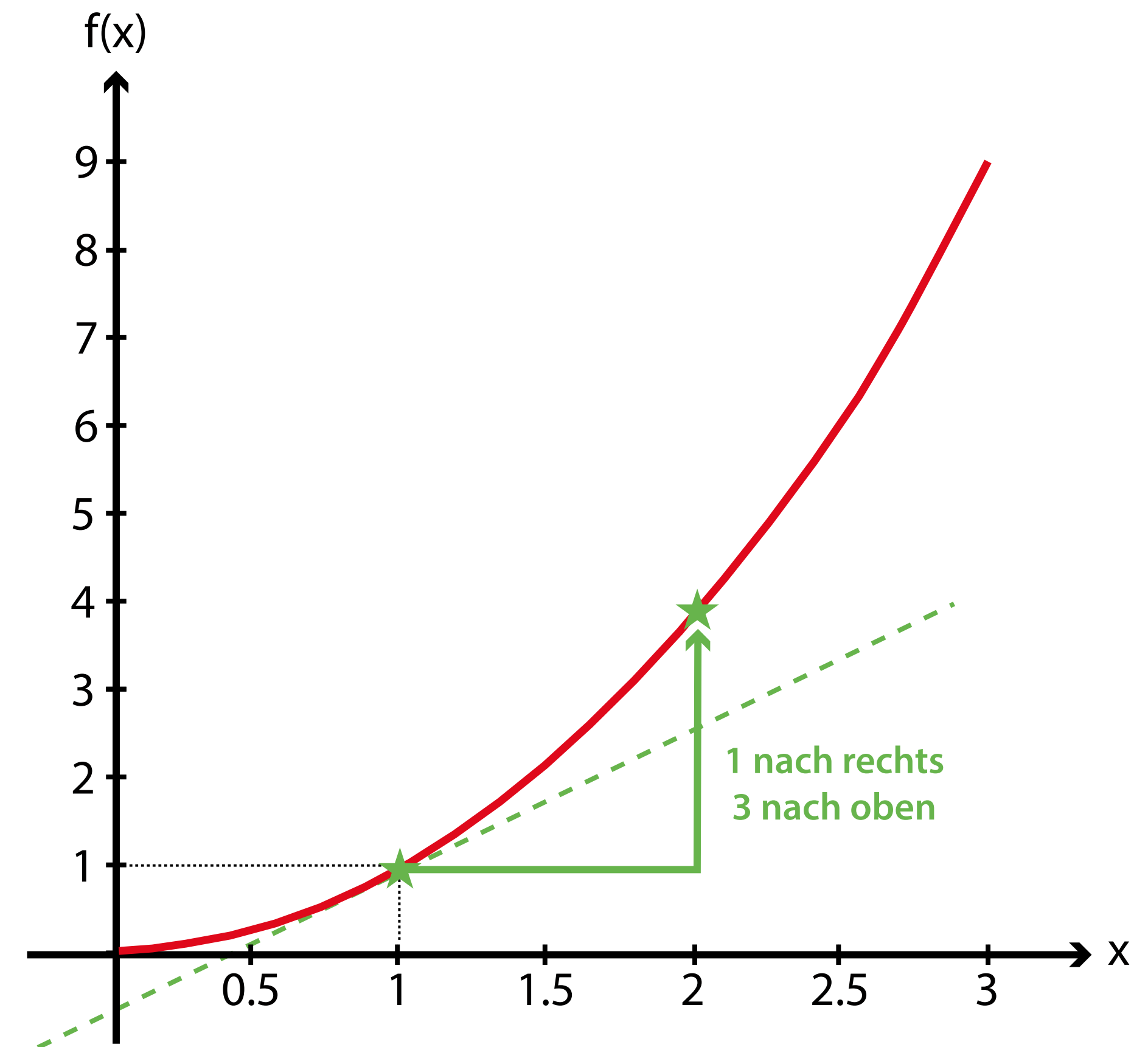
Differenzialrechnung

Näherung über Steigungsdreieck ist nur eine Näherung. In unserem Beispiel ...

$$f'(x_0) \approx \frac{f(2) - f(1)}{1} = 3$$

...messen wir die durchschnittliche Steigung zwischen $x_0 = 1$ und dem Punkt $x_0 + h = 2$.

Innerhalb dieses Bereichs wird die Kurve jedoch deutlich steiler, d. h., wir überschätzen die Steigung im Punkt x_0



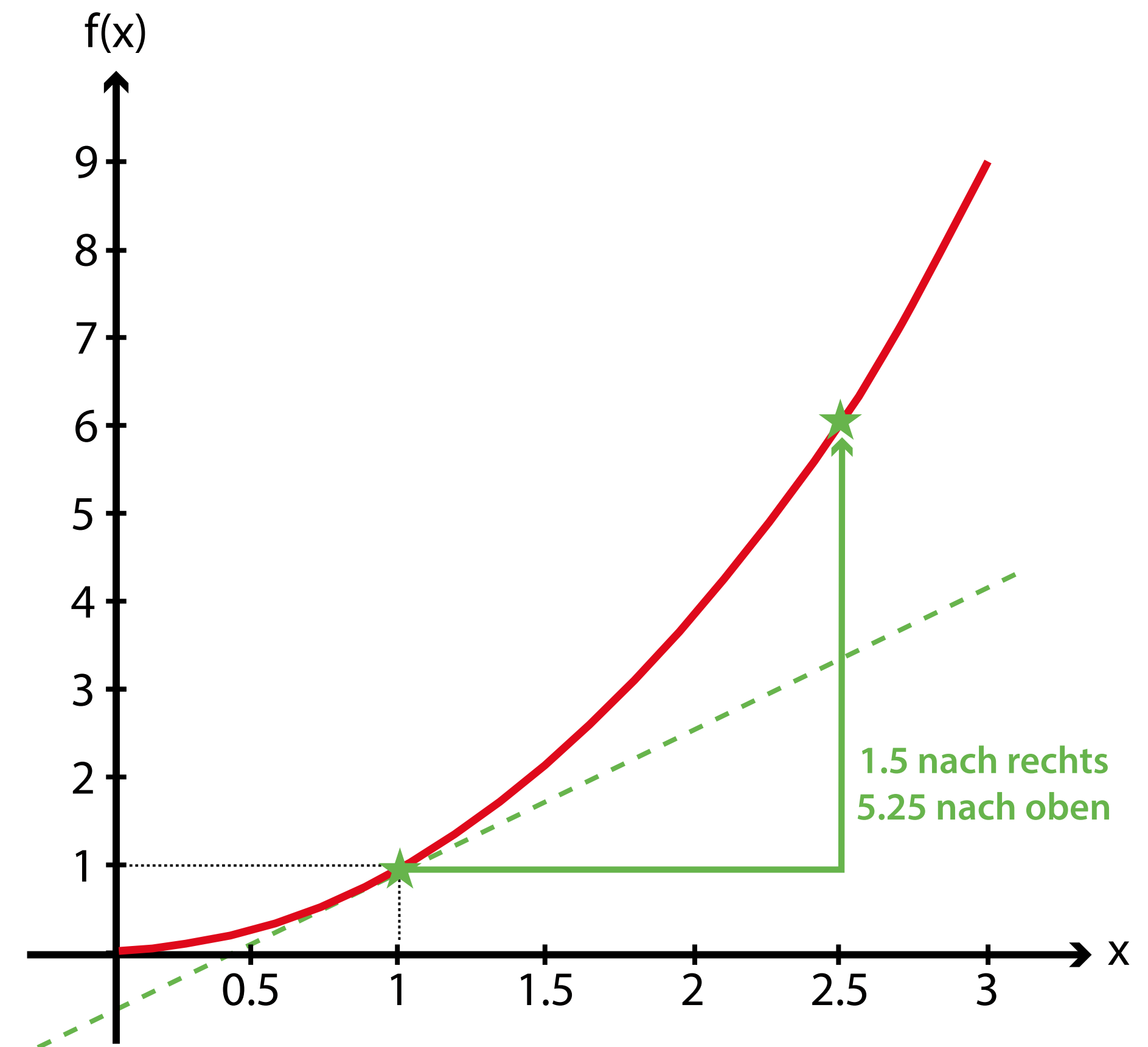
Differenzialrechnung

Näherung über Steigungsdreieck wird ungenauer, wenn wir die Breite des Dreiecks vergrößern.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(2.5) - f(1)}{1.5} \approx 3.5$$

Wir messen die durchschnittliche Steigung zwischen $x_0 = 1$ und dem Punkt $x_0 + h = 2.5$.

Innerhalb dieses Bereichs wird die Kurve noch steiler, d. h., wir unterschätzen die Steigung im Punkt x_0 noch viel mehr.



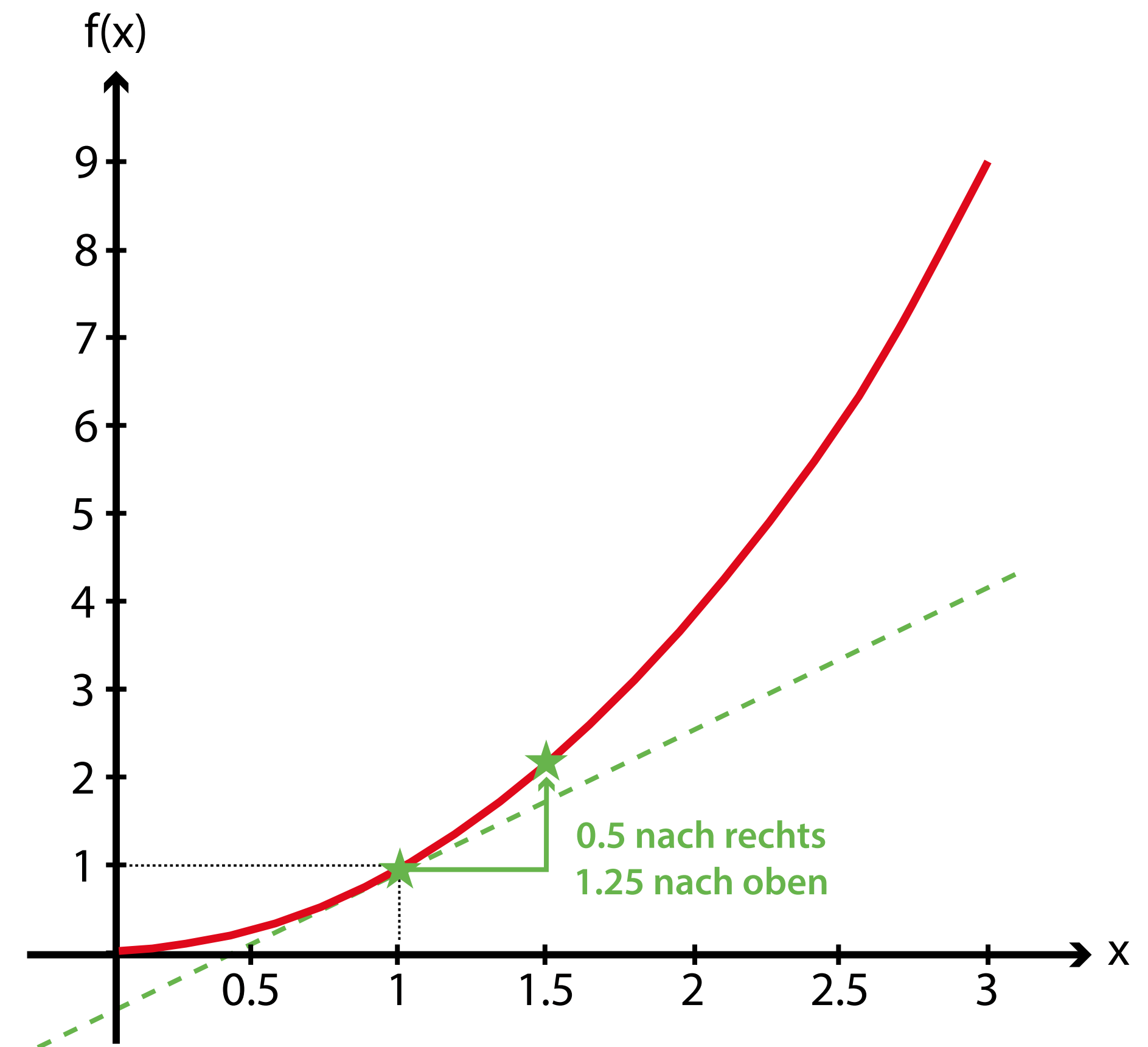
Differenzialrechnung

Näherung über Steigungsdreieck wird genauer, wenn wir die Breite des Dreiecks verkleinern.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(1.5) - f(1)}{0.5} \approx 2.50$$

Hier messen wir die durchschnittliche Steigung zwischen $x_0 = 1$ und dem Punkt $x_0 + h = 1.5$

Innerhalb dieses Bereichs ändert sich die Steigung der Kurve weniger, sodass wir die Steigung in x_0 recht gut nähern.

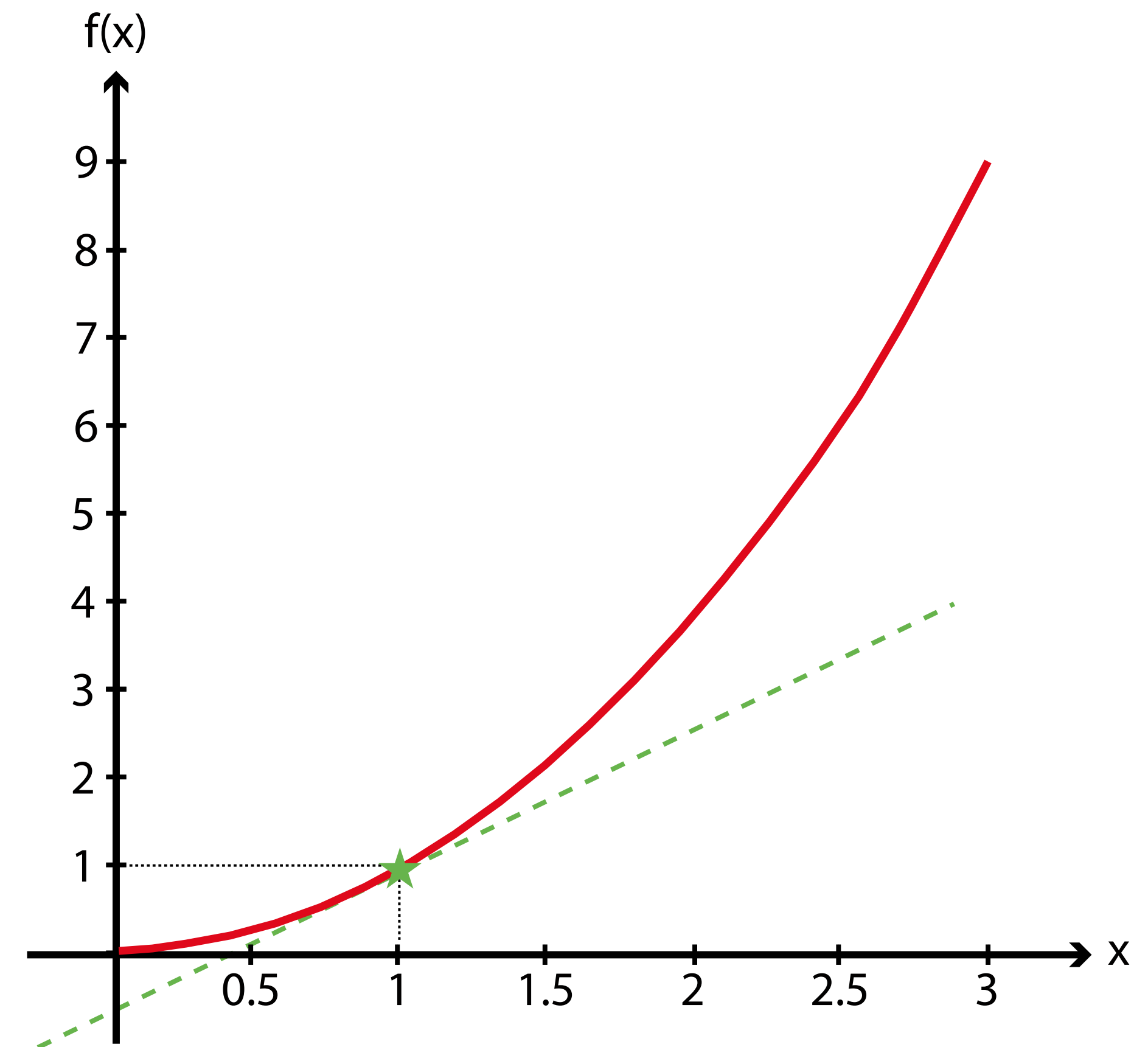


Differenzialrechnung

Näherung über Steigungsdreieck ist genau, wenn wir die Breite des Dreiecks gegen 0 gehen lassen.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Damit erhalten wir die exakte Steigung beim Punkt x_0 , in diesem Fall $f'(1)=2$. Wie berechnen wir diese Grenzwerte?



Ableitungsregeln

Wir lernen jetzt eine Reihe von Regeln kennen, mit denen wir Ableitungen berechnen können.

Wir beginnen mit Potenzen, d. h. Terme der Form

$$f(x) = a \cdot x^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

Die Ableitung einer Potenz ist:

$$f'(x) = b \cdot a \cdot x^{(b-1)}$$

Potenzregel

$$f(x) = a \cdot x^b$$

$$f'(x) = a \cdot x^{b-1}$$

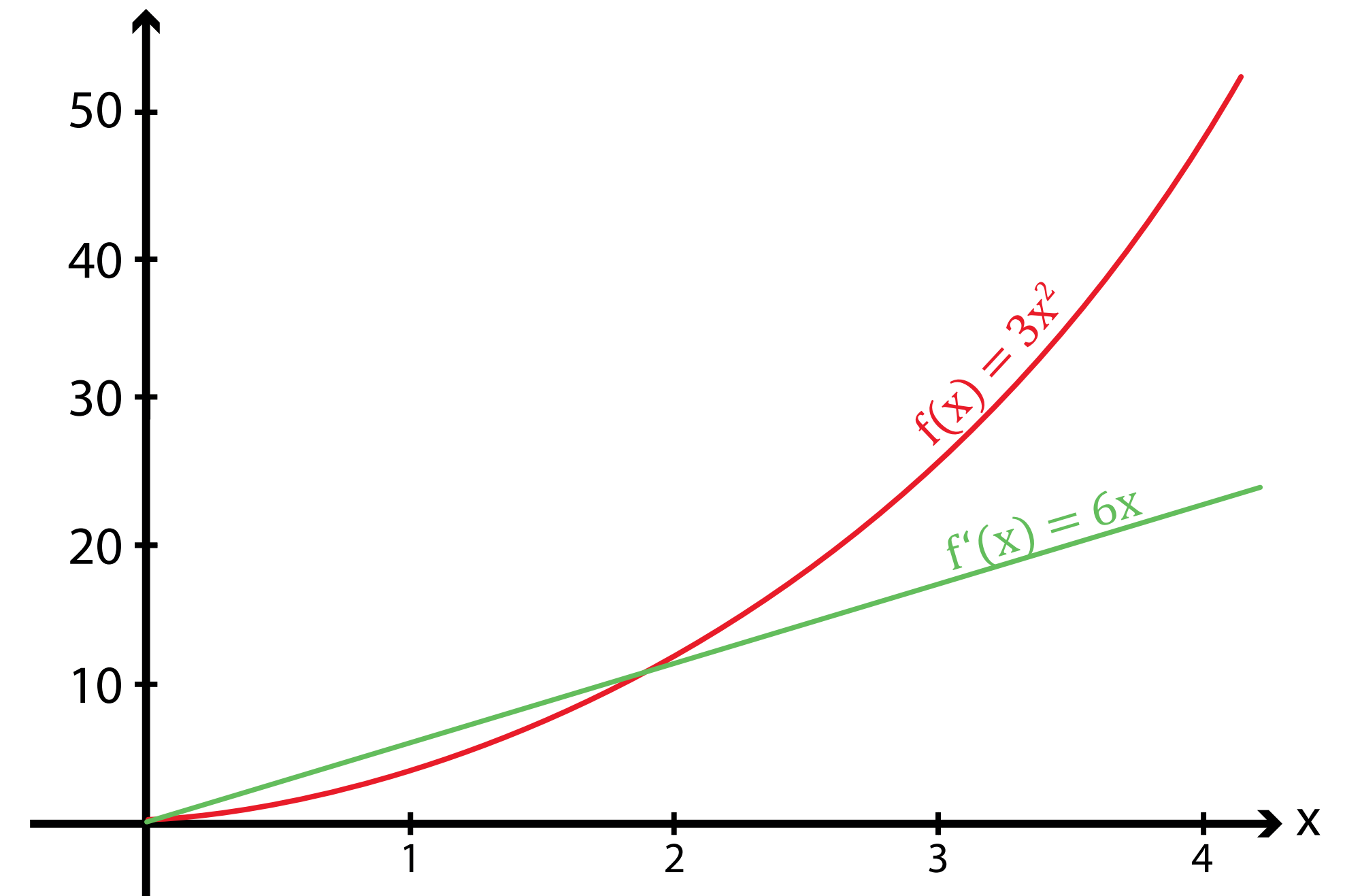
$$= b \cdot a \cdot x^{b-1}$$

Ableitungsregeln

Potenzregel Multipliziere den Faktor vor dem x mit dessen Exponenten und verringere den Exponenten um 1.

$$f(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^{(2-1)} = 6x$$



Ableitungsregeln

Diese Regel können wir auch auf Wurzeln anwenden, indem wir diese zu einer Potenz umschreiben:

$$f(x) = \sqrt{3x} = \sqrt{3} \sqrt{x} = \sqrt{3} \cdot x^{0.5}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.5 \sqrt{3} \cdot x^{0.5-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Erinnerung

$$a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

Ableitungsregeln

Diese Regel können wir auch auf Brüche anwenden, indem wir diese zu einer Potenz umschreiben:

$$f(x) = \frac{2}{3x} = \frac{2}{3} (x)^{-1}$$
$$f'(x) = \frac{-1 \cdot 2}{3} (x)^{-1-1} = -\frac{2}{3} (x)^{-2} = -\frac{2}{3x^2}$$

Erinnerung

$$a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

Ableitungsregeln

Diese Regel können wir auch auf Wurzeln in Brüchen anwenden, indem wir diese zu einer Potenz umschreiben:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x}} = \frac{2}{\sqrt{3}} x^{-0.5}$$

$$f'(x) = \frac{-0.5 \cdot 2}{\sqrt{3}} x^{-0.5-1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} x^{-1.5} = -\frac{1}{x^{1.5}\sqrt{3}} = -\frac{1}{x\sqrt{3x}}$$

Erinnerung

$$a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

Ableitungsregeln

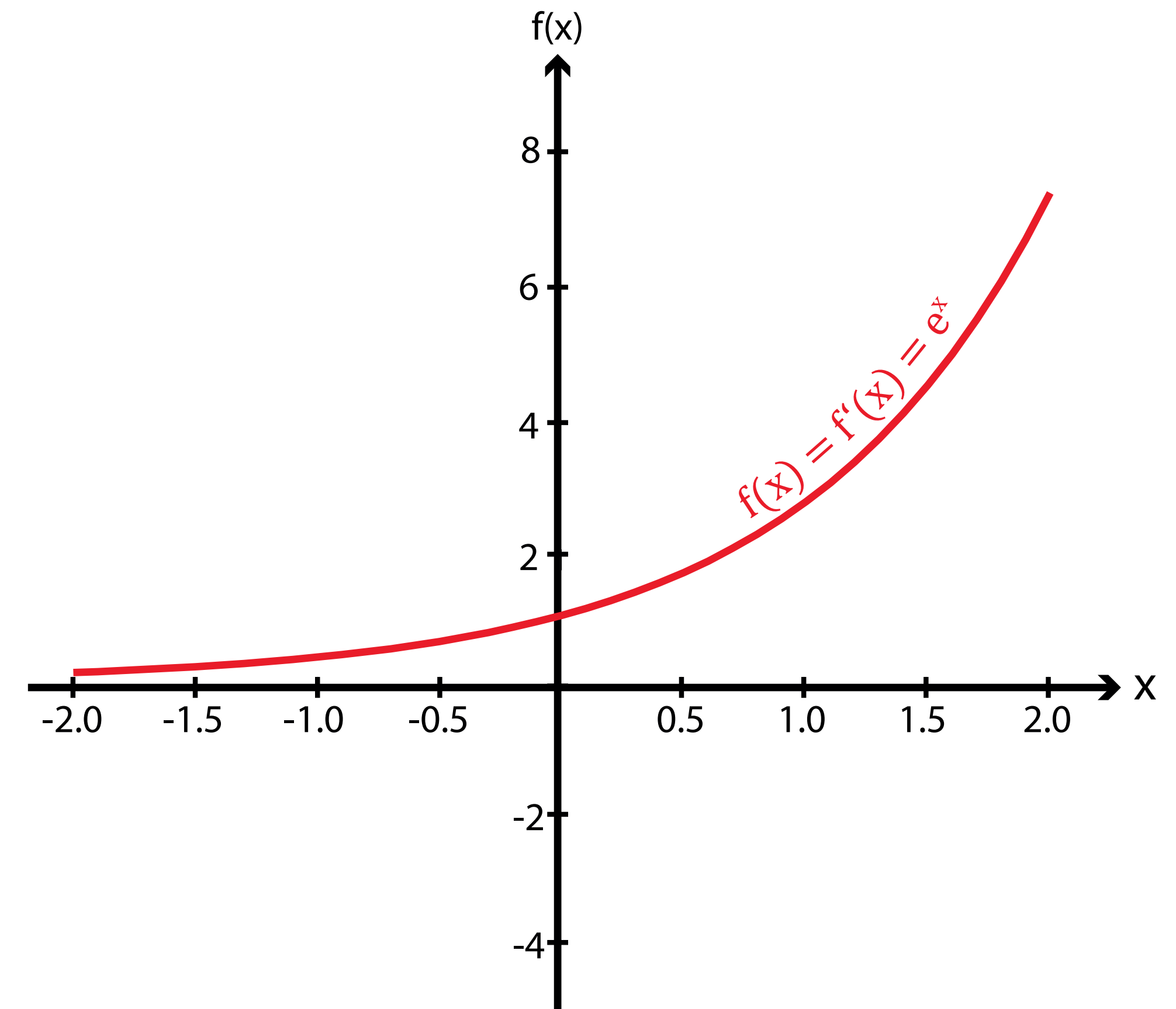
Bei Exponentialfunktionen mit der eulerschen Zahl e als Basis ...

$$f(x) = a \cdot e^x \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{mit } e \approx 2.71828$$

...ist die Ableitung gleich der ursprünglichen Funktion:

$$f'(x) = a \cdot e^x$$



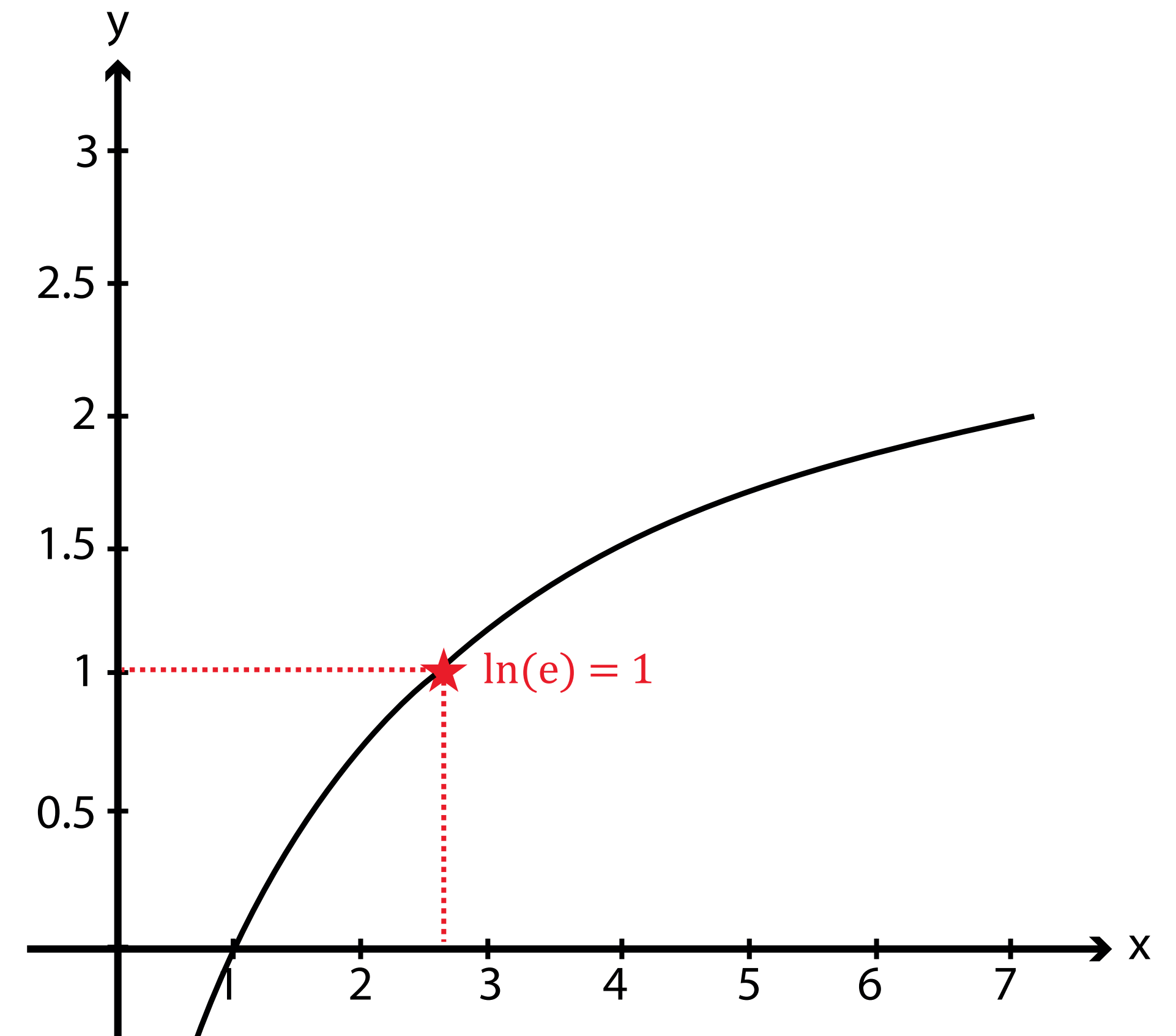
Ableitungsregeln

Beim Logarithmus mit der eulerschen Zahl e als Basis ...

$$f(x) = a \cdot \ln(x) \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

...ist die Ableitung:

$$f'(x) = a \cdot x^{-1}$$



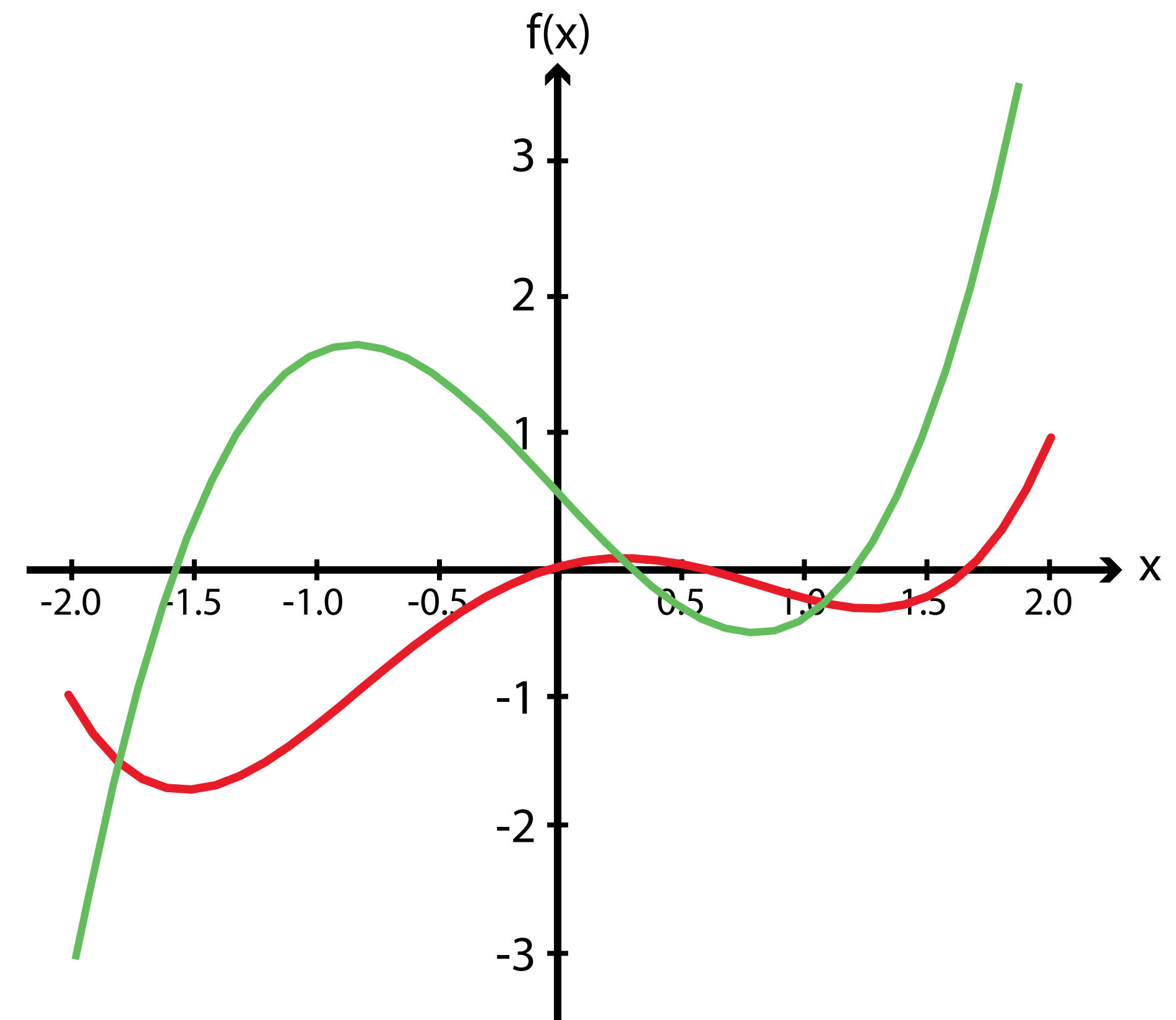
Mehr Ableitungsregeln

Summenregel Besteht eine Funktion aus mehreren mit \pm verbundenen Termen, werden die Summanden separat abgeleitet.

Beispiel: Potenzen die mit \pm verkettet sind ...

$$f(x) = 0.25x^4 - x^2 + 0.5x$$

$$f'(x) = x^3 - 2x + 0.5$$



Mehr Ableitungsregeln

Summenregel Besteht eine Funktion aus mehreren mit \pm verbundenen Termen, werden die Summanden separat abgeleitet.

Beispiel: Polynom mit Exponentialfunktion

$$f(x) = 0.25x^4 - x^2 + 5e^x$$

$$f'(x) = x^3 - 2x + 5e^x$$

Summenregel

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Mehr Ableitungsregeln

Produktregel Besteht eine Funktion aus zwei durch Multiplikation verbundene Teilfunktionen ...

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

so ist die Ableitung dieser Funktion gegeben durch:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Mehr Ableitungsregeln

Beispiel für Produktregel:

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$= 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot x^{-1}$$

$$= 2x \cdot \ln(x) + x$$

Nebenrechnung

$$g(x) = x^2$$

$$g'(x) = 2x$$

$$h(x) = \ln(x)$$

$$h'(x) = x^{-1}$$

Mehr Ableitungsregeln

Quotientenregel Besteht eine Funktion aus zwei durch Division verbundene Teilfunktionen ...

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

so ist die Ableitung dieser Funktion gegeben durch:

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot g(x)}{h(x)^2}$$

Mehr Ableitungsregeln

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot g(x)}{h(x)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot \ln(x) - x^{-1} \cdot x}{\ln(x)^2}$$

$$= \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$$

Nebenrechnung

$$g(x) = x$$

$$g'(x) = 1$$

$$h(x) = \ln(x)$$

$$h'(x) = x^{-1}$$

Mehr Ableitungsregeln

Kettenregel Besteht eine Funktion aus zwei miteinander verketteten Teilfunktionen ...

$$f(x) = g(h(x))$$

...dann bezeichnen wir $g(x)$ als äußere und $h(x)$ als innere Funktion. Die Ableitung ist gegeben durch ...

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$$

...das Produkt von innerer und äußerer Ableitung.

Kettenregel

$$f(x) = \overbrace{g(h(x))}^{\text{Äußere Fkt.}}$$

$\underbrace{h(x)}_{\text{Innere Fkt.}}$

$$f'(x) = \underbrace{h'(x)}_{\text{Innere Ableitung}} \overbrace{g'(h(x))}^{\text{Äußere Ableitung}}$$

$\underbrace{h(x)}_{\text{Innere Fkt.}}$

Mehr Ableitungsregeln

Beispiel zur Kettenregel:

$$f(x) = \ln(5x^2 + 3x)$$

Dann haben wir folgende innere und äußere Funktion:

$$g(x) = \ln(x)$$

$$h(x) = 5x^2 + 3x$$

Kettenregel

$$f(x) = \overbrace{g(h(x))}^{\text{Äußere Fkt.}}$$

Innere Fkt.

$$f'(x) = \underbrace{h'(x)}_{\text{Innere Ableitung}} \overbrace{g'(h(x))}^{\text{Äußere Ableitung}}$$

Innere Fkt.

Mehr Ableitungsregeln

Beispiel zur Kettenregel:

$$f(x) = \ln(5x^2 + 3x)$$

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$$

$$= (10x + 3) \cdot (5x^2 + 3x)^{-1}$$

$$= \frac{10x + 3}{5x^2 + 3x}$$

Kettenregel

$$f(x) = \overbrace{g(h(x))}^{\text{Äußere Fkt.}}$$

Innere Fkt.

$$f'(x) = \underbrace{h'(x)}_{\text{Innere Ableitung}} \overbrace{g'(h(x))}^{\text{Äußere Ableitung}}$$

Innere Fkt.

Mehr Ableitungsregeln

Wir können die Kettenregel auch nutzen, um Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis abzuleiten:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x \\ &= (e^{\ln(2)})^x \\ &= e^{x \cdot \ln(2)} \end{aligned}$$

$$g(x) = e^x \quad h(x) = x \cdot \ln(2)$$

$$g'(x) = e^x \quad h'(x) = \ln(2)$$

Kettenregel

$$f(x) = \overbrace{g(h(x))}^{\text{Äußere Fkt.}}$$

Innere Fkt.

$$f'(x) = \underbrace{h'(x)}_{\text{Innere Ableitung}} \overbrace{g'(h(x))}^{\text{Äußere Ableitung}}$$

Innere Fkt.

Mehr Ableitungsregeln

Wir können die Kettenregel auch nutzen, um Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis abzuleiten:

$$f(x) = e^{x \cdot \ln(2)}$$

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$$

$$= \ln(2) \cdot e^{x \cdot \ln(2)}$$

$$= \ln(2) \cdot (e^{\ln(2)})^x$$

$$= \ln(2) \cdot 2^x$$

Kettenregel

$$f(x) = \overbrace{g(h(x))}^{\text{Äußere Fkt.}}$$

Innere Fkt.

$$f'(x) = \underbrace{h'(x)}_{\text{Innere Ableitung}} \overbrace{g'(h(x))}^{\text{Äußere Ableitung}}$$

Innere Fkt.

Mehr Ableitungsregeln

Nullregel Summanden in denen die Variable nach der abgeleitet wird nicht vorkommt, fallen bei der Ableitung weg.

$$f(x) = x + t + tx$$

In diesem Beispiel sei die Funktion nur von der Variable x abhängig. Das t ist dagegen ein Parameter mit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 0 + t \\ &= 1 + t \end{aligned}$$

Potenzregel

$$f(x) = a \cdot x^b$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a \cdot x^{b-1} \\ &= b \cdot a \cdot x^{b-1} \end{aligned}$$

Mehr Ableitungsregeln

Nullregel ist eigentlich nur ein Spezialfall der Potenzregel, da wir das t in der Funktion umschreiben könnten:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + t + tx \\ &= x + t \cdot x^0 + tx \end{aligned}$$

Das ist erlaubt, da $x^0 = 1$ und die 1 das neutrale Element der Multiplikation ist. Bei der Ableitung multiplizieren wir dann den Vorfaktor t mit dieser 0 und erhalten somit:

$$f'(x) = 1 + 0 + t$$

Potenzregel

$$f(x) = a \cdot x^b$$

$$f'(x) = a \cdot x^{b-1}$$

$$= b \cdot a \cdot x^{b-1}$$

Mehr Ableitungsregeln

Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f(x) = (20x-5)^2$$

$$g(x) = e^x - \sqrt{x} \ln(x)$$

$$h(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$k(x) = e^{\sqrt{x}}$$

Mehr Ableitungsregeln

$$f(x) = (20x-5)^2$$

Zweite binomische Formel

$$= 400x^2 - 200x + 25$$

Potenzregel anwenden

$$f'(x) = 2 \cdot 400x^{2-1} - 1 \cdot 200x^{1-1}$$

$$= 800x - 200$$

Mehr Ableitungsregeln

$$g(x) = e^x - \sqrt{x} \ln(x)$$

$$g'(x) = e^x - [g_1'(x) \cdot g_2(x) + g_2'(x) \cdot g_1(x)]$$

$$g'(x) = e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(x) - \frac{1}{x} \sqrt{x}$$

$$g'(x) = e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(x) - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Produktregel für rot markierten Term

Links $g_1(x) = \sqrt{x}$ $g_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Rechts $g_2(x) = \ln(x)$ $g_2'(x) = \frac{1}{x}$

Mehr Ableitungsregeln

$$h(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$h'(x) = \frac{h_1'(x) \cdot h_2(x) - h_2'(x) \cdot h_1(x)}{h_2^2(x)}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{e^x \cdot x - 1 \cdot e^x}{x^2} \\ &= \frac{e^x(x - 1)}{x^2} \end{aligned}$$

Quotientenregel für $h(x)$

Links $h_1(x) = e^x$ $h_1'(x) = e^x$

Rechts $h_2(x) = x$ $h_2'(x) = 1$

Mehr Ableitungsregeln

$$k(x) = e^{\sqrt{x}}$$

$$k'(x) = k_2'(x) \cdot k_1'(k_2(x))$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

Kettenregel für $k(x)$

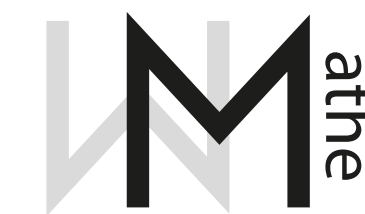
$$\text{Außen } k_1(x) = e^x \quad k_1'(x) = e^x$$

$$\text{Innen } k_2(x) = \sqrt{x} \quad k_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Mehr Ableitungsregeln

Wir kennen jetzt die Definition und die wichtigsten Rechenregeln für die Ableitung. Welche Anwendungen haben Ableitungen außer das Messen von Steigungen?

- Extremstellen bestimmen
- Monotonie
- Konvexität



Inhalte Analysis I

- Funktionen ✓
 - Definitions- und Wertebereiche ✓
 - Grenzwerte ✓
 - Stetigkeit ✓
 - Differenzialrechnung ✓
 - Ableitungsregeln ✓
 - Extremstellen
 - Monotonie
 - Konvexität
-

Extremstellen

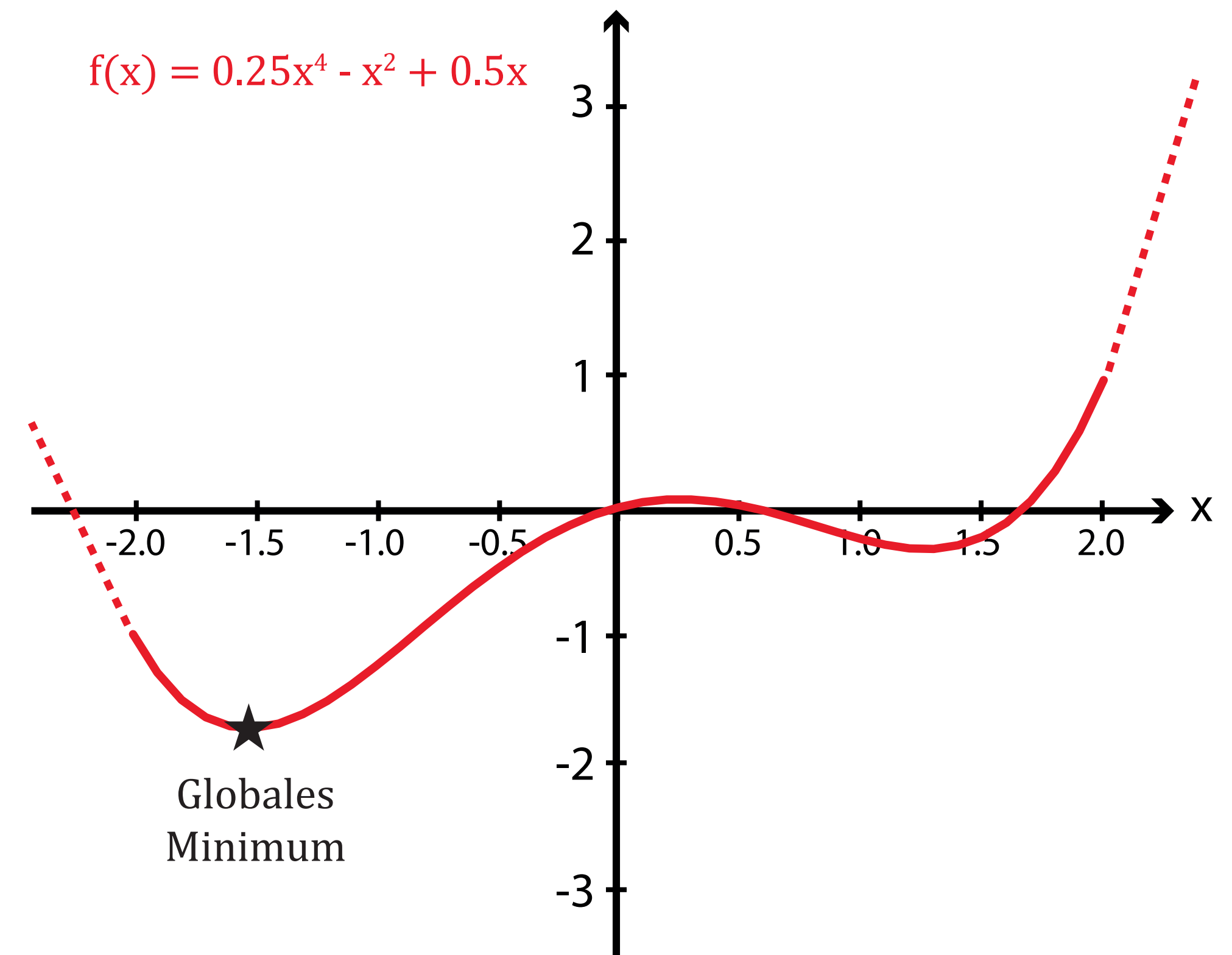
Minimum Eine Stelle x_0 einer Funktion wird als globales Minimum bezeichnet, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich gilt:

$$f(x_0) \leq f(x)$$

Maximum Eine Stelle x_0 einer Funktion wird als globales Maximum bezeichnet, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich gilt:

$$f(x_0) \geq f(x)$$

Funktionen können beides, eins davon oder keins davon haben.



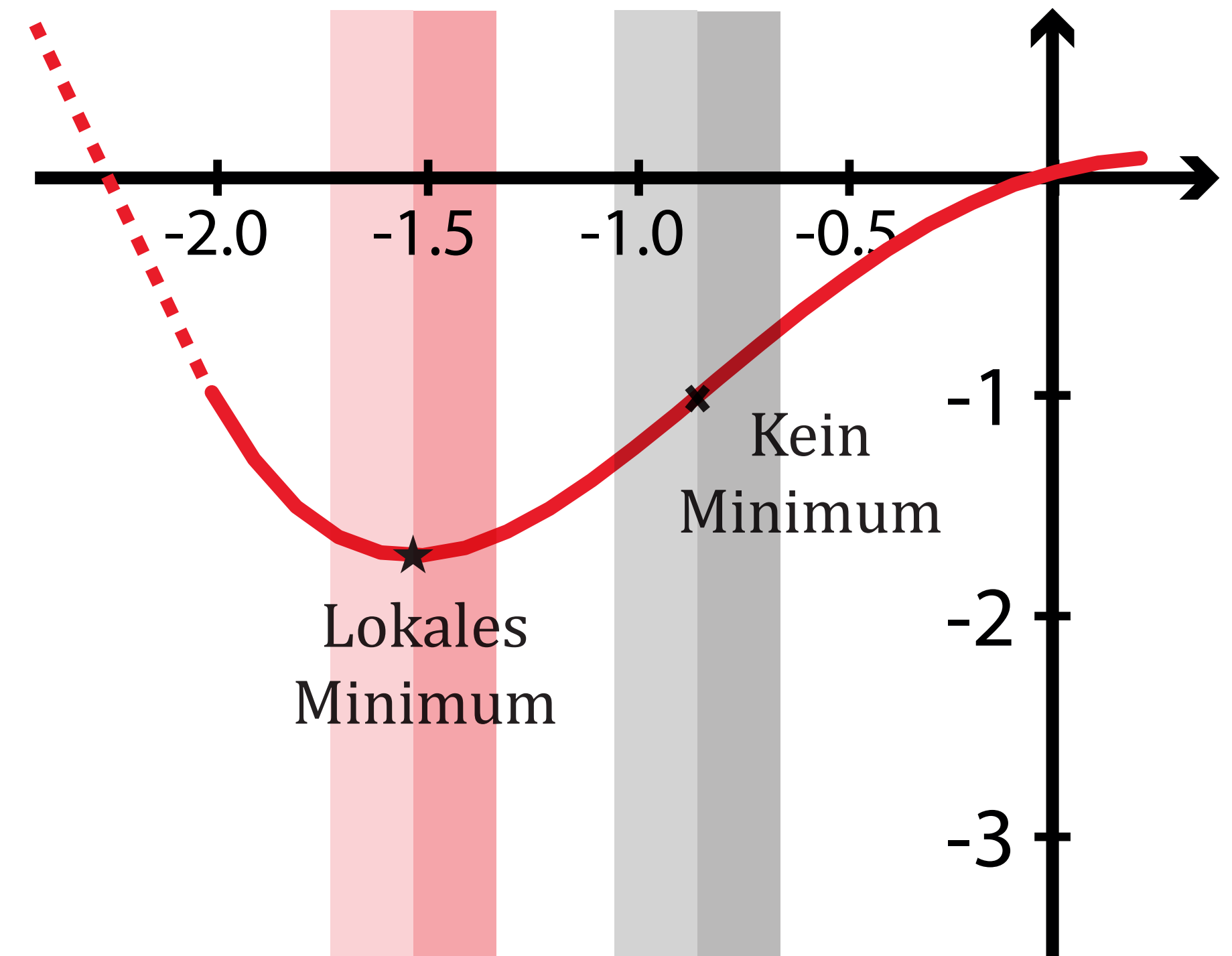
Extremstellen

Lokales Minimum Eine Stelle x_0 einer Funktion wird als lokales Minimum bezeichnet, wenn ein ε existiert mit:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall \quad x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

In einem kleinen Bereich um die Stelle x_0 muss der Funktionswert größer als direkt an der Stelle x_0 sein.

Der Bereich kann beliebig klein sein, aber er muss existieren.



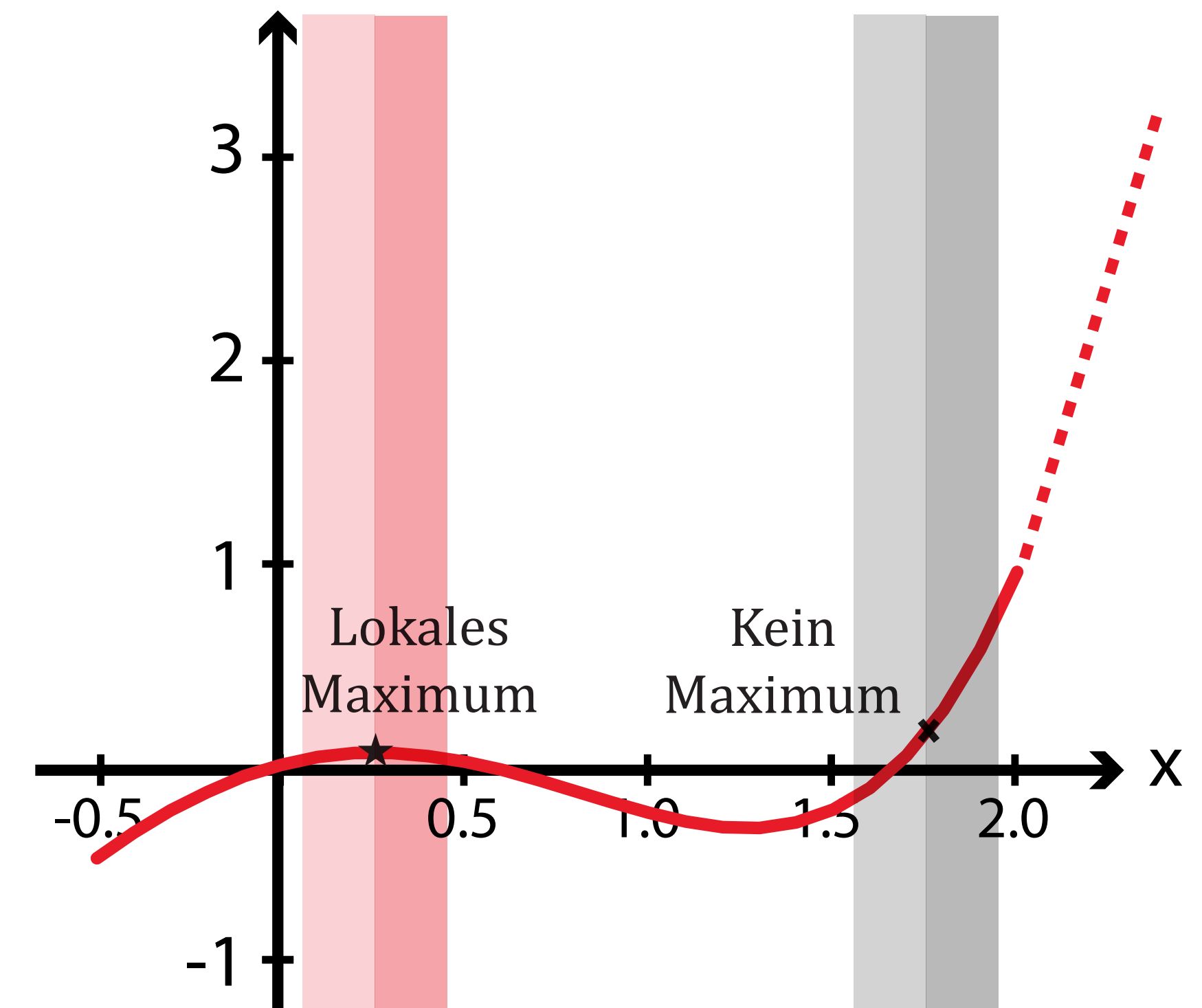
Extremstellen

Lokales Maximum Eine Stelle x_0 einer Funktion wird als lokales Maximum bezeichnet, wenn ein ε existiert mit:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall \quad x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

In einem kleinen Bereich um die Stelle x_0 muss der Funktionswert kleiner als direkt an der Stelle x_0 sein.

Der Bereich kann beliebig klein sein, aber er muss existieren.



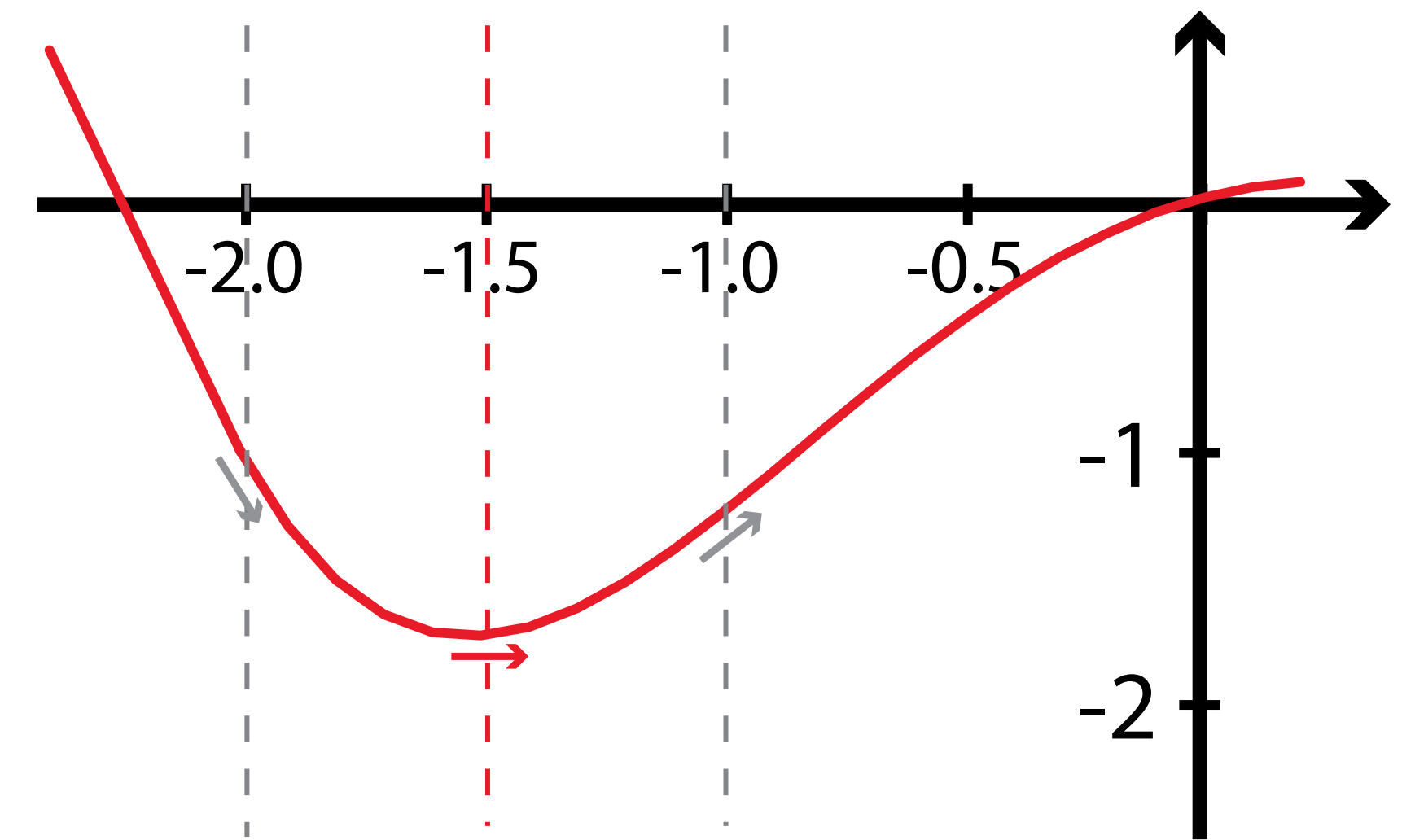
Extremstellen

Damit ein lokales Minimum/Maximum an der Stelle x_0 vorliegen kann, muss die Steigung an dieser Stelle 0 sein.

Wäre die **Steigung positiv**, würde die Funktion nach rechts steigen und nach links fallen.

Kein Minimum Wir finden keinen noch so kleinen Bereich um x_0 in welchem alle Funktionswerte größer als x_0 sind.

Kein Maximum Wir finden keinen noch so kleinen Bereich um x_0 in welchem alle Funktionswerte kleiner als x_0 sind.



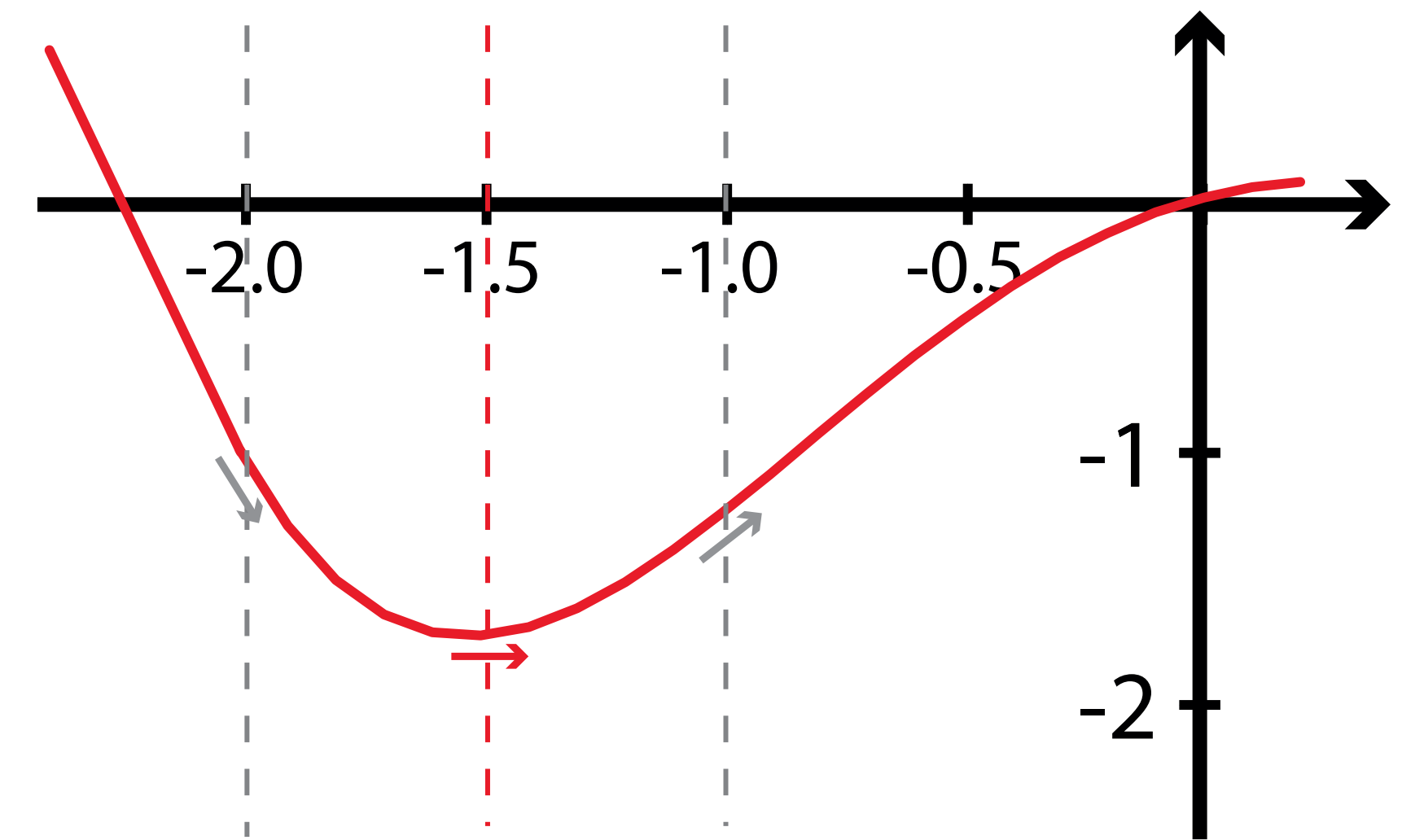
Extremstellen

Damit ein lokales Minimum/Maximum an der Stelle x_0 vorliegen kann, muss die Steigung an dieser Stelle 0 sein.

Wäre die **Steigung negativ**, würde die Funktion nach rechts fallen und nach links steigen.

Kein Minimum Wir finden keinen noch so kleinen Bereich um x_0 in welchem alle Funktionswerte größer als x_0 sind.

Kein Maximum Wir finden keinen noch so kleinen Bereich um x_0 in welchem alle Funktionswerte kleiner als x_0 sind.

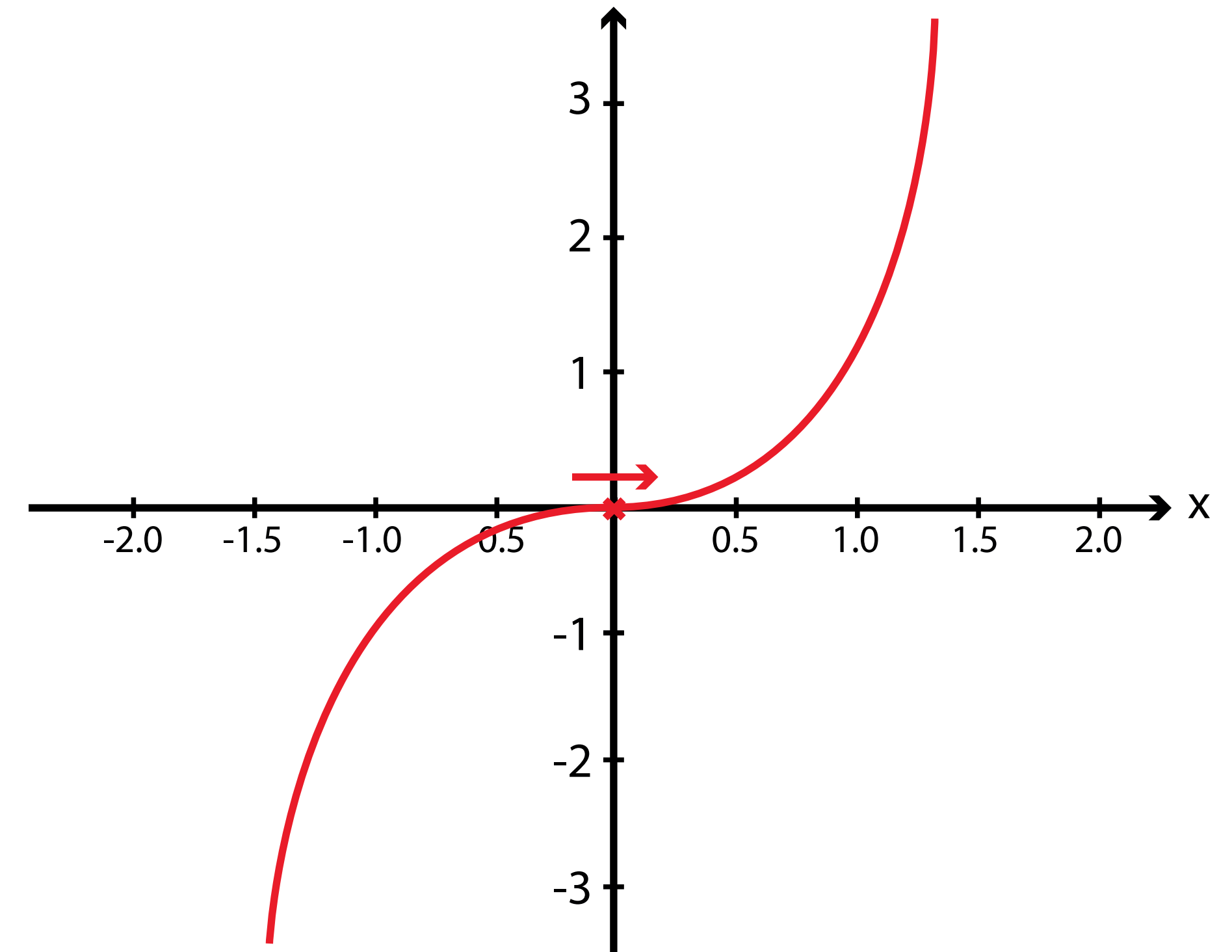


Extremstellen

Notwendige Bedingung Ist x_0 ein lokales Extremum, d. h. ein Minimum oder Maximum der Funktion $f(x)$, dann gilt $f'(x_0) = 0$

Die umgekehrte Logik funktioniert nicht! Es kann Stellen mit Ableitung $f'(x_0) = 0$ geben an denen $f(x)$ kein lokales Extremum hat.

Wir brauchen eine zusätzliche hinreichende Bedingung!

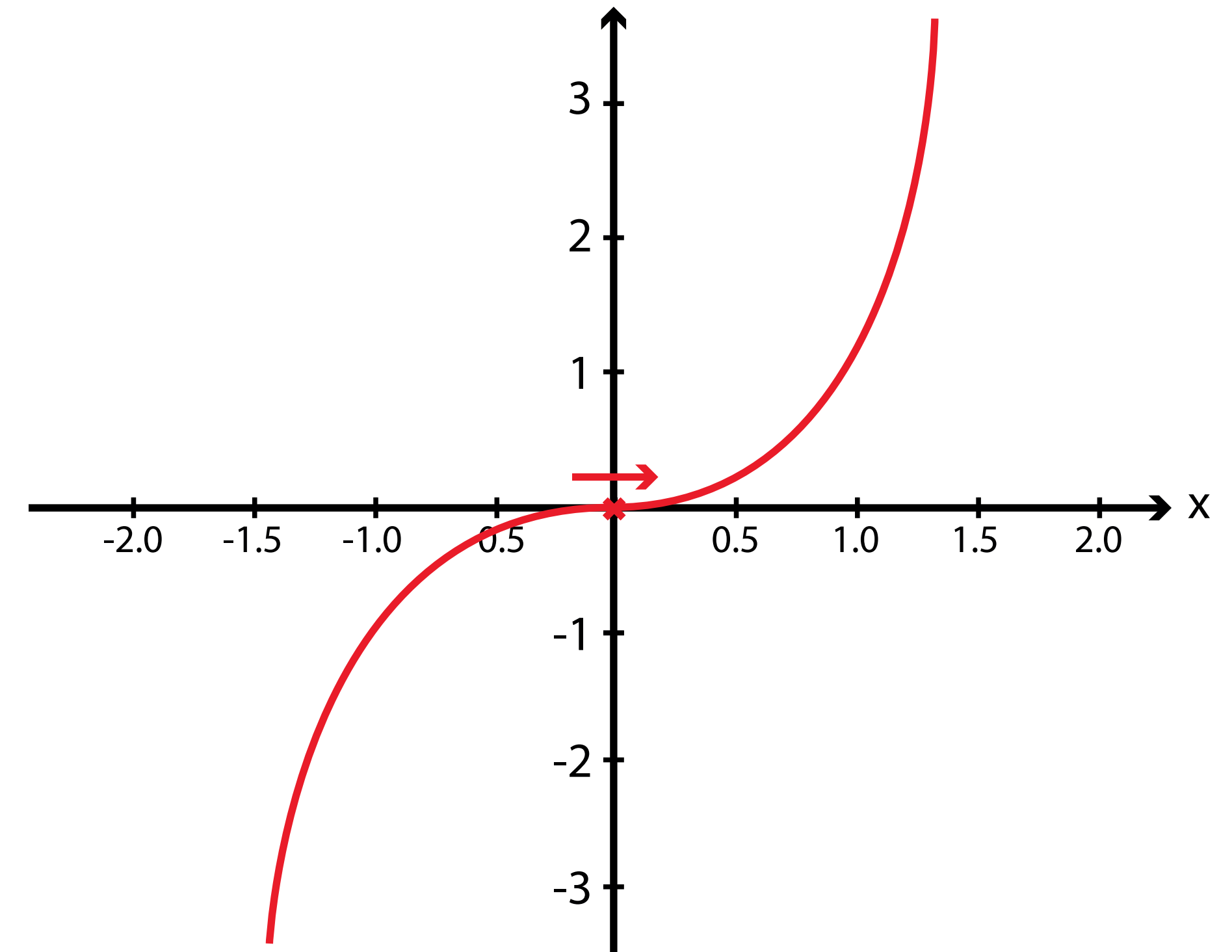


Extremstellen

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ dann ist die Stelle x_0 ein lokales Maximum von $f(x)$.

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ dann ist die Stelle x_0 ein lokales Minimum von $f(x)$.

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ dann ist die Stelle x_0 ein Sattelpunkt von $f(x)$, aber keine Extremstelle.



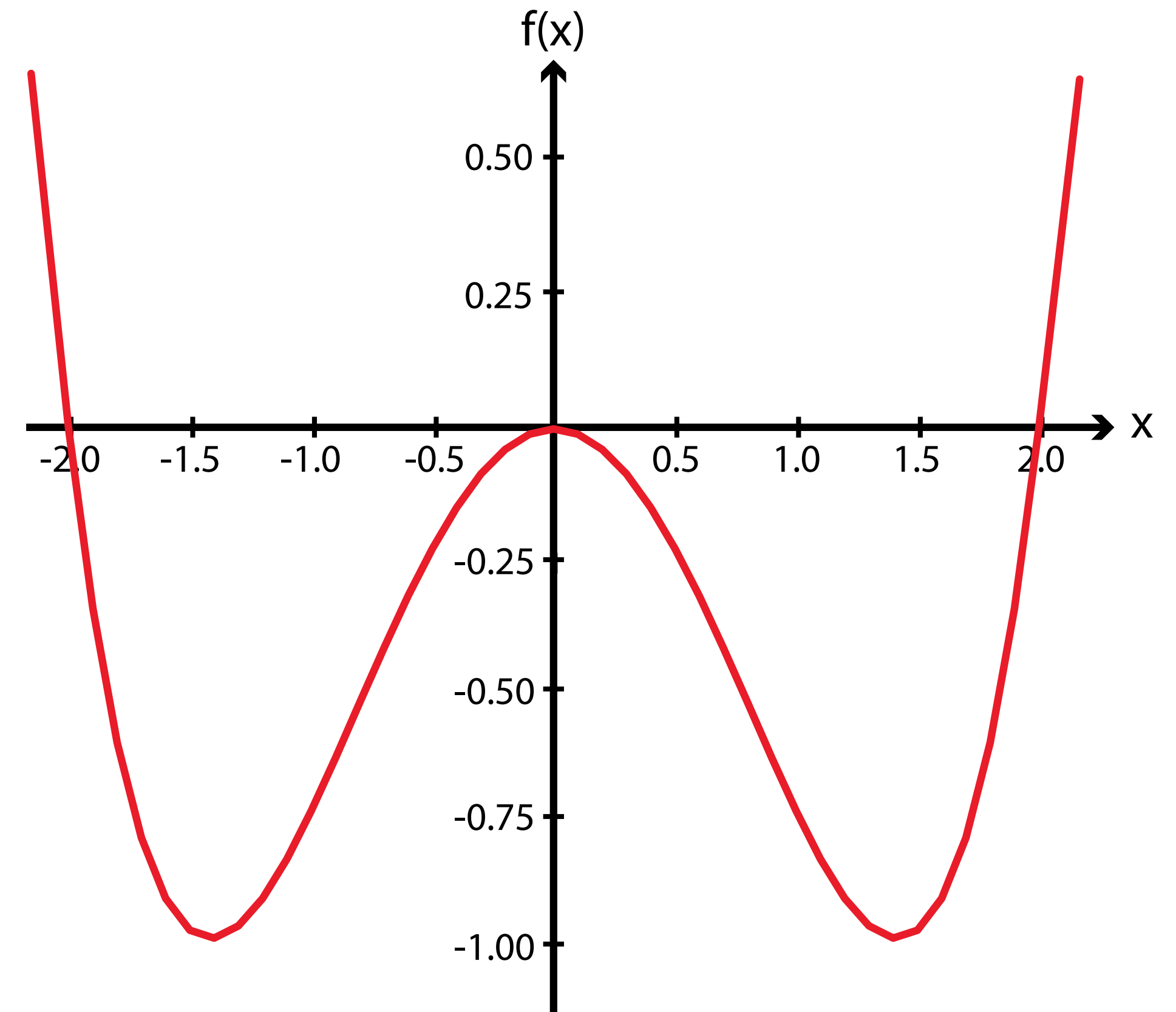
Extremstellen

Die zweiten Ableitungen sind die Ableitung der ersten Ableitung.

Die Rechenregeln sind genau die gleichen wie beim Bilden der ersten Ableitung.

Beispiel Wir suchen die Extremstellen der Funktion:

$$f(x) = 0.25x^4 - x^2$$



Extremstellen

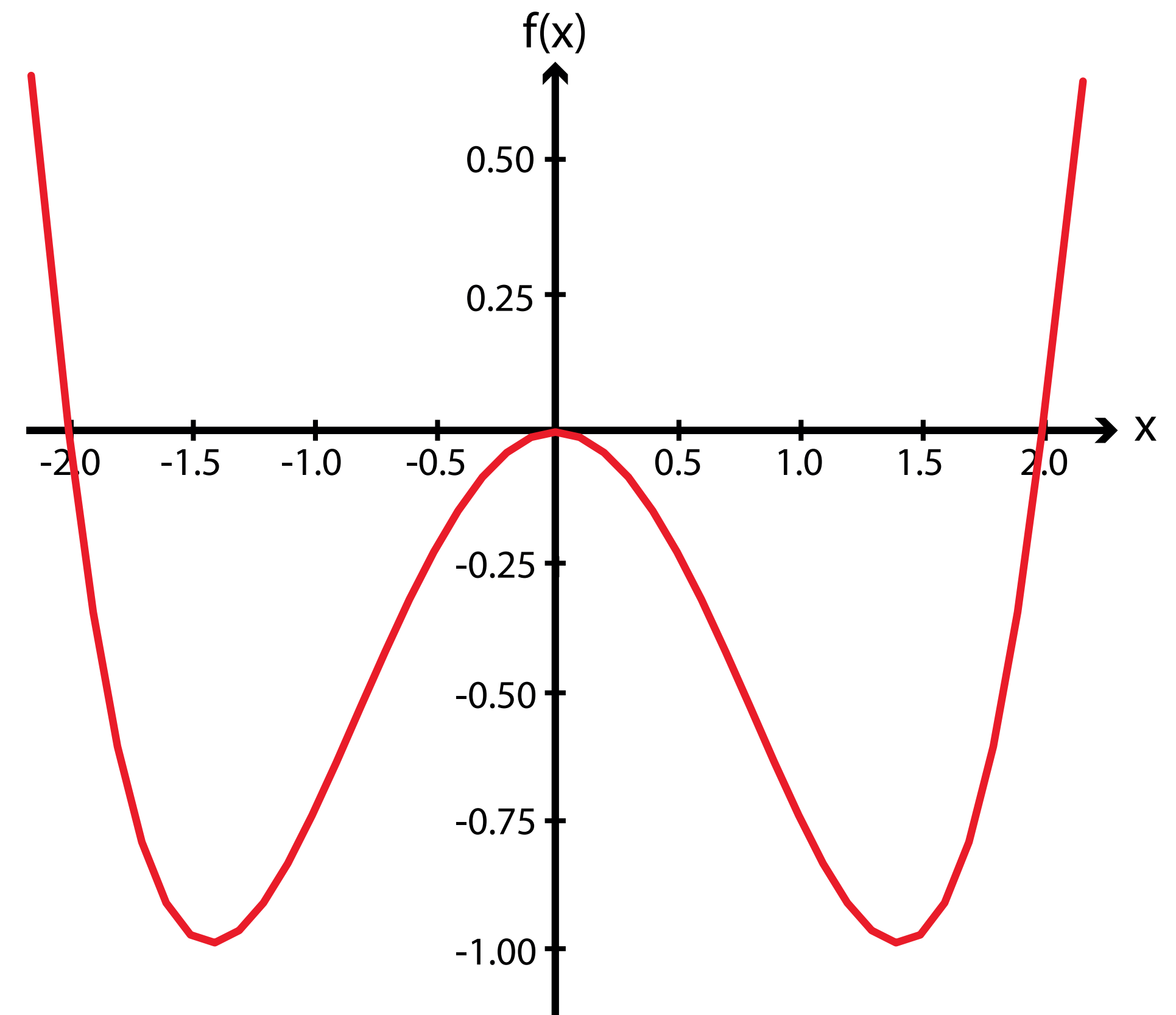
Die erste Ableitung dieser Funktion erhalten wir durch die Anwendung von Potenz- und Summenregel.

$$f(x) = 0.25x^4 - x^2$$

$$f'(x) = x^3 - 2x$$

Die zweite Ableitung erhalten wir ebenfalls durch die Anwendung von Potenz- und Summenregel.

$$f''(x) = 3x^2 - 2$$



Extremstellen

An einer Extremstelle muss die erste Ableitung null sein:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - 2x \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2 - 2) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = 0 \end{aligned}$$

An diesen drei Stellen könnte die Funktion ein Minimum, Maximum oder aber einen Wendepunkt haben.

Beispielfunktion

$$f(x) = 0.25x^4 - x^2$$

$$f'(x) = x^3 - 2x$$

$$f''(x) = 3x^2 - 2$$

Extremstellen

Wir setzen die Stellen in die zweite Ableitung ein:

$$f''(-\sqrt{2}) = 3 \cdot (-\sqrt{2})^2 - 2 = 10 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

$$f''(\sqrt{2}) = 3 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2 = 10 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

$$f''(0) = 3 \cdot (0)^2 - 2 = -2 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

Beispielfunktion

$$f(x) = 0.25x^4 - x^2$$

$$f'(x) = x^3 - 2x$$

$$f''(x) = 3x^2 - 2$$

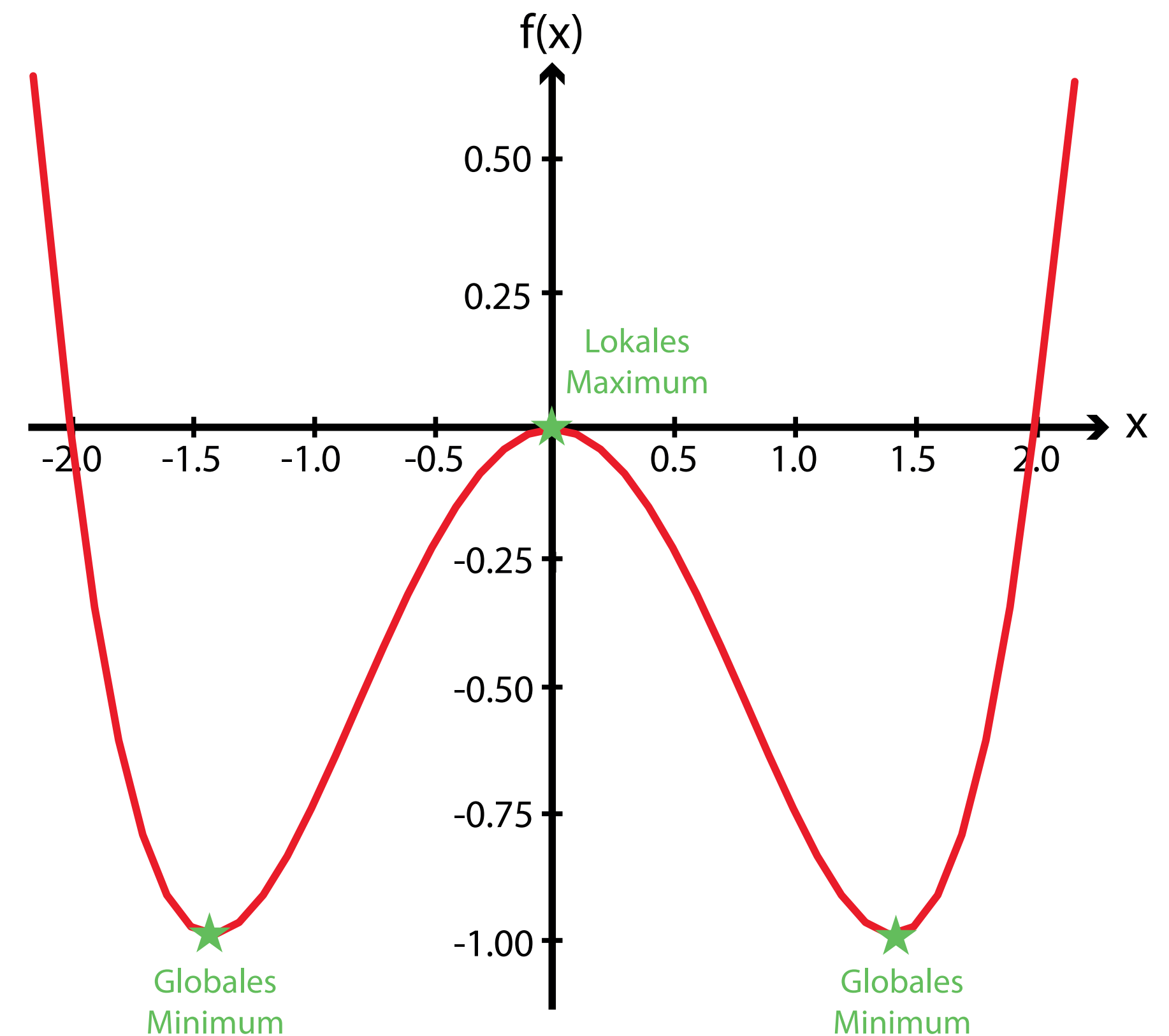
Extremstellen

Wir setzen die Stellen in die zweite Ableitung ein:

$$f''(-\sqrt{2}) = 3 \cdot (-\sqrt{2})^2 - 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

$$f''(\sqrt{2}) = 3 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

$$f''(0) = 3 \cdot (0)^2 - 2 = -2 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

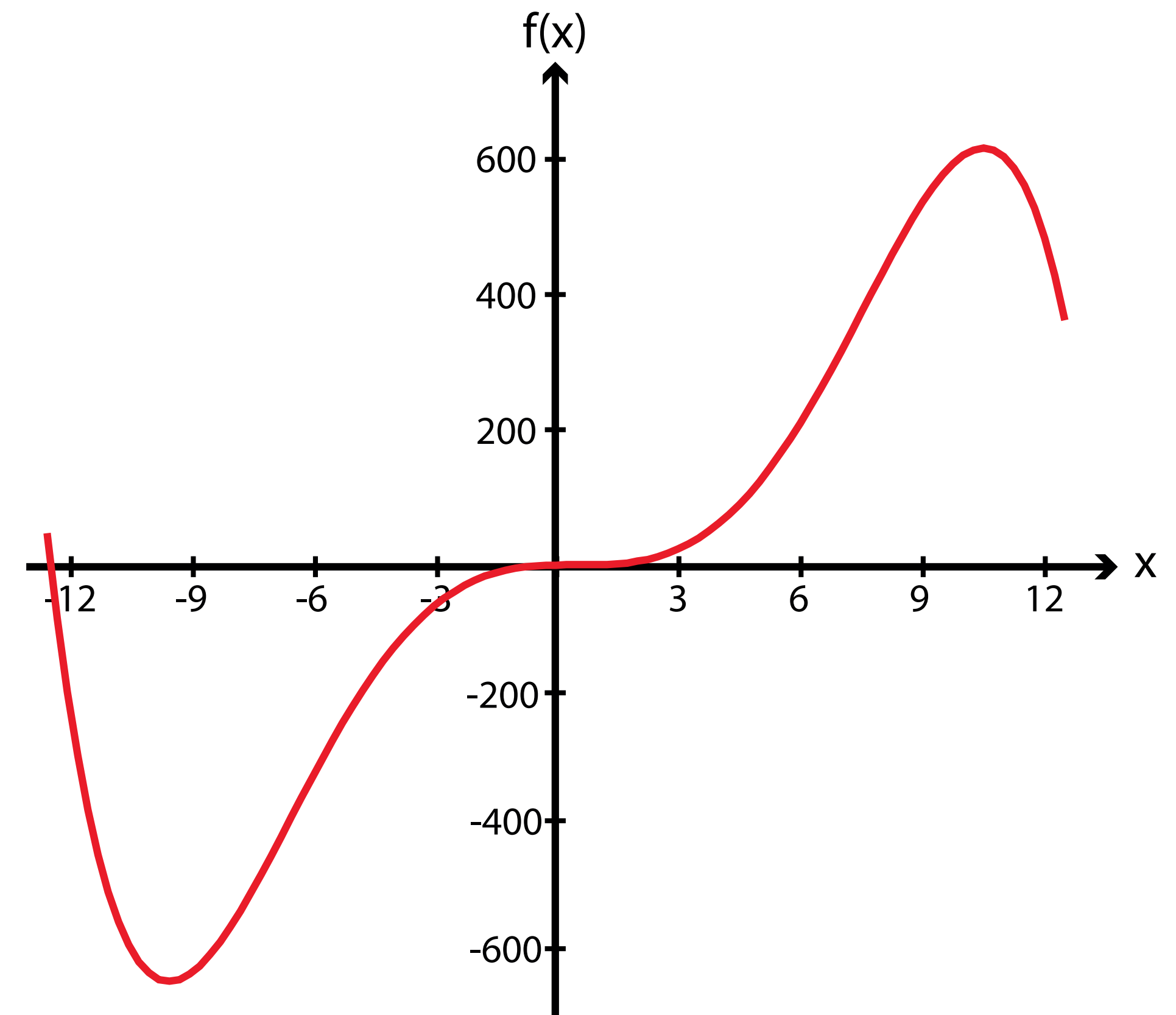


Extremstellen

Zweites Beispiel wir suchen die Extremstellen der Funktion:

$$f(x) = \frac{5}{3}x^3 - 0.01x^5$$

Wir berechnen die erste und zweite Ableitung:



Extremstellen

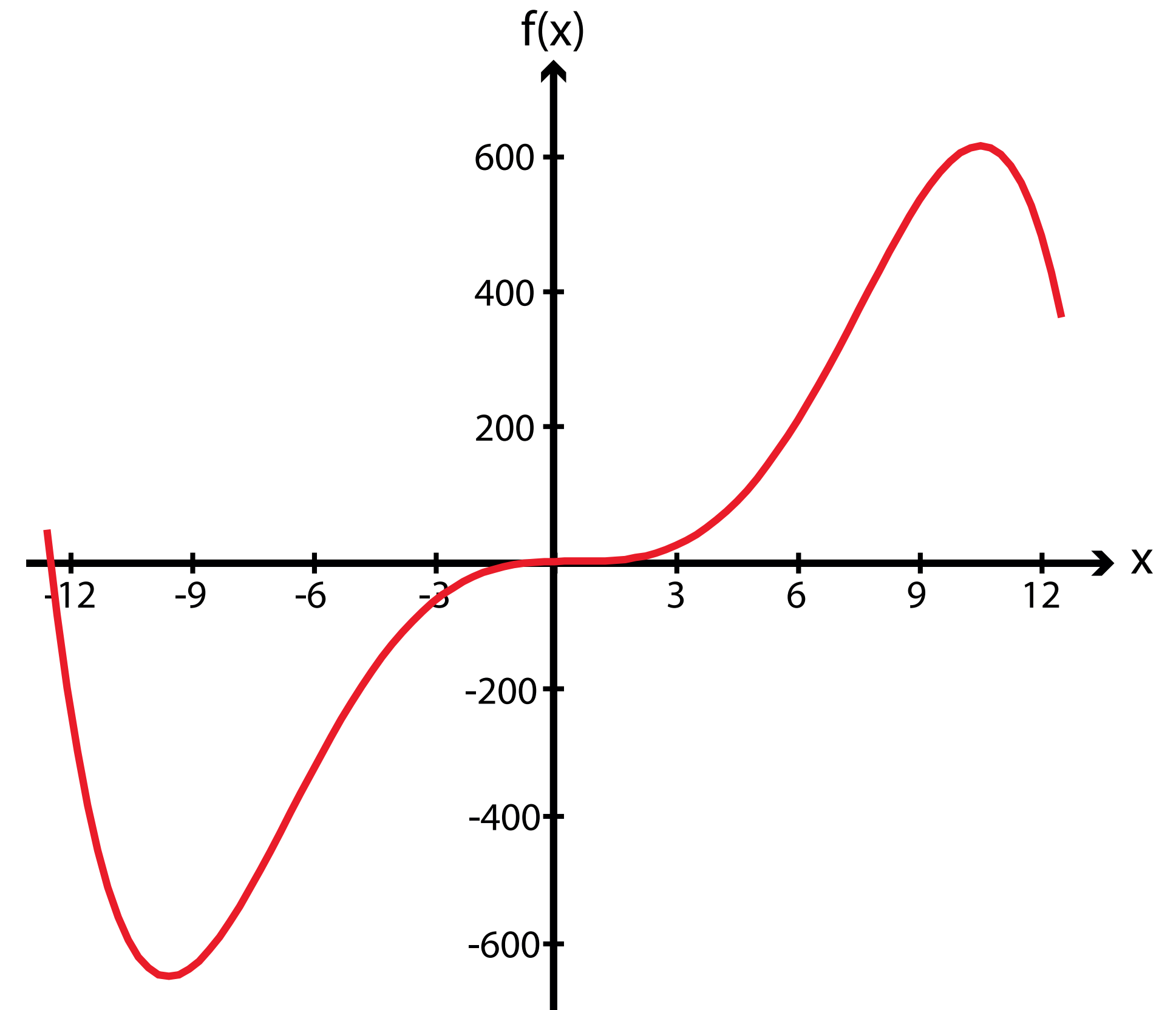
Zweites Beispiel wir suchen die Extremstellen der Funktion:

$$f(x) = \frac{5}{3}x^3 - 0.01x^5$$

Wir berechnen die erste und zweite Ableitung:

$$f'(x) = 5x^2 - 0.05x^4$$

$$f''(x) = 10x - 0.2x^3$$



Extremstellen

An einer Extremstelle muss die erste Ableitung null sein:

$$f'(x) = 5x^2 - 0.05x^4 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\iff x^2(5 - 0.05x^2) = 0$$

$$\stackrel{\text{MN}}{\implies} x_1 = 10, x_2 = -10, x_3 = 0$$

An diesen drei Stellen könnte die Funktion ein Minimum, Maximum oder aber einen Wendepunkt haben.

Beispielfunktion

$$f(x) = \frac{5}{3}x^3 - 0.01x^5$$

$$f'(x) = 5x^2 - 0.05x^4$$

$$f''(x) = 10x - 0.2x^3$$

Extremstellen

Wir setzen die Stellen in die zweite Ableitung ein:

$$f''(-10) = 10 \cdot (-10) - 0.2 \cdot (-10)^3 = 100 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

$$f''(10) = 10 \cdot 10 - 0.2 \cdot 10^3 = -100 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

$$f''(0) = 10 \cdot 0 - 0.2 \cdot 0^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt}$$

Beispielfunktion

$$f(x) = \frac{5}{3} x^3 - 0.01 x^5$$

$$f'(x) = 5x^2 - 0.05x^4$$

$$f''(x) = 10x - 0.2x^3$$

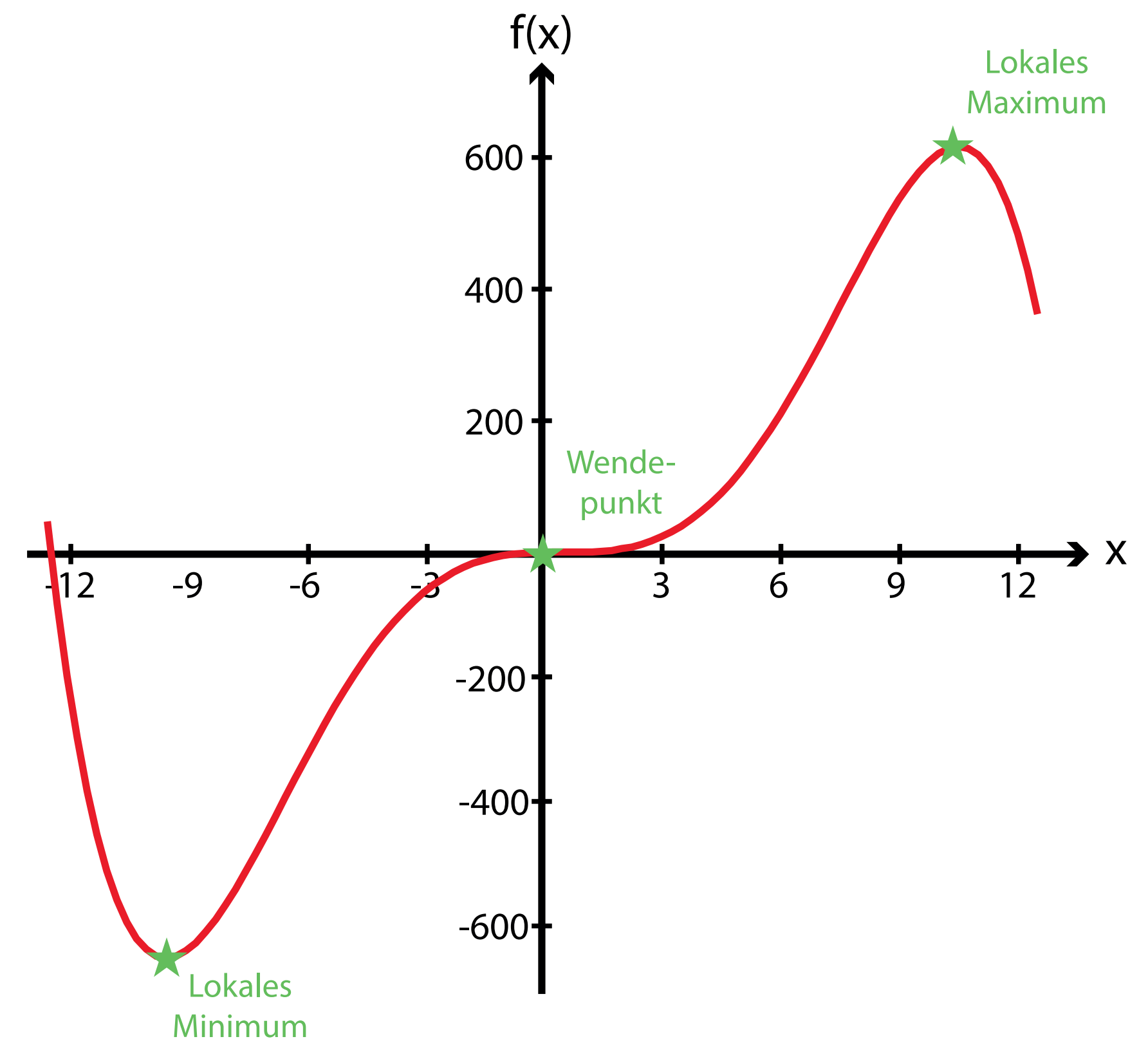
Extremstellen

Wir setzen die Stellen in die zweite Ableitung ein:

$$f''(-10) = 10 \cdot (-10) - 0.2 \cdot (-10)^3 = 100 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

$$f''(10) = 10 \cdot 10 - 0.2 \cdot 10^3 = -100 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

$$f''(0) = 10 \cdot 0 - 0.2 \cdot 0^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt}$$



Extremstellen

Finde alle Minima, Maxima der folgenden Funktionen. Unterscheide dabei zwischen lokalen und globalen Extrema.

$$f(x) = 3x^2 - 2x$$

$$g(x) = 0.1x^3 - x^2$$

$$h(x) = x^3 - 5x^2 + 15x$$

$$k(x) = 2x - \sqrt{x}$$

Extremstellen

$$f(x) = 3x^2 - 2x$$

Funktion

Werte der zweiten Ableitungen bei x_i

$$f'(x) = 6x - 2$$

Erste Ableitung

$$f''(1/3) = 6$$

Minimum!

$$f''(x) = 6$$

Zweite Ableitung

$$f'(x) = 6x - 2 \stackrel{!}{=} 0$$

Setze 1. Ableitung null

Minimum bei 1/3 ist global, denn...

$$6x - 2 = 0$$

| + 2

$$\Leftrightarrow 6x = 2$$

| : 6

$$\Leftrightarrow x_1 = 1/3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Extremstellen

$$g(x) = 0.1x^3 - x^2$$

Funktion

Werte der zweiten Ableitungen bei x_i

$$g'(x) = 0.3x^2 - 2x$$

Erste Ableitung

$$g''(20/3) = 2$$

Minimum!

$$g''(x) = 0.6x - 2$$

Zweite Ableitung

$$g''(0) = -2$$

Maximum!

$$g'(x) = 0.3x^2 - 2x \stackrel{!}{=} 0$$

Setze 1. Ableitung null

Beides ist nur lokal, denn...

$$\begin{aligned}
 &0.3x^2 - 2x = 0 && | + 2x \\
 \Leftrightarrow &0.3x^2 = 2x && | : 0.3x \\
 \Rightarrow &x_1 = \frac{20}{3} && x_2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

Extremstellen

$$h(x) = x^3 - 5x^2 + 15x \quad \text{Funktion}$$

$$h'(x) = 3x^2 - 10x + 15 \quad \text{Erste Ableitung}$$

$$h''(x) = 6x - 10 \quad \text{Zweite Ableitung}$$

Werte der zweiten Ableitungen bei x_i

Es gibt keine Nullstellen von $h'(x)$

Keine Extrema, nur Wendestelle bei $x=5/3$

$$h'(x) = 3x^2 - 10x + 15 \stackrel{!}{=} 0$$

Einteilung in lokal/global hinfällig

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 180}}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$$

Keine reelle Lösung :(

Extremstellen

$$k(x) = 2x - \sqrt{x}$$

Funktion

$$k'(x) = 2 - 0.5x^{-0.5}$$

Erste Ableitung

$$k''(x) = 0.25x^{-1.5}$$

Zweite Ableitung

Werte der zweiten Ableitungen bei x_i

$$k''(1/16) = 16$$

Minimum!

$$k'(x) = 2 - 0.5x^{-0.5} \stackrel{!}{=} 0$$

$$| + 0.5x^{-0.5}$$

$$\Leftrightarrow 0.5x^{-0.5} = 2 \quad | : 0.5$$

$$\Leftrightarrow x^{-0.5} = 4 \quad | (\dots)^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1/16$$

Minimum bei 16 ist global, denn...

$$\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = \infty$$

Für kleinere x ist $k(x)$
nicht mehr definiert

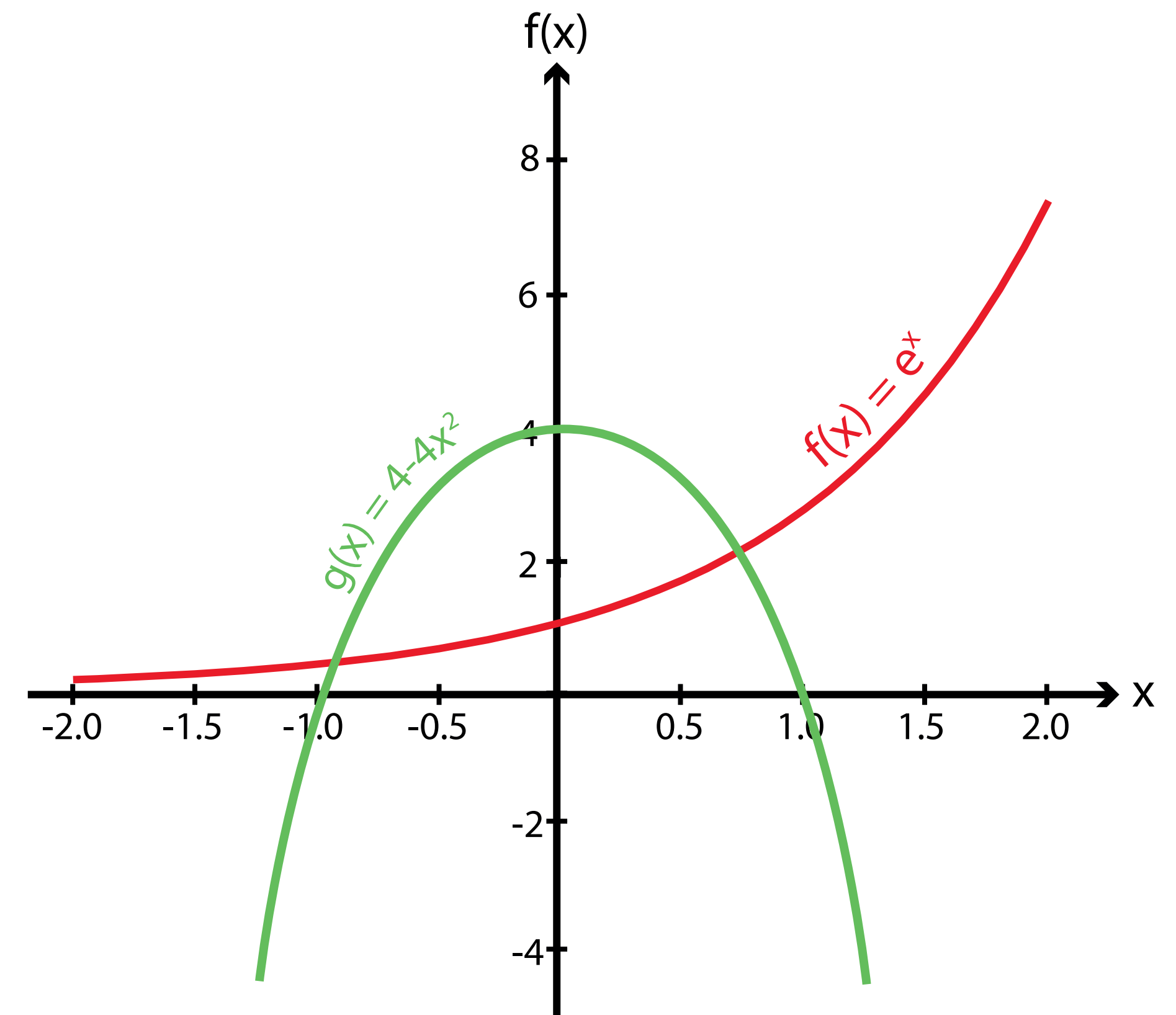
Monotonie

Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann monoton steigend in der Variable x , wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall x > x_0 \text{ gilt } f(x) \geq f(x_0)$$

Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann streng monoton steigend in der Variable x , wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall x > x_0 \text{ gilt } f(x) > f(x_0)$$



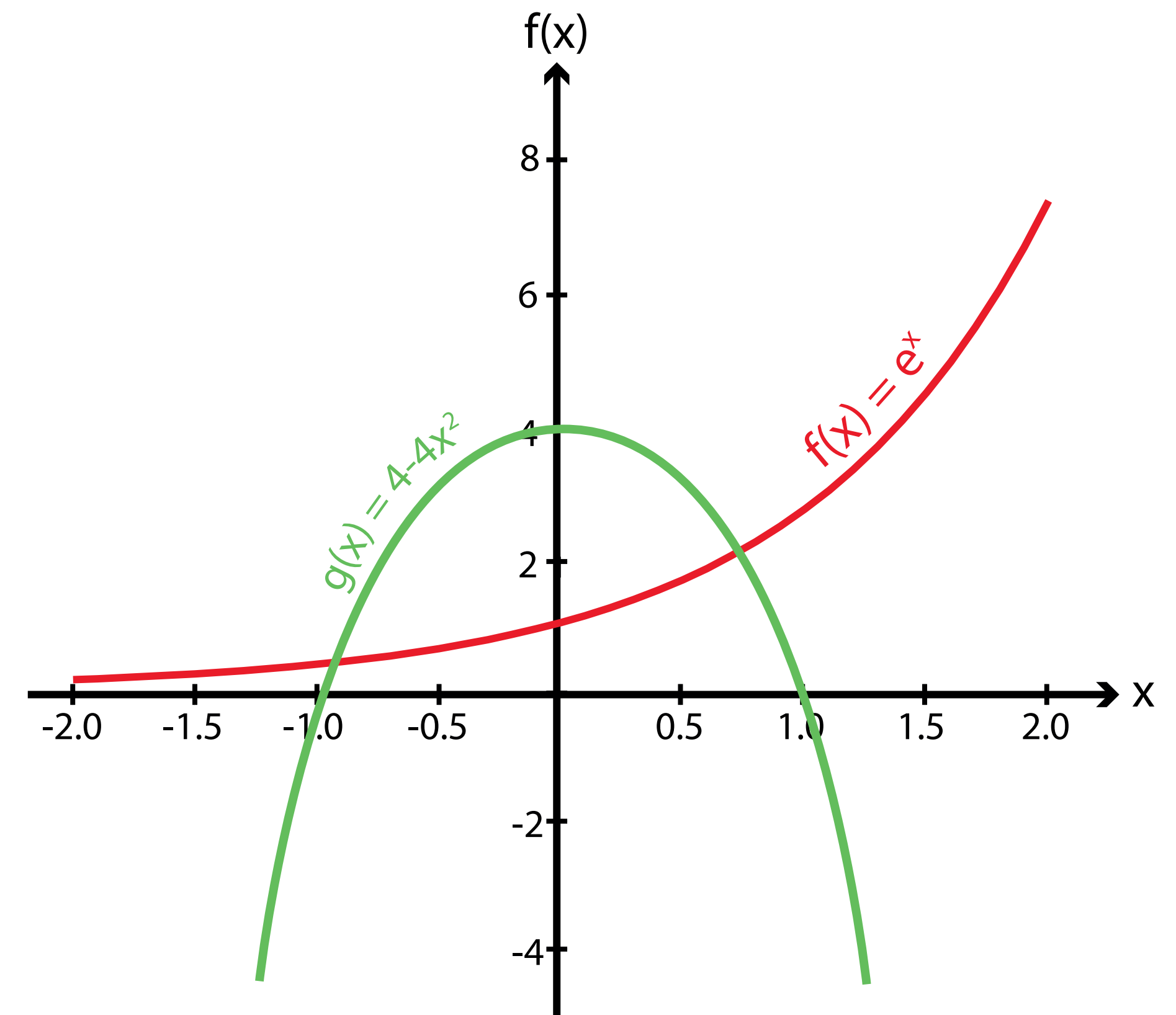
Monotonie

Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann monoton fallend in der Variable x , wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall x > x_0 \text{ gilt } f(x) \leq f(x_0)$$

Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann streng monoton fallend in der Variable x , wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall x > x_0 \text{ gilt } f(x) < f(x_0)$$



Monotonie

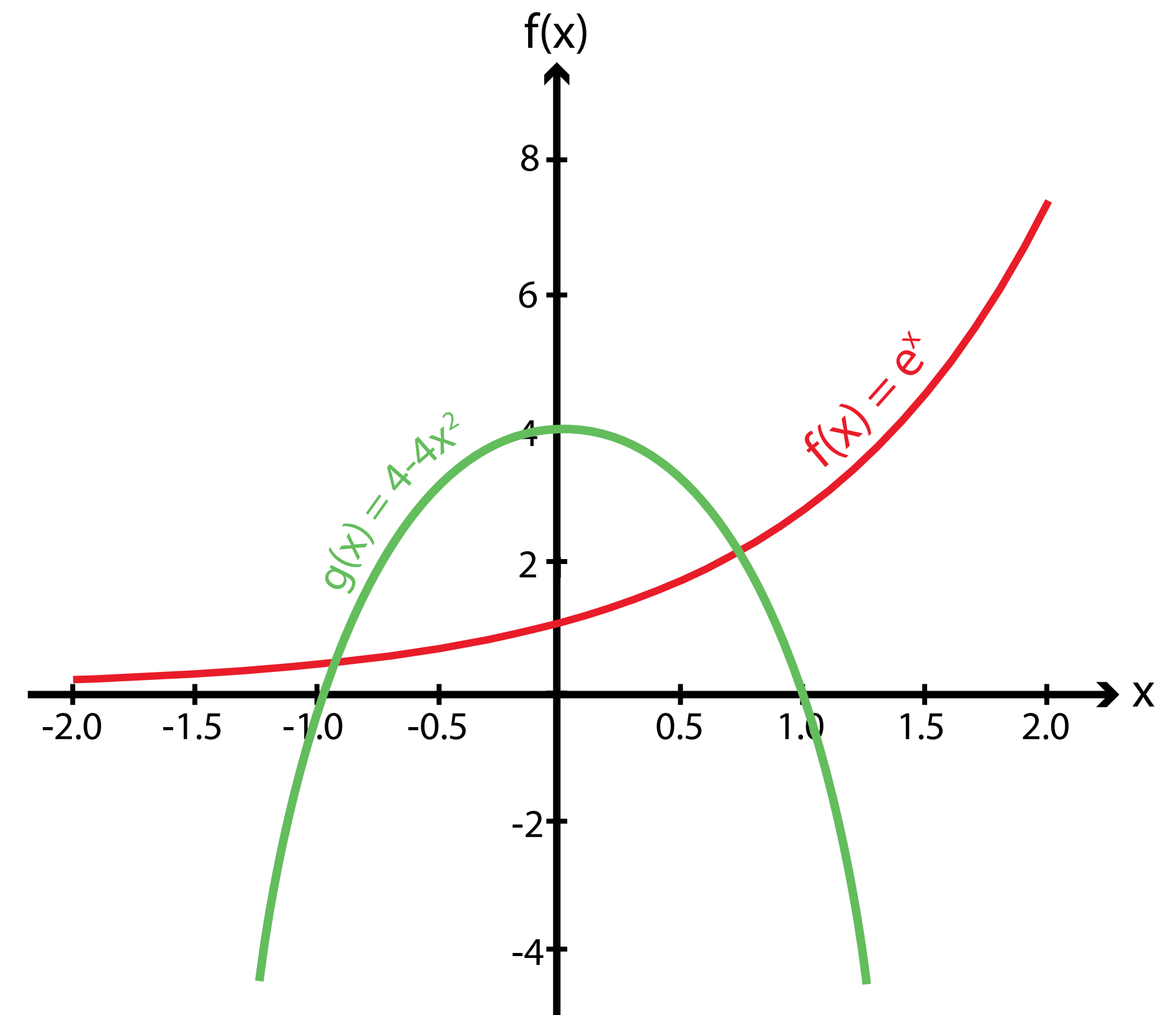
Die rote Funktion ist streng monoton steigend.

Die grüne Funktion erfüllt keines der Kriterien für Monotonie auf dem ganzen Definitionsbereich \mathbb{R} .

Die grüne Funktion ist streng monoton steigend in $(-\infty, 0)$.

Die grüne Funktion ist streng monoton fallend in $(0, \infty)$.

Wie können wir dies ohne Schaubild feststellen?



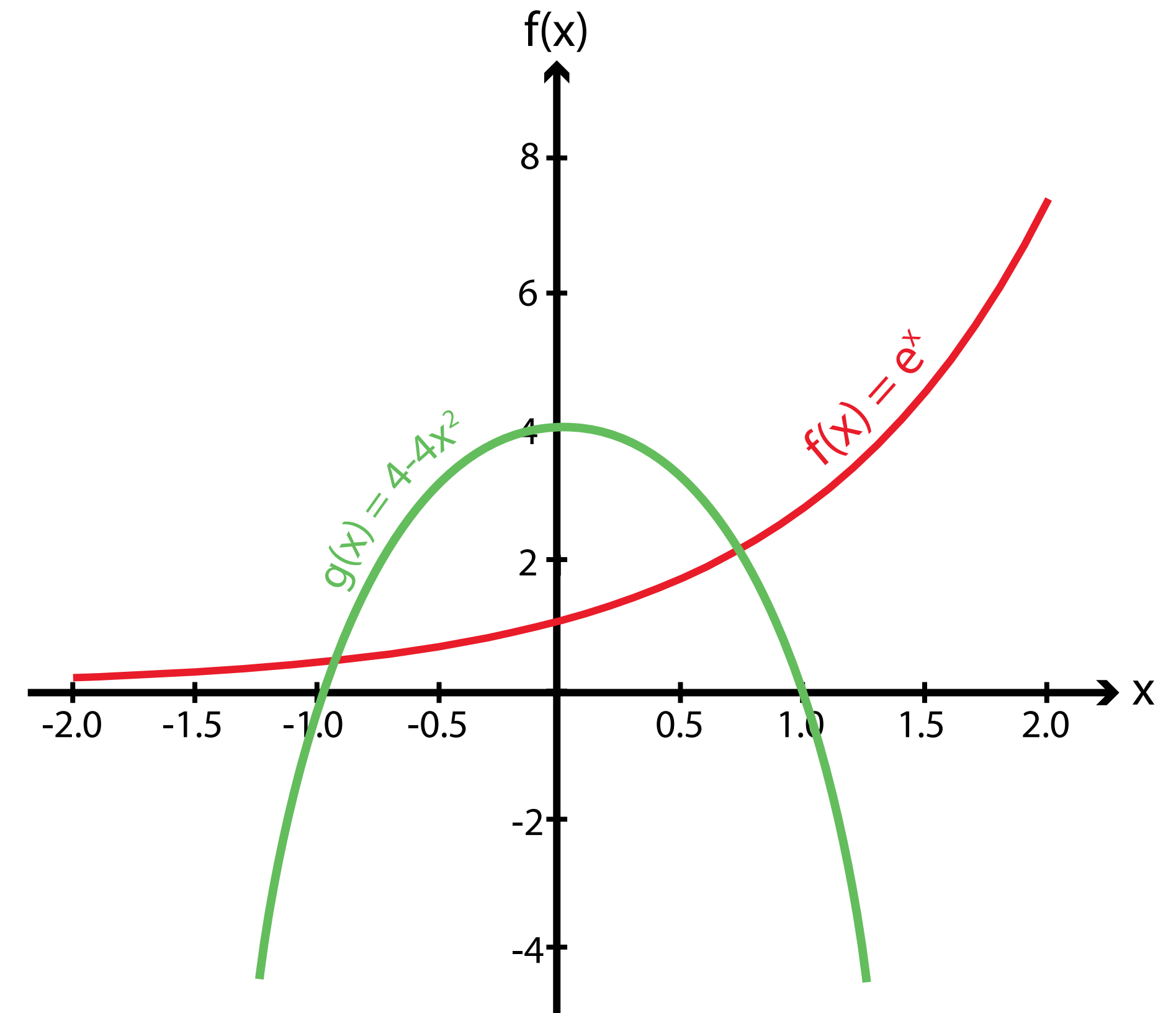
Monotonie

Eine Funktion $f(x)$ ist monoton steigend im Intervall I , wenn gilt:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

Eine Funktion $f(x)$ ist streng monoton steigend im Intervall I , wenn:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$$



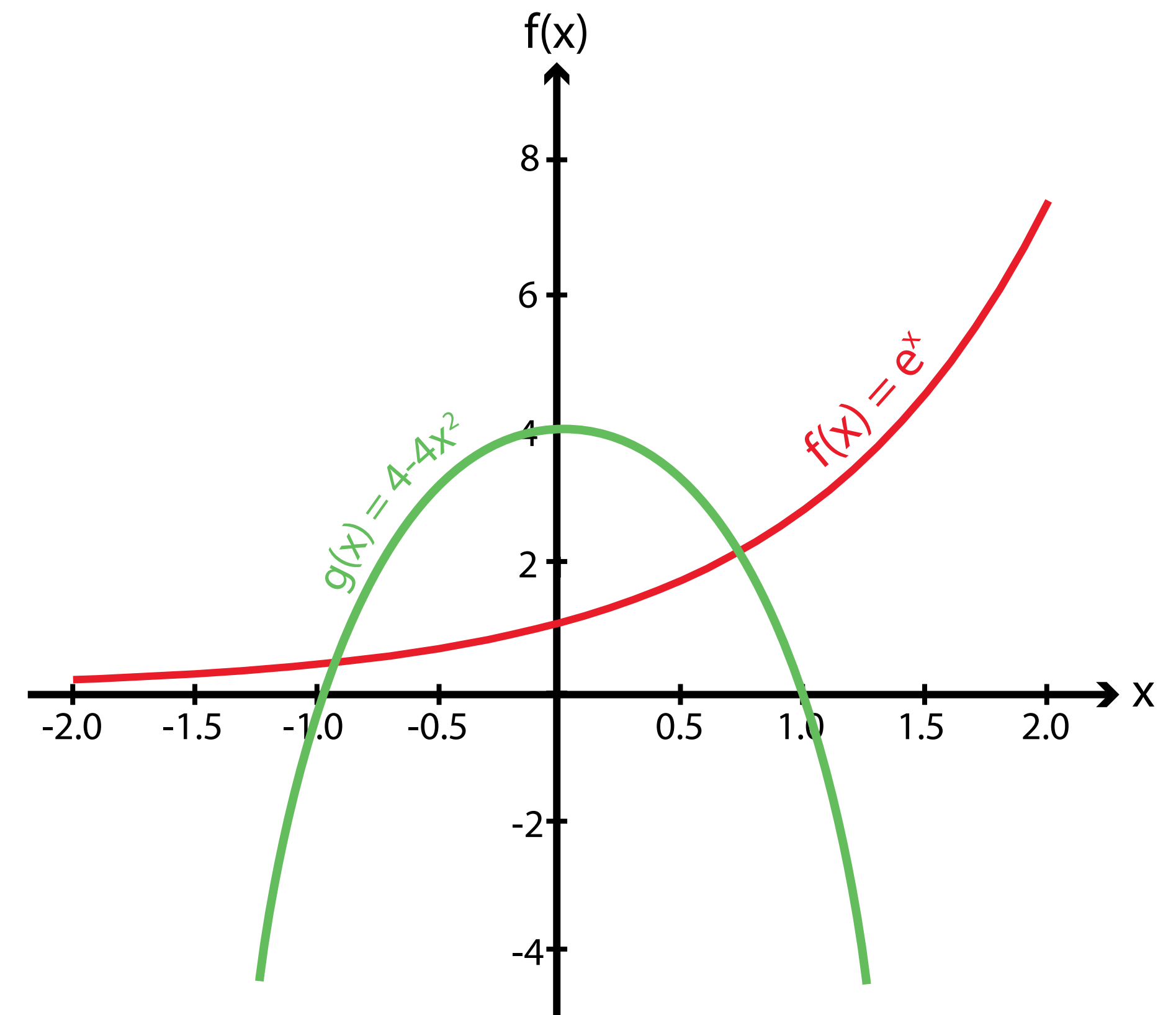
Monotonie

Eine Funktion $f(x)$ ist monoton fallend im Intervall I , wenn gilt:

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$$

Eine Funktion $f(x)$ ist streng monoton fallend im Intervall I , wenn:

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$$



Monotonie

Die rote Funktion ist streng monoton steigend in \mathbb{R} , denn:

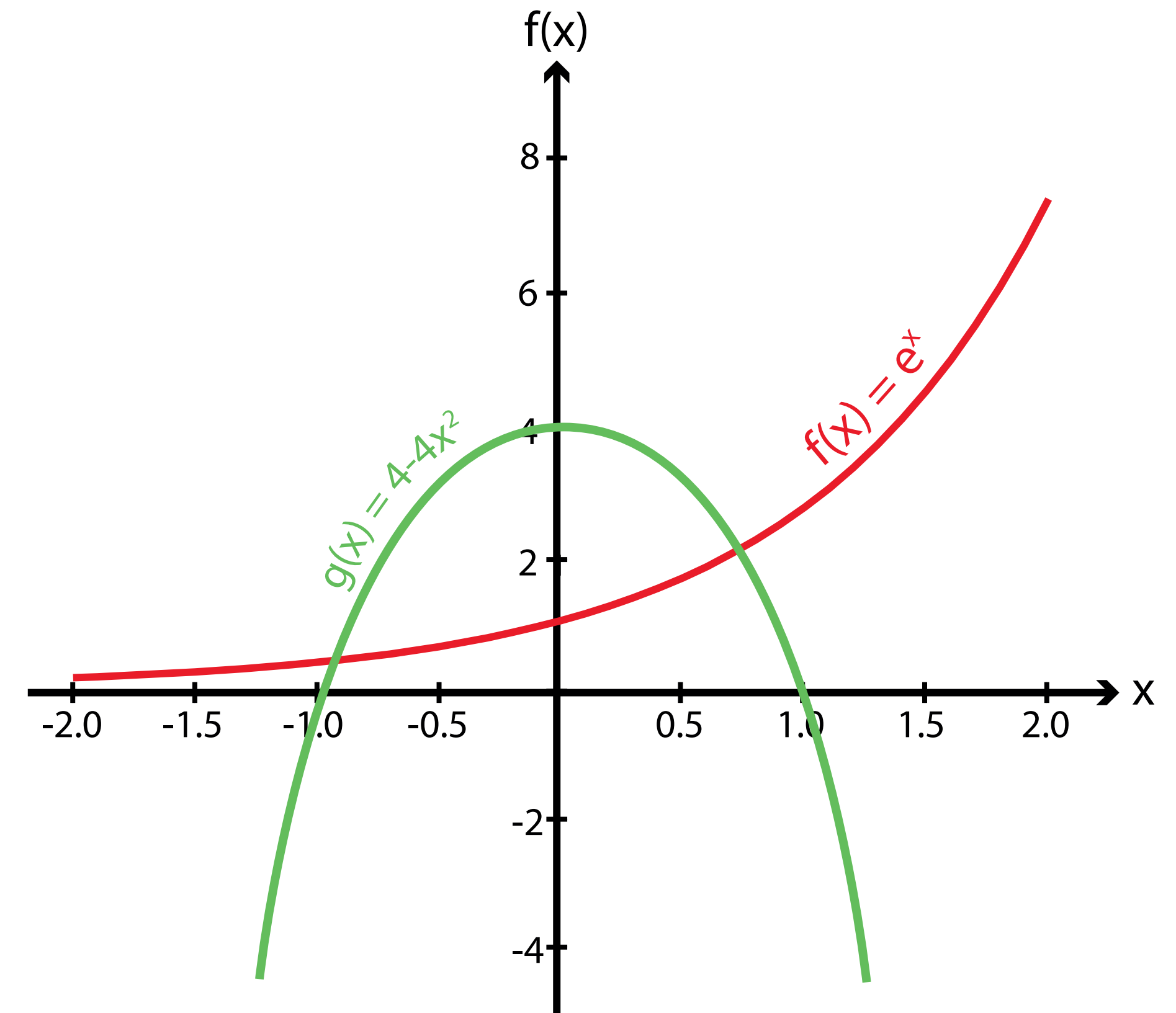
$$f'(x) = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Bei der grünen Funktion haben wir nur abschnittsweise Monotonie, denn:

$$g'(x) = -8x$$

$$g'(x) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$g'(x) \geq 0 \quad \forall x \leq 0$$

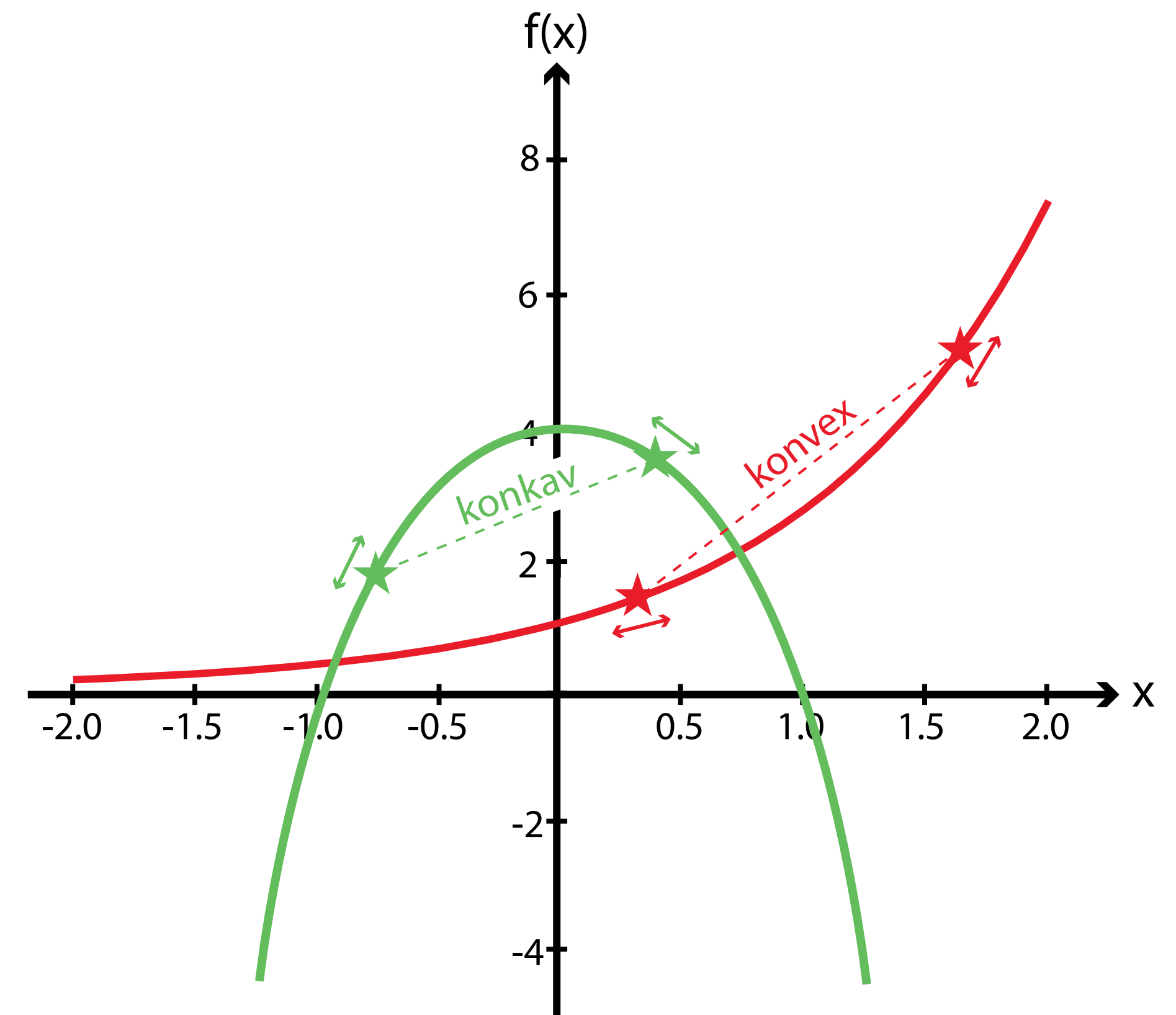


Konvexität

Seien x_1, x_2 zwei beliebige Stellen für die $f(x)$ definiert ist.

Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann konvex, wenn die Verbindung zwischen den Punkten $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ immer über dem Kurvenverlauf liegt.

Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann konkav, wenn die Verbindung zwischen den Punkten $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ immer unter dem Kurvenverlauf liegt.



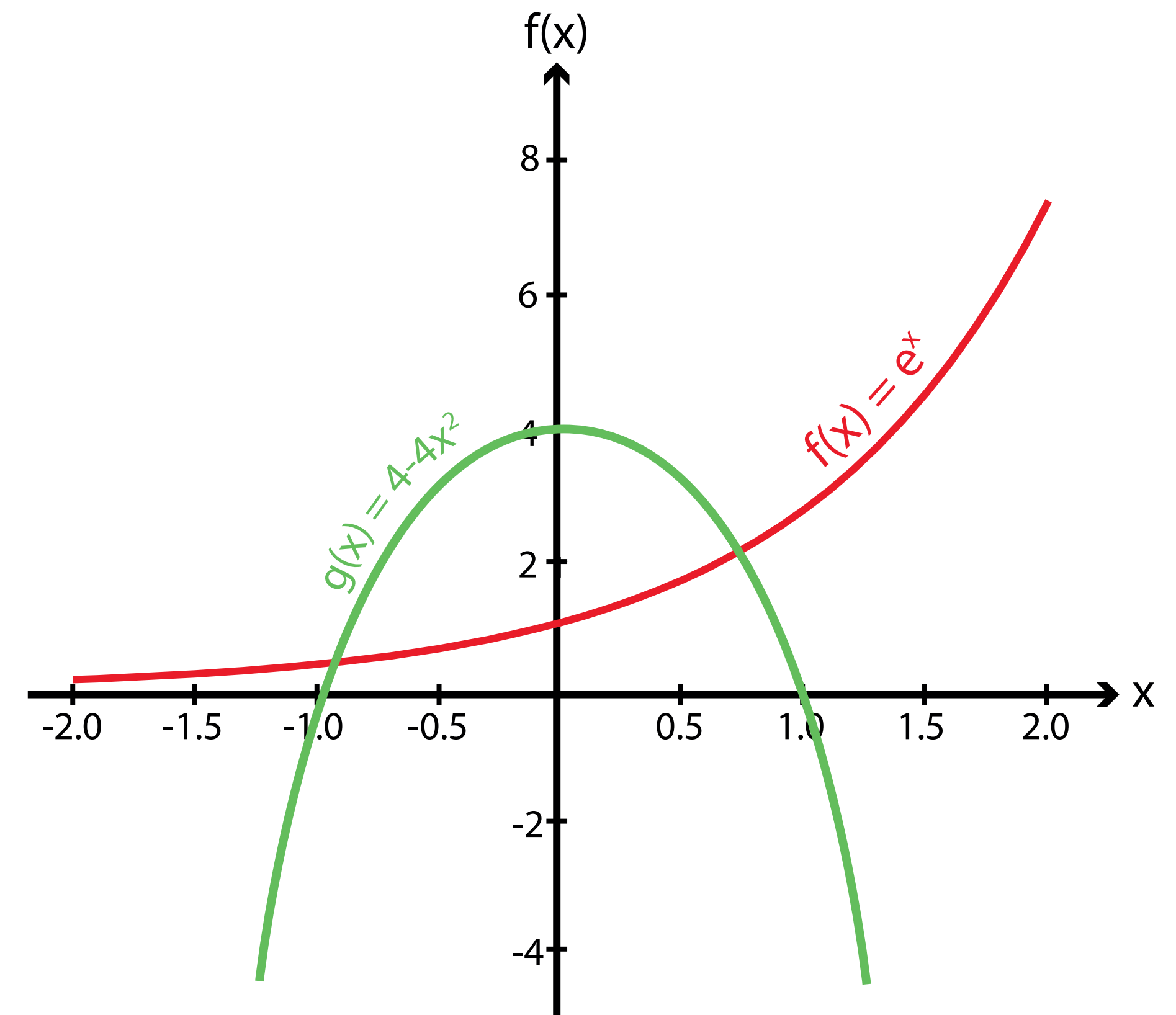
Konvexität

Eine Funktion $f(x)$ ist dann konvex in der Variable x im Intervall I , wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

Eine Funktion $f(x)$ ist dann konkav in der Variable x im Intervall I , wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$$



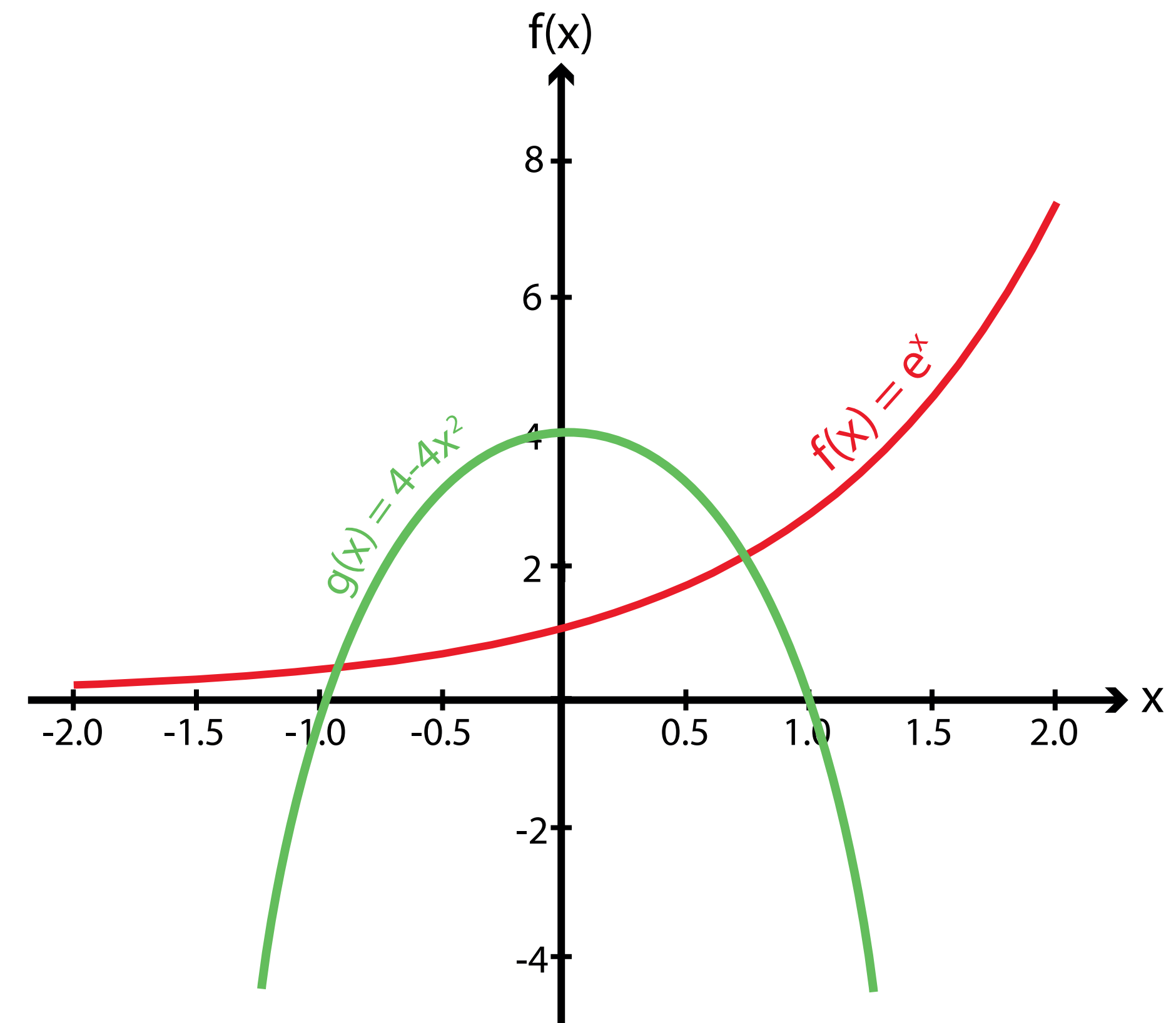
Konvexität

Die rote Funktion ist konvex in \mathbb{R} , denn:

$$f''(x) = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Die grüne Funktion ist konkav in \mathbb{R} , denn:

$$g''(x) = -8 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Monotonie & Konvexität

Untersuche die folgenden Funktionen auf Monotonie und Konvexität:

$$f(x) = 5x - 7$$

$$g(x) = x(1+x)$$

$$h(x) = e^x$$

$$k(x) = \ln(x) + \sqrt{x}$$

Monotonie & Konvexität

$$f(x) = 5x - 7$$

Funktion

$$f'(x) = 5$$

Erste Ableitung

$$f''(x) = 0$$

Zweite Ableitung

Betrachtung der Konvexität (2. Ableitung)

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f(x)$ konvex auf \mathbb{R}

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f(x)$ konkav auf \mathbb{R}

Betrachtung der Monotonie (1. Ableitung)

$$f'(x) = 5 \text{ ist echt positiv } \forall x \in \mathbb{R}$$

$f(x)$ ist streng monoton steigend auf \mathbb{R}

Konvex oder konkav? Was davon ist richtig?

Beides - lineare Funktionen sind konvex und konkav, allerdings nicht streng.

Monotonie & Konvexität

$$g(x) = x + x^2$$

Funktion

$$g'(x) = 1 + 2x$$

Erste Ableitung

$$g''(x) = 2$$

Zweite Ableitung

Betrachtung der Monotonie (1. Ableitung)

$$g'(x) = 1 + 2x \text{ ist positiv } \forall x \in [-0.5, \infty)$$

$g(x)$ ist dort streng monoton steigend

Betrachtung der Konvexität (2. Ableitung)

$$g''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$g(x)$ streng konvex auf \mathbb{R}

$$g'(x) = 1 + 2x \text{ ist negativ } \forall x \in (-\infty, -0.5)$$

$g(x)$ ist dort streng monoton fallend

Monotonie & Konvexität

$$h(x) = e^x$$

Funktion

Betrachtung der Konvexität (2. Ableitung)

$$h'(x) = e^x$$

Erste Ableitung

$$h''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$h''(x) = e^x$$

Zweite Ableitung

$h(x)$ ist streng konvex auf \mathbb{R}

Betrachtung der Monotonie (1. Ableitung)

$h'(x)$ ist positiv $\forall x \in \mathbb{R}$

$h(x)$ ist streng monoton steigend in \mathbb{R}

Monotonie & Konvexität

$$k(x) = \ln(x) + x^{0.5} \quad \text{Funktion}$$

$$k'(x) = x^{-1} + 0.5x^{-0.5} \quad \text{Erste Ableitung}$$

$$k''(x) = -x^{-2} - 0.25x^{-1.5} \quad \text{Zweite Ableitung}$$

Betrachtung der Konvexität (2. Ableitung)

$$k''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$k(x)$ ist streng konkav auf \mathbb{R}^+

Betrachtung der Monotonie (1. Ableitung)

$$k'(x) \text{ ist positiv } \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$k(x)$ ist streng monoton steigend in \mathbb{R}^+

Warum betrachten wir hier nur \mathbb{R}^+ ?

Die Funktion $k(x)$ ist nur für Zahlen größer als 0 definiert. Die Null und negative Zahlen sind also außen vor.

Analysis II

In der Analysis untersuchen wir Funktionen auf eine Vielzahl von Eigenschaften.

Im zweiten Teil der Analysis untersuchen wir auch Funktionen mit mehreren Variablen und lernen darüber hinaus die Integralrechnung kennen.



Analysis II

-
- Mehrdimensionale Funktionen
 - Totales Differenzial
 - Partielle Ableitungen
 - Extremstellen
 - Lagrange Formalismus
 - Integralrechnung
-

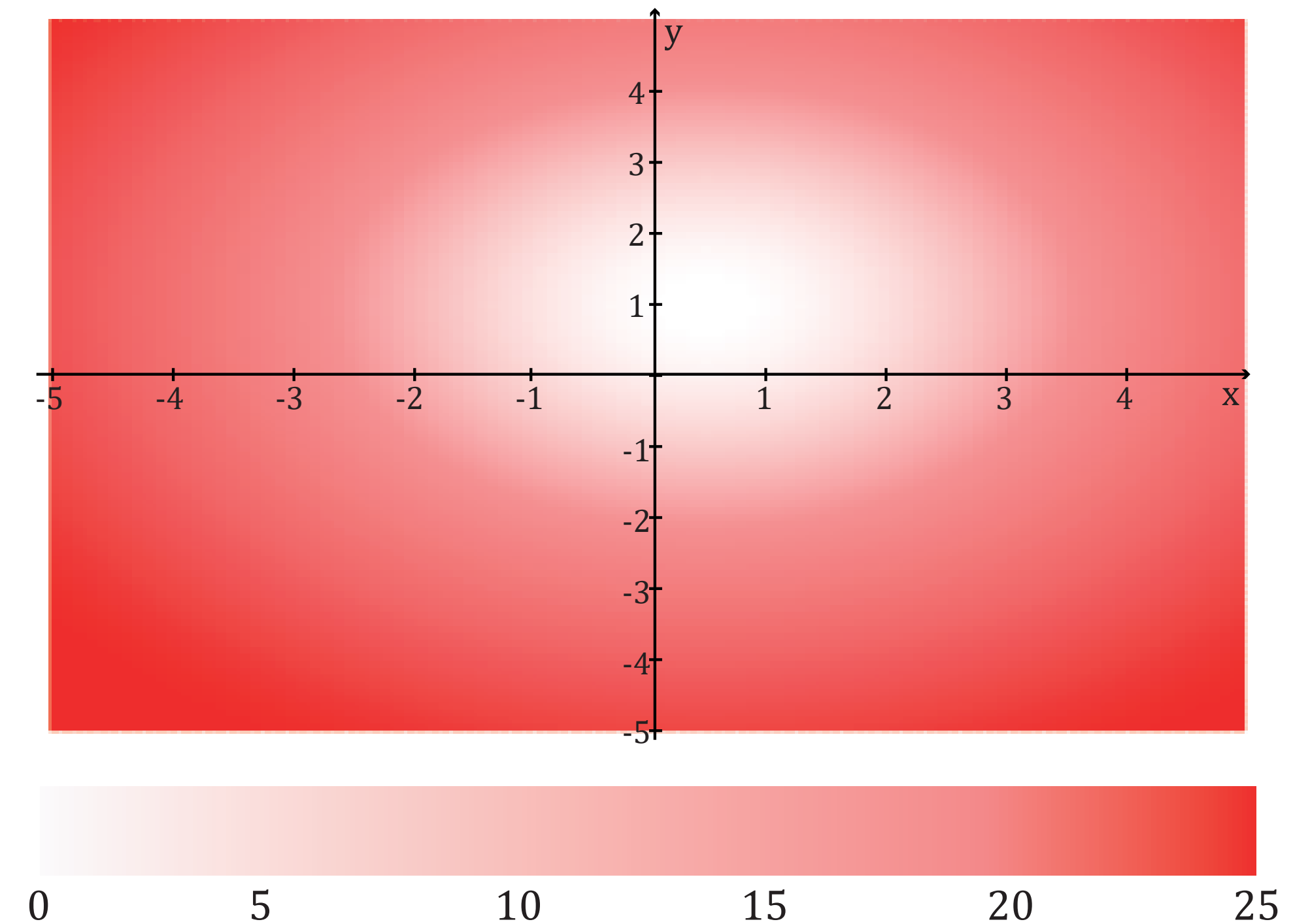
Mehrdimensionale Funktionen

Funktionen können von zwei oder mehr Variablen abhängig sein.

$$f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20$$

Bei zwei Variablen ist die grafische Darstellung als Flächendiagramm oder als Heatmap möglich.

Ab drei Variablen lässt sich die Funktion i. d. R. nicht mehr visualisieren.



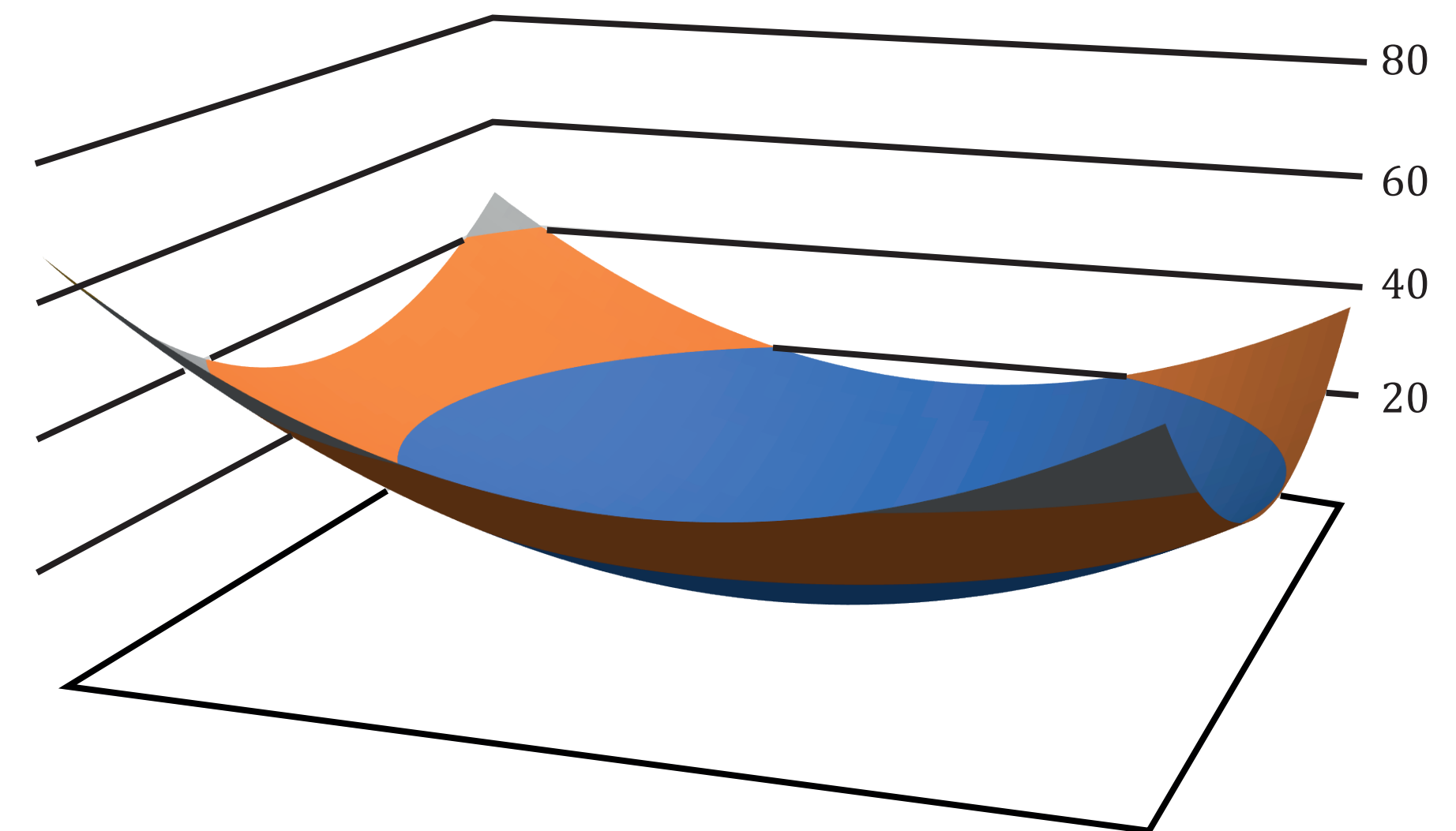
Mehrdimensionale Funktionen

Funktionen können von zwei oder mehr Variablen abhängig sein.

$$f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20$$

Bei zwei Variablen ist die grafische Darstellung als Flächendiagramm oder als Heatmap möglich.

Ab drei Variablen lässt sich die Funktion i. d. R. nicht mehr visualisieren.



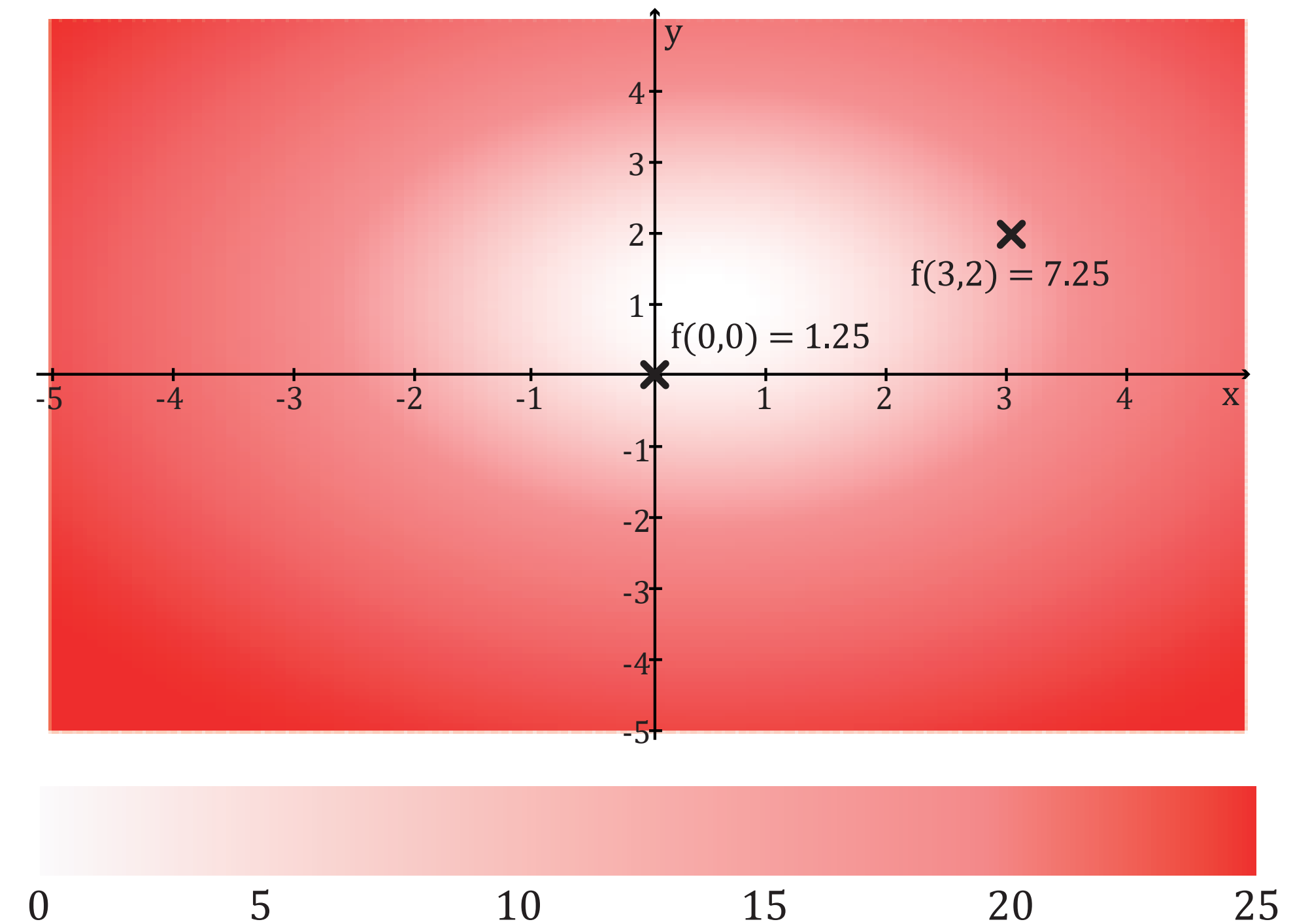
Mehrdimensionale Funktionen

Funktionswerte erhalten wir, indem wir für alle Variablen Werte einsetzen.

$$f(x,y) = x^2 - x + y^2 - 2y + 1.25$$

$$f(0,0) = 0^2 - 0 + 0^2 - 2 \cdot 0 + 1.25 = 1.25$$

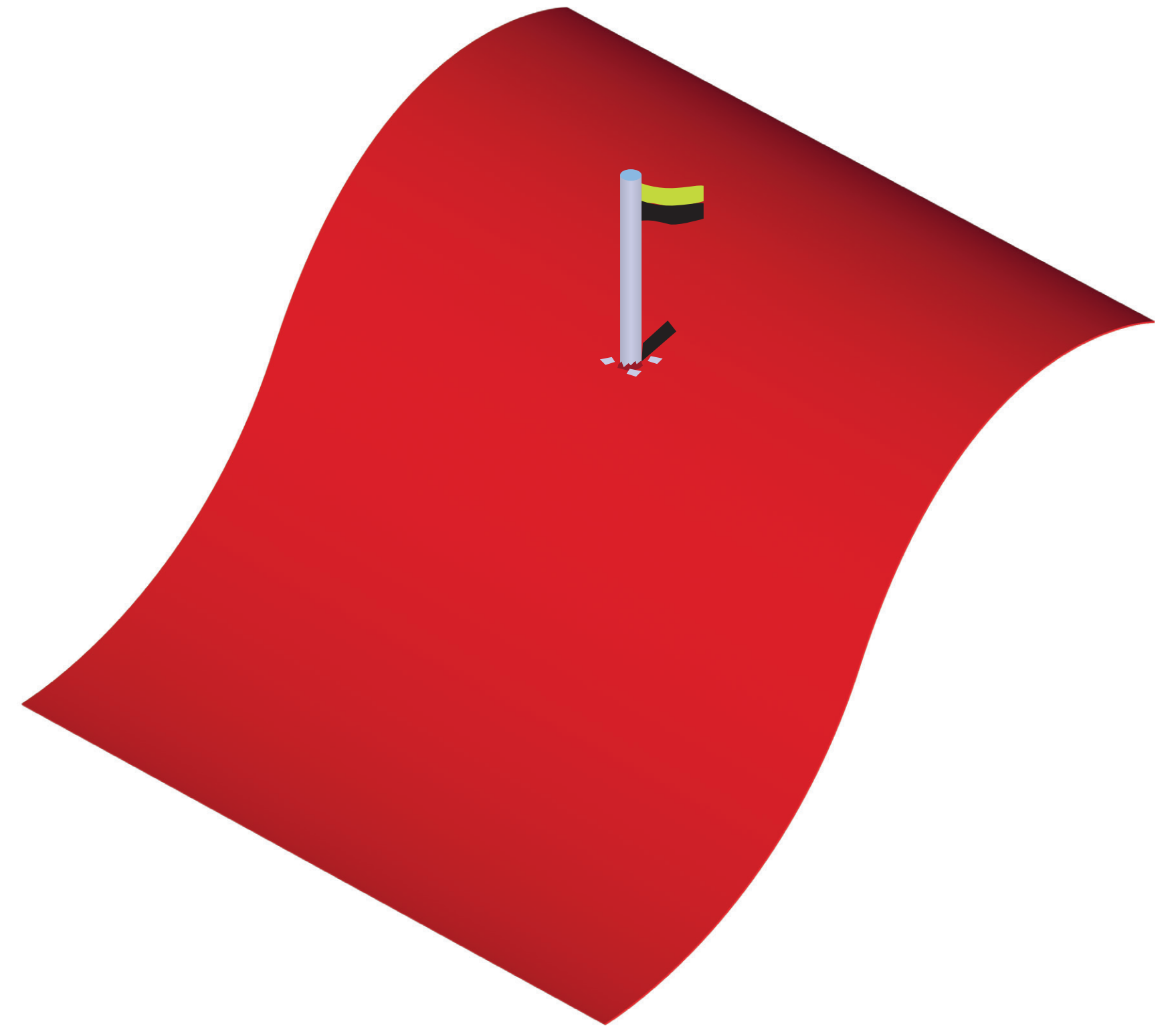
$$f(3,2) = 3^2 - 3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 1.25 = 7.25$$



Mehrdimensionale Funktionen

Die Ableitung einer mehrdimensionalen Funktion gibt ihre Steigung an. Betrachten wir dazu die rechts dargestellte Funktion.

Wie steil ist die Funktion an der Fahne?

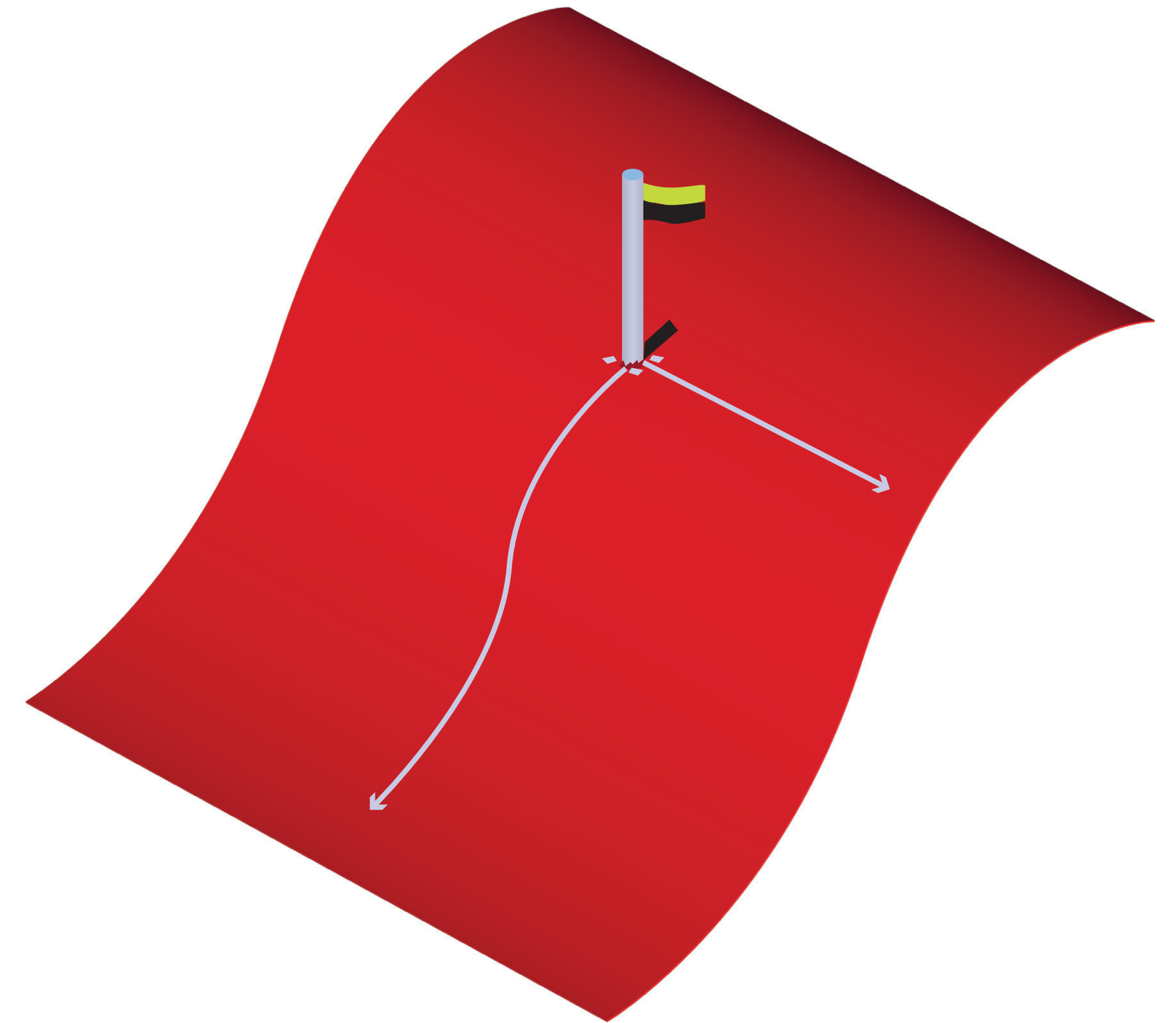


Mehrdimensionale Funktionen

Die Ableitung einer mehrdimensionalen Funktion gibt ihre Steigung an. Betrachten wir dazu die rechts dargestellte Funktion.

Wie steil ist die Funktion an der Fahne?

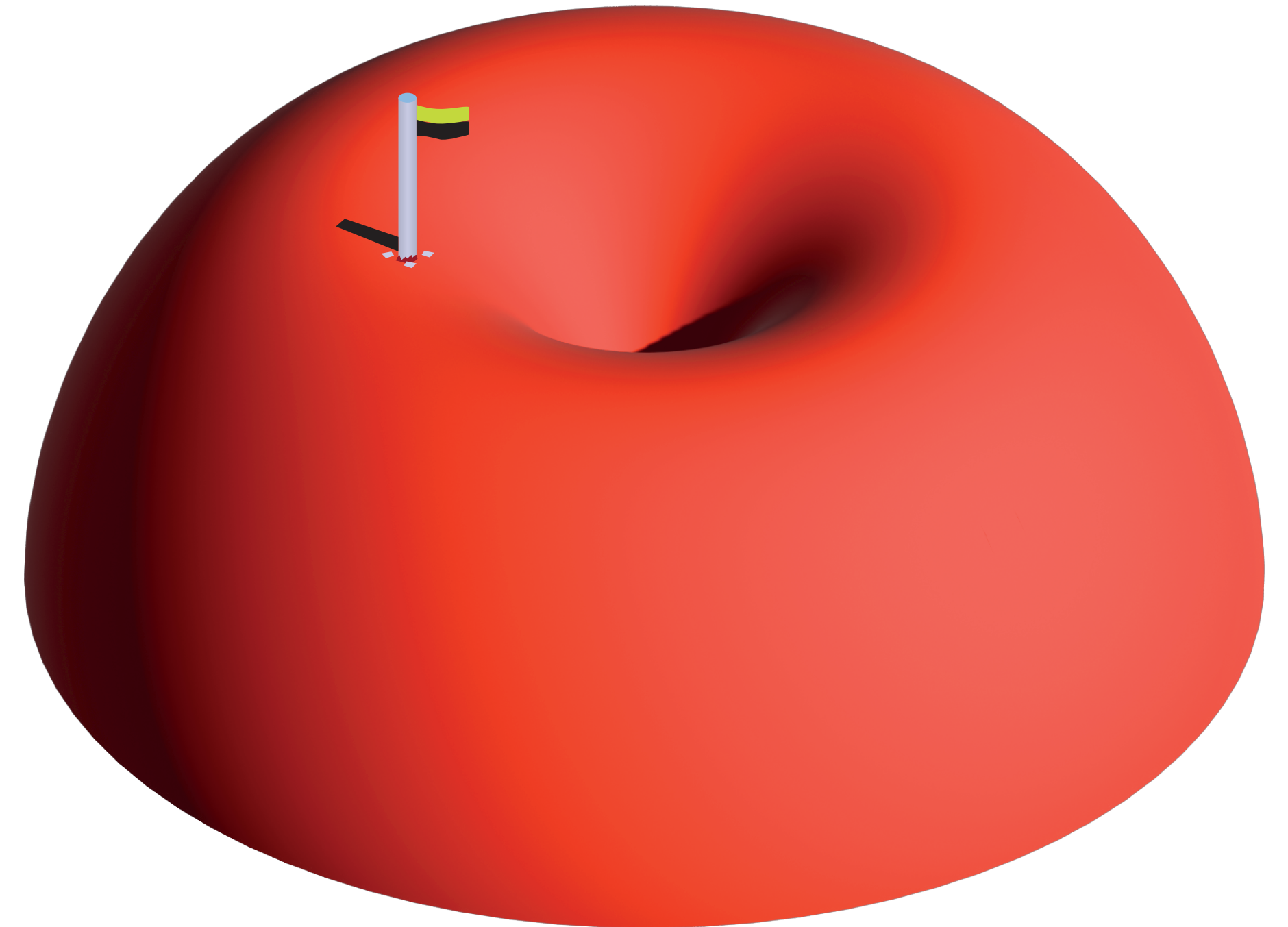
- Gehen wir nach "rechts", bleiben wir auf gleicher Höhe.
- Gehen wir nach "vorne", geht es steil nach unten.



Mehrdimensionale Funktionen

Die Ableitung einer mehrdimensionalen Funktion gibt ihre Steigung an. Betrachten wir dazu die rechts dargestellte Funktion.

Wie steil ist die Funktion an der Fahne?

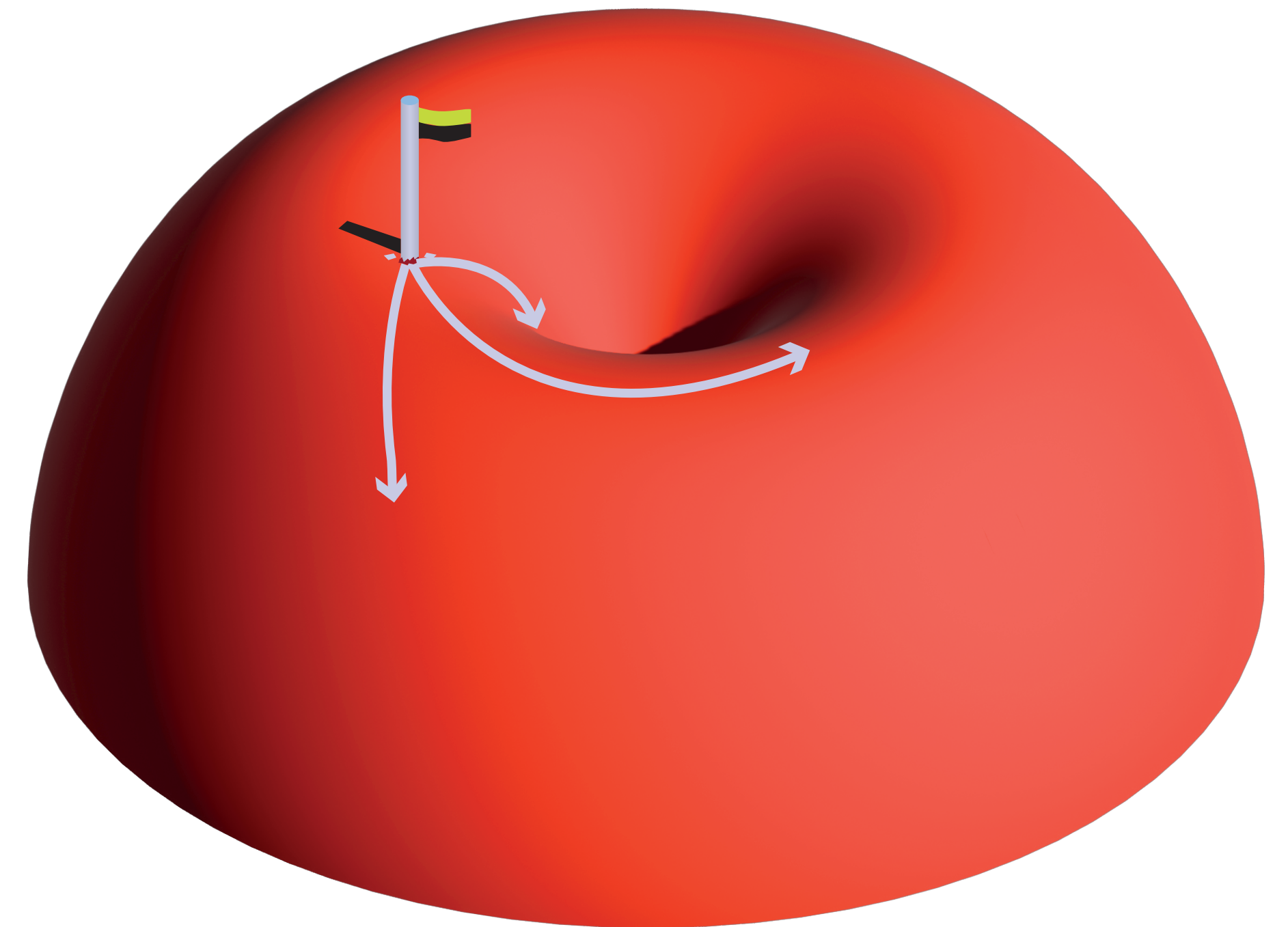


Mehrdimensionale Funktionen

Die Ableitung einer mehrdimensionalen Funktion gibt ihre Steigung an. Betrachten wir dazu die rechts dargestellte Funktion.

Wie steil ist die Funktion an der Fahne?

- Gehen wir nach "rechts", geht es steil nach unten in das Loch.
- Gehen wir nach "vorne", ist es erst flach und wird dann steiler.
- Gehen wir im Kreis um den Krater, ist es komplett flach.

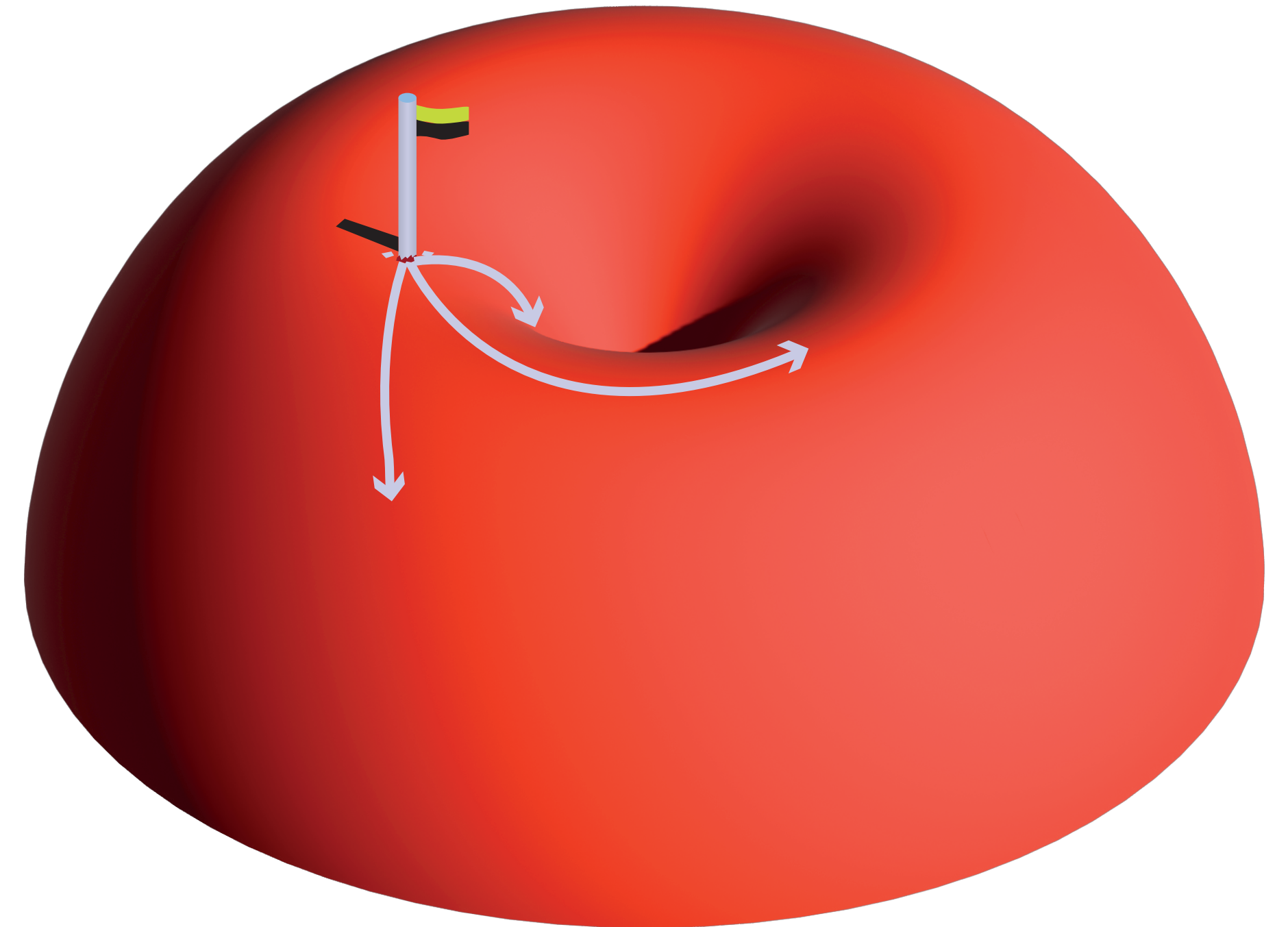


Partielle Ableitungen

Je nachdem wie weit wir in Richtung x oder y gehen, erhalten wir einen anderen Wert für die Steigung.

Sei dx die Änderung in Richtung x und dy die Änderung in Richtung y. Dann ist das totale Differenzial df definiert als:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$



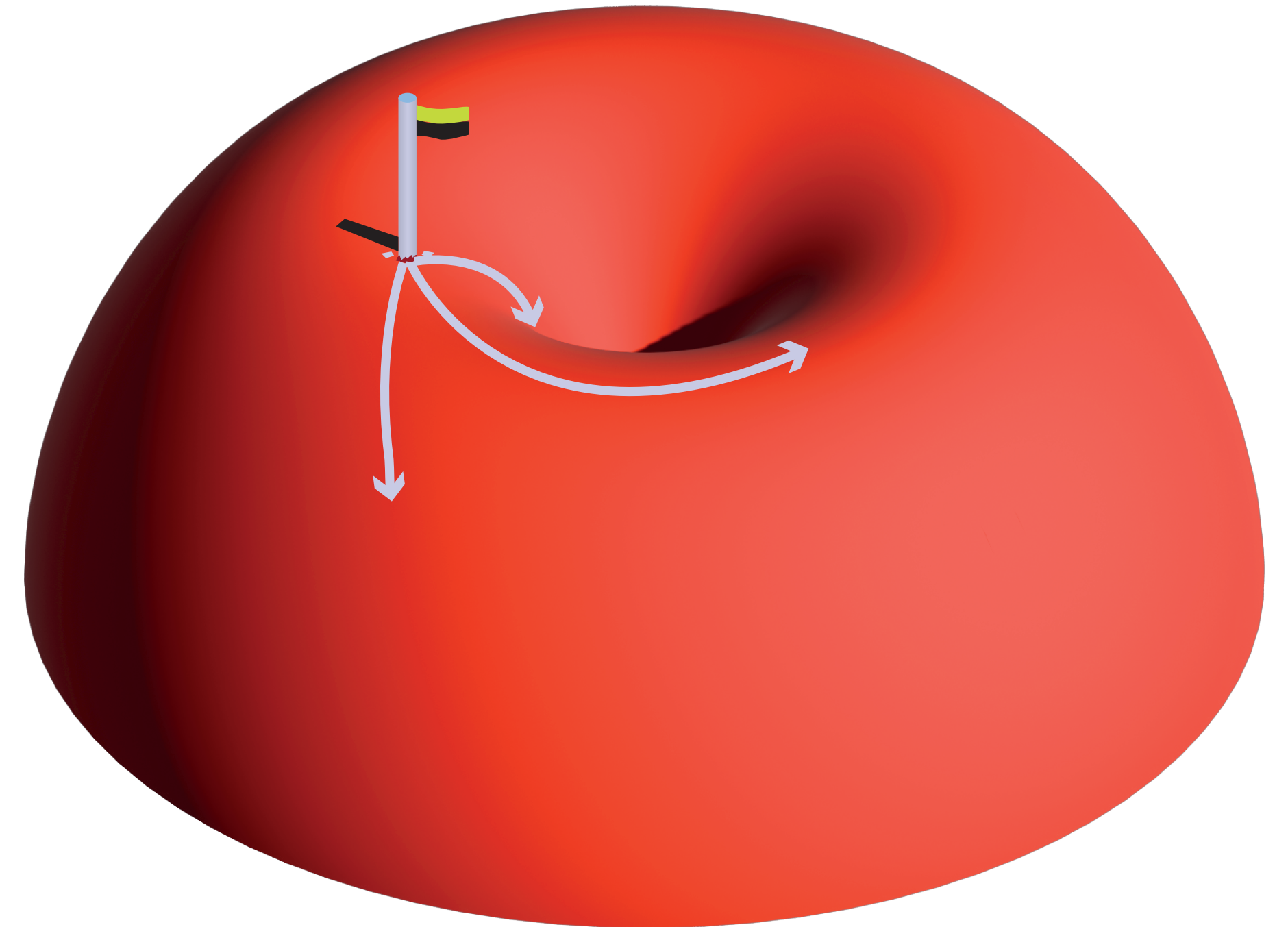
Partielle Ableitungen

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Die blau markierten Ausdrücke sind die partiellen Ableitungen der Funktion nach den Variablen x und y .

Die Rechenregeln sind dieselben wie bisher: Potenzregel, Summenregel, Produktregel usw. gelten auch partiell.

Wichtig Leiten wir partiell nach einer Variable ab, gelten alle anderen Variablen als Konstanten!



Partielle Ableitungen

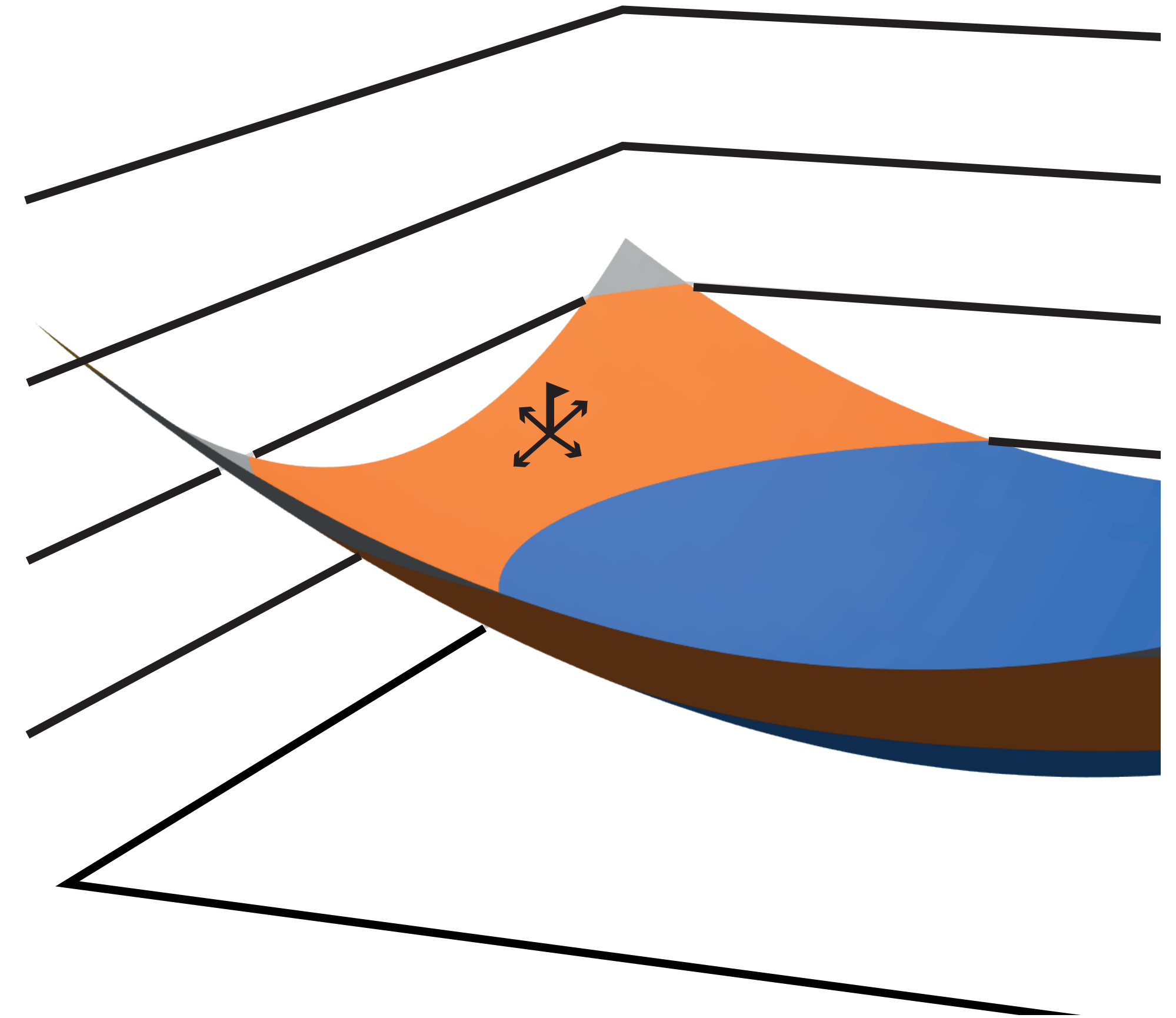
Bei der Beispielfunktion...

$$f(x,y) = x^2 - x + y^2 - 2y + 1.25$$

...haben wir folgende partielle Ableitungen:

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$$



Partielle Ableitungen

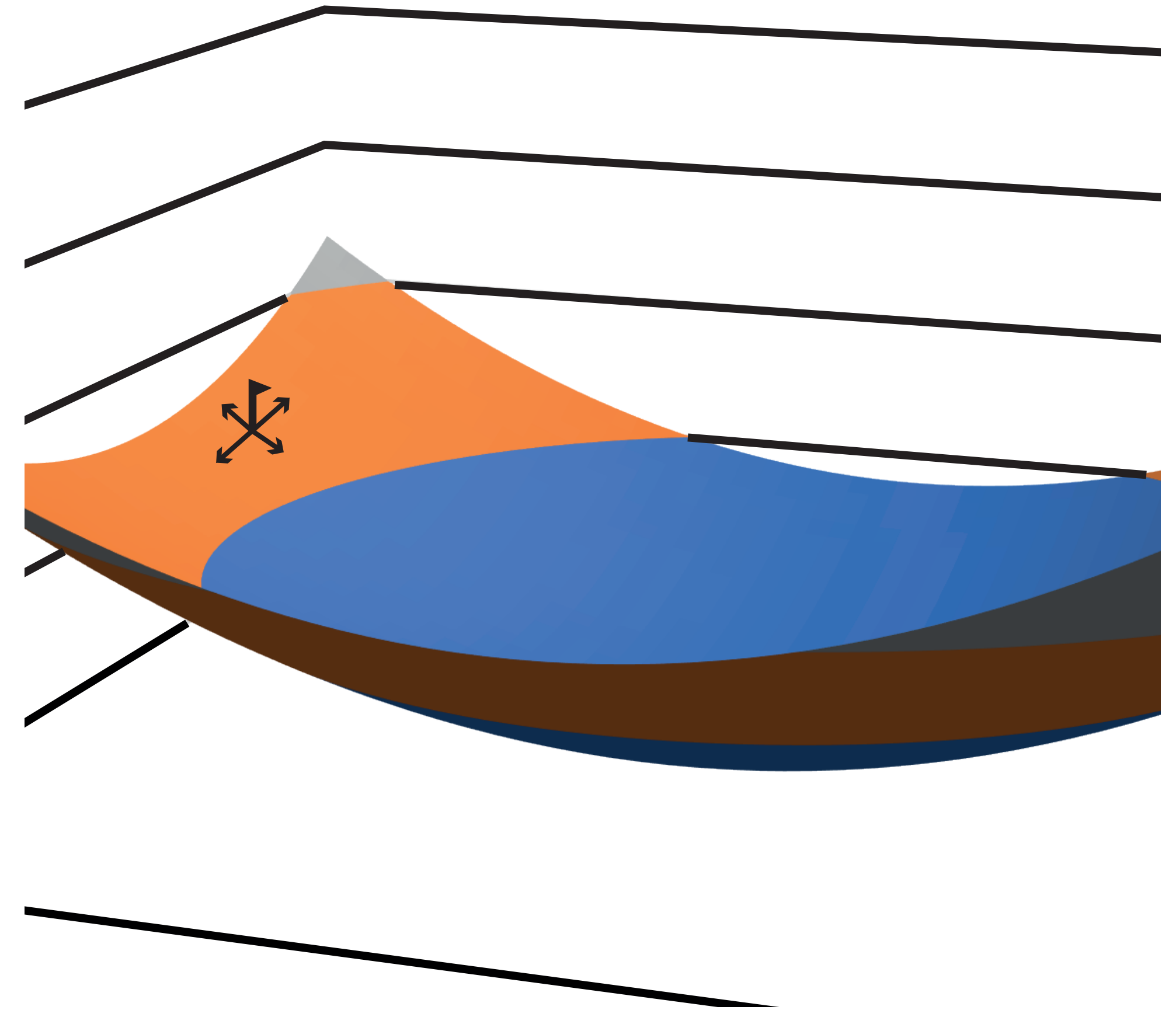
Bei eindimensionalen Funktionen $f(x)$ ist das totale Differenzial

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

und damit sind totale und partielle Ableitung identisch!

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Es ist daher egal, ob wir die Ableitung total oder partiell angeben.

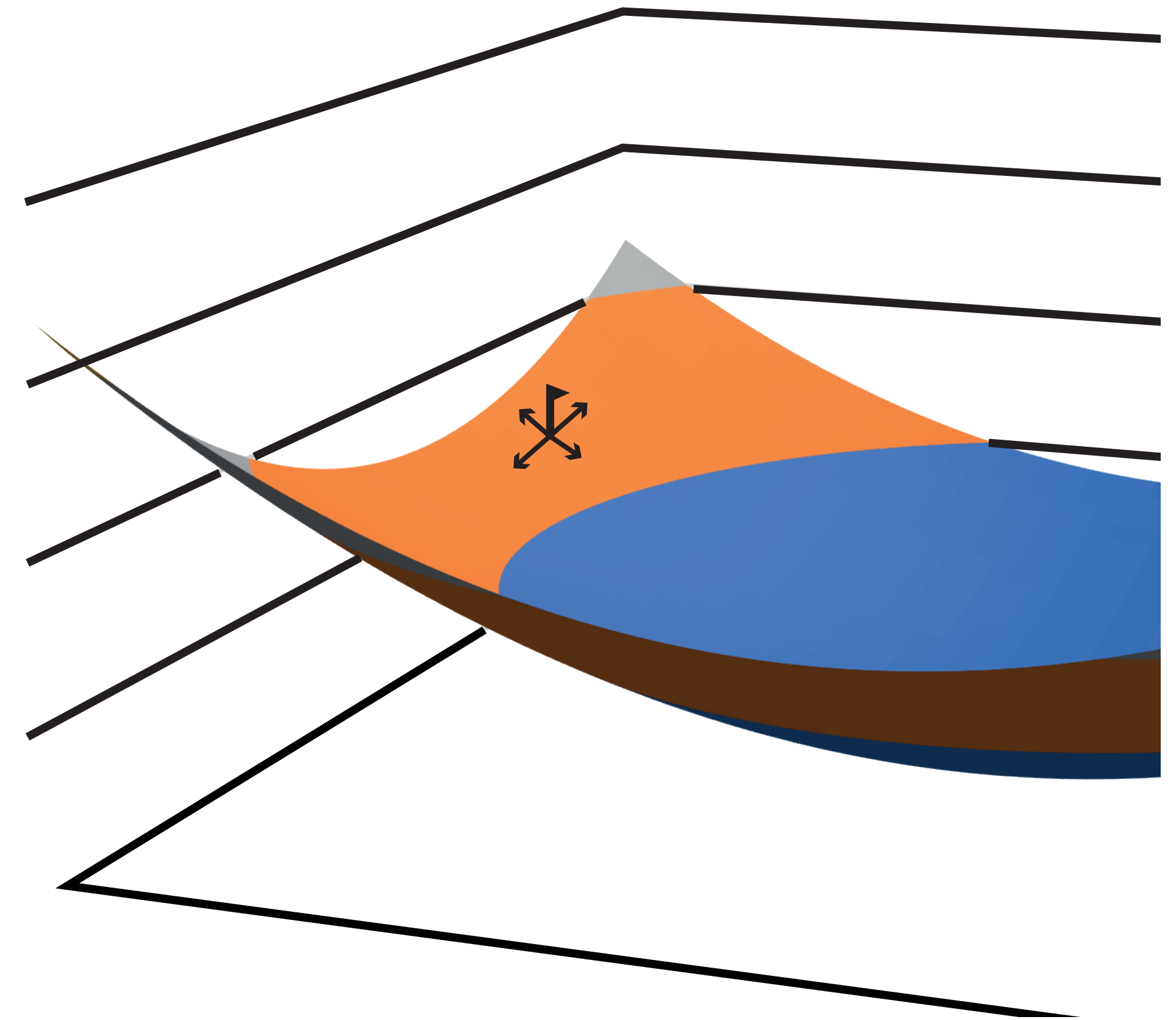


Partielle Ableitungen

Bei einer Funktion mit mehreren Variablen muss zwischen totalem und partiellem Differenzial unterschieden werden.

In der Schreibweise mit Strichen muss die Variable, nach der partiell abgeleitet wird, im Subskript angegeben werden.

$$f'_x(x,y) \quad f'_y(x,y)$$



Partielle Ableitungen

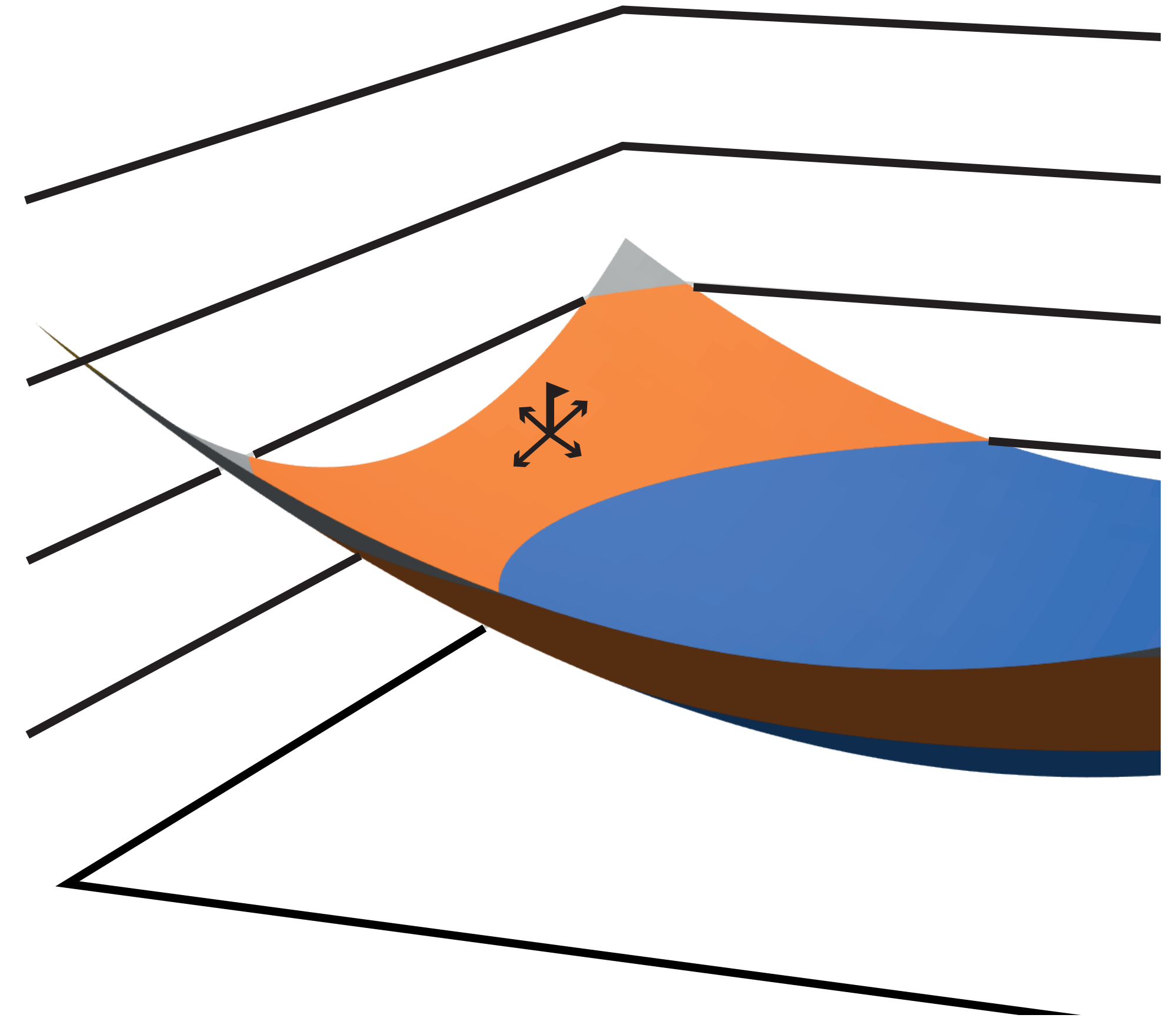
Bei einer Funktion mit mehreren Variablen muss zwischen totalem und partiellem Differenzial unterschieden werden.

In der Schreibweise mit Strichen muss die Variable, nach der partiell abgeleitet wird, im Subskript angegeben werden.

Wird kein Subskript angegeben, ist $f'(x)$ ein totales Differenzial.

$$f'(x,y) \neq f'_x(x,y)$$

$$f'(x,y) \neq f'_y(x,y)$$



Partielle Ableitungen

Bilde die partiellen Ableitungen nach x , y und z !

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx$$

$$g(x,y,z) = x^2y + \sqrt{z}y$$

$$h(x,y,z) = x^2y^3(z^4 - z^2)$$

$$k(x,y,z) = \ln(xy) + e^{2z-x}$$

Partielle Ableitungen

Funktion $f(x,y,z) = xy + yz + zx$

Partielle Ableitung nach x

Betrachte y,z als Konstanten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z$$

Partielle Ableitung nach y

Betrachte x,z als Konstanten

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + z$$

Partielle Ableitung nach z

Betrachte x,y als Konstanten

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y + x$$

Partielle Ableitungen

Funktion $g(x,y,z) = x^2y + \sqrt{z} y$

Partielle Ableitung nach x

Betrachte y,z als Konstanten

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy$$

Partielle Ableitung nach y

Betrachte x,z als Konstanten

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + \sqrt{z}$$

Partielle Ableitung nach z

Betrachte x,y als Konstanten

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{y}{2\sqrt{z}}$$

Partielle Ableitungen

Funktion $h(x,y,z) = x^2y^3(z^4-z^2)$

Partielle Ableitung nach x

Betrachte y,z als Konstanten

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2xy^3(z^4-z^2)$$

Partielle Ableitung nach y

Betrachte x,z als Konstanten

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 3x^2y^2(z^4-z^2)$$

Partielle Ableitung nach z

Betrachte x,y als Konstanten

$$\frac{\partial h}{\partial z} = x^2y^3(4z^3-2z)$$

Partielle Ableitungen

Funktion $k(x,y,z) = \ln(xy) + e^{2z-x}$

Partielle Ableitung nach x

Betrachte y,z als Konstanten

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{1}{x} - e^{2z-x}$$

Partielle Ableitung nach y

Betrachte x,z als Konstanten

$$\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{1}{y}$$

Partielle Ableitung nach z

Betrachte x,y als Konstanten

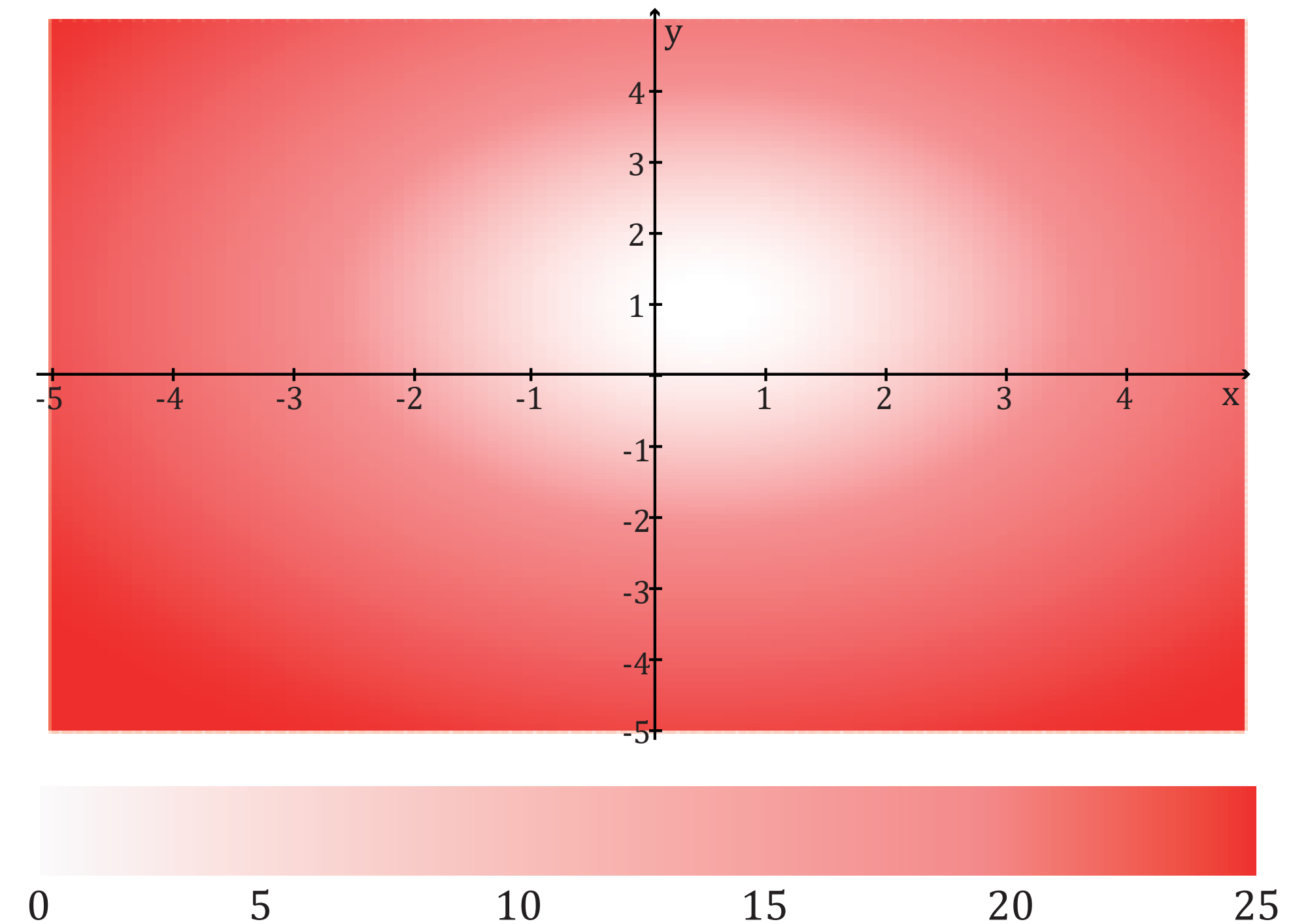
$$\frac{\partial k}{\partial z} = 2e^{2z-x}$$

Extrema bei mehreren Variablen

Ähnlich wie bei eindimensionalen Funktionen können wir mit partiellen Ableitungen die Extremstellen von mehrdimensionalen Funktionen finden.

Notwendige Bedingung An einem Extrempunkt einer Funktion müssen die partiellen Ableitungen alle 0 sein.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0$$



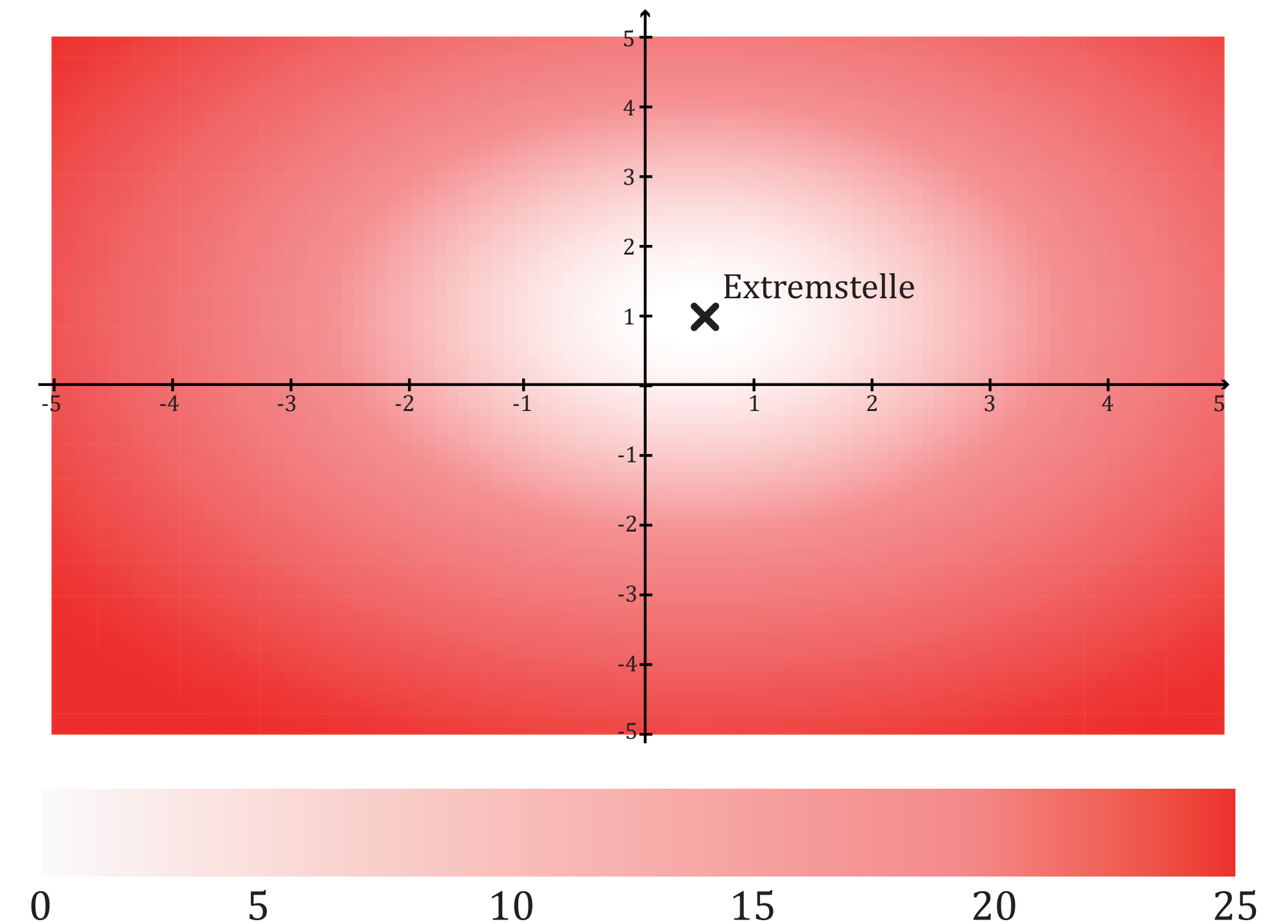
Extrema bei mehreren Variablen

Notwendige Bedingung An einem Extrempunkt einer Funktion müssen die partiellen Ableitungen alle 0 sein.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 \stackrel{!}{=} 0 \implies x = 0.5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 \stackrel{!}{=} 0 \implies y = 1$$

Vorsicht! Nicht immer ist die Rechnung so einfach. Oft müssen wir nach dem partiellen Ableiten ein daraus entstehendes Gleichungssystem lösen.



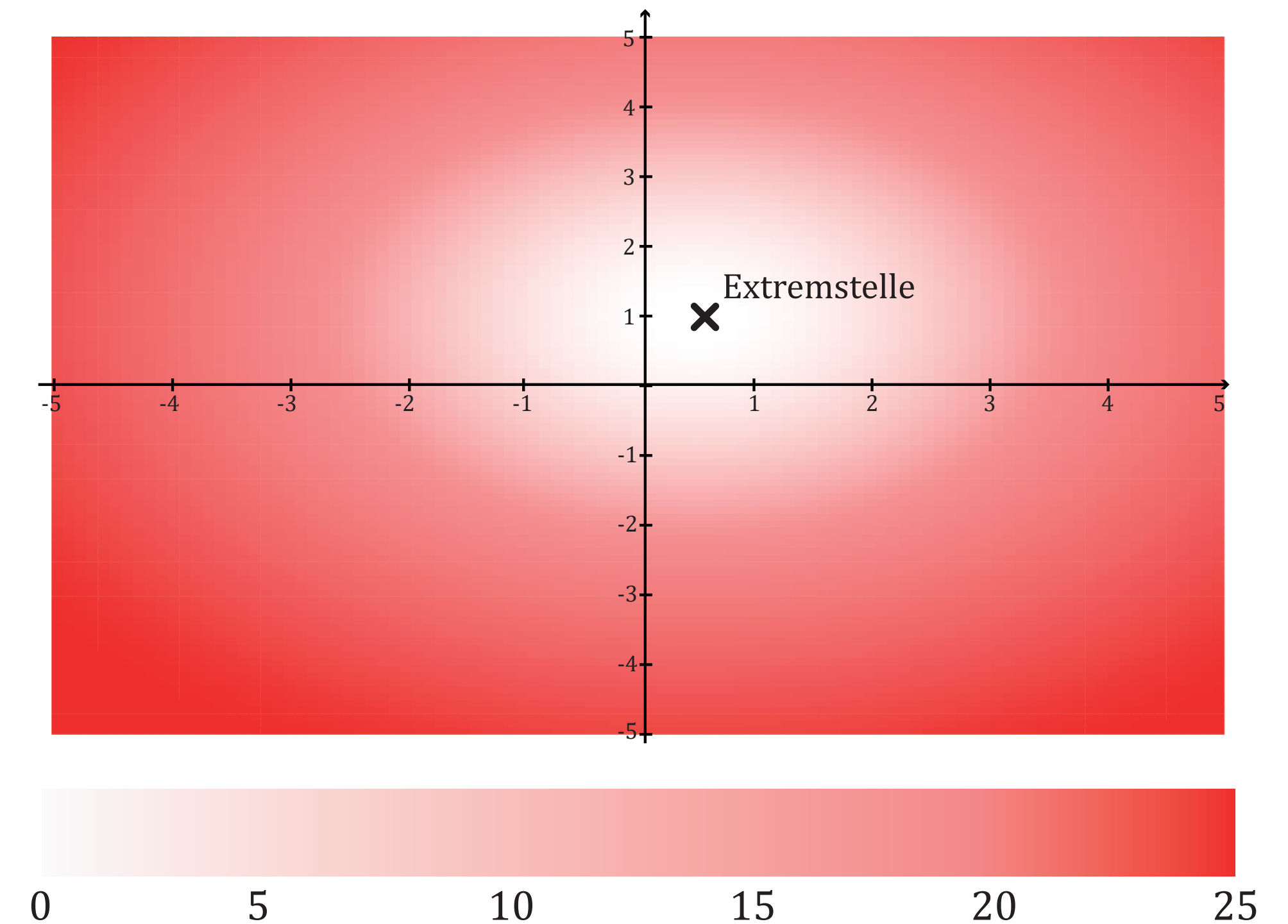
Extrema bei mehreren Variablen

Notwendige Bedingung An einem Extrempunkt einer Funktion $f(x_0, y_0)$ müssen die partiellen Ableitungen alle 0 sein.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 \stackrel{!}{=} 0 \implies x = 0.5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 \stackrel{!}{=} 0 \implies y = 1$$

Vorsicht! Die hinreichende Bedingung setzt die Berechnung der Hessematrix voraus. Mit unserem Vorwissen noch nicht möglich!

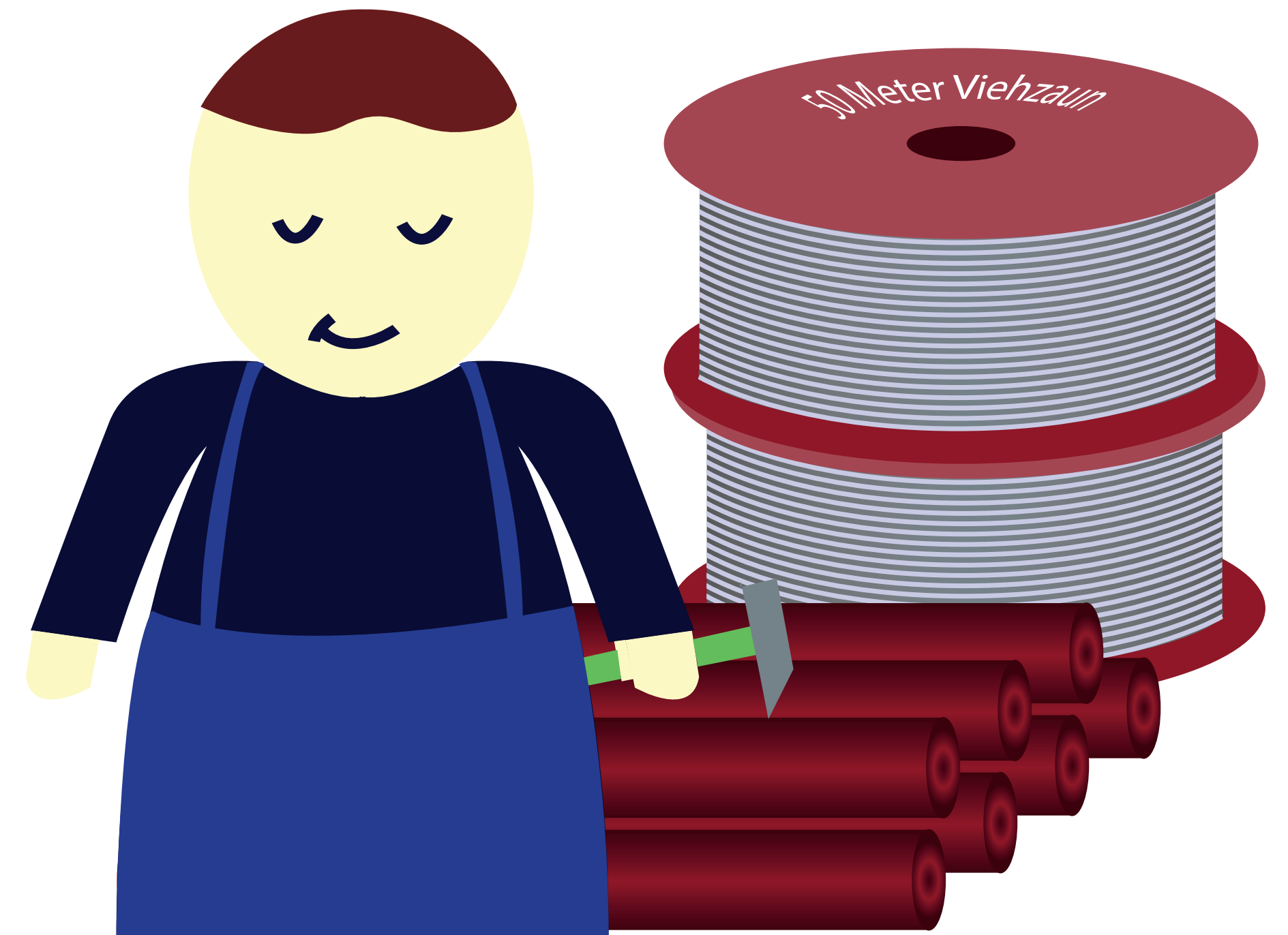


Lagrange Formalismus

Idee Wir suchen ein Minimum/Maximum einer Funktion, wobei wir nur Stellen der Funktion berücksichtigen die bestimmte Bedingungen erfüllen.

Beispiel Wir wollen mit 100 Meter Zaun eine rechteckige Fläche mit Länge l und Breite b einzäunen.

Wir wollen die Länge l und die Breite b so wählen, dass die Fläche des eingezäunten Bereichs so groß wie möglich wird.



Lagrange Formalismus

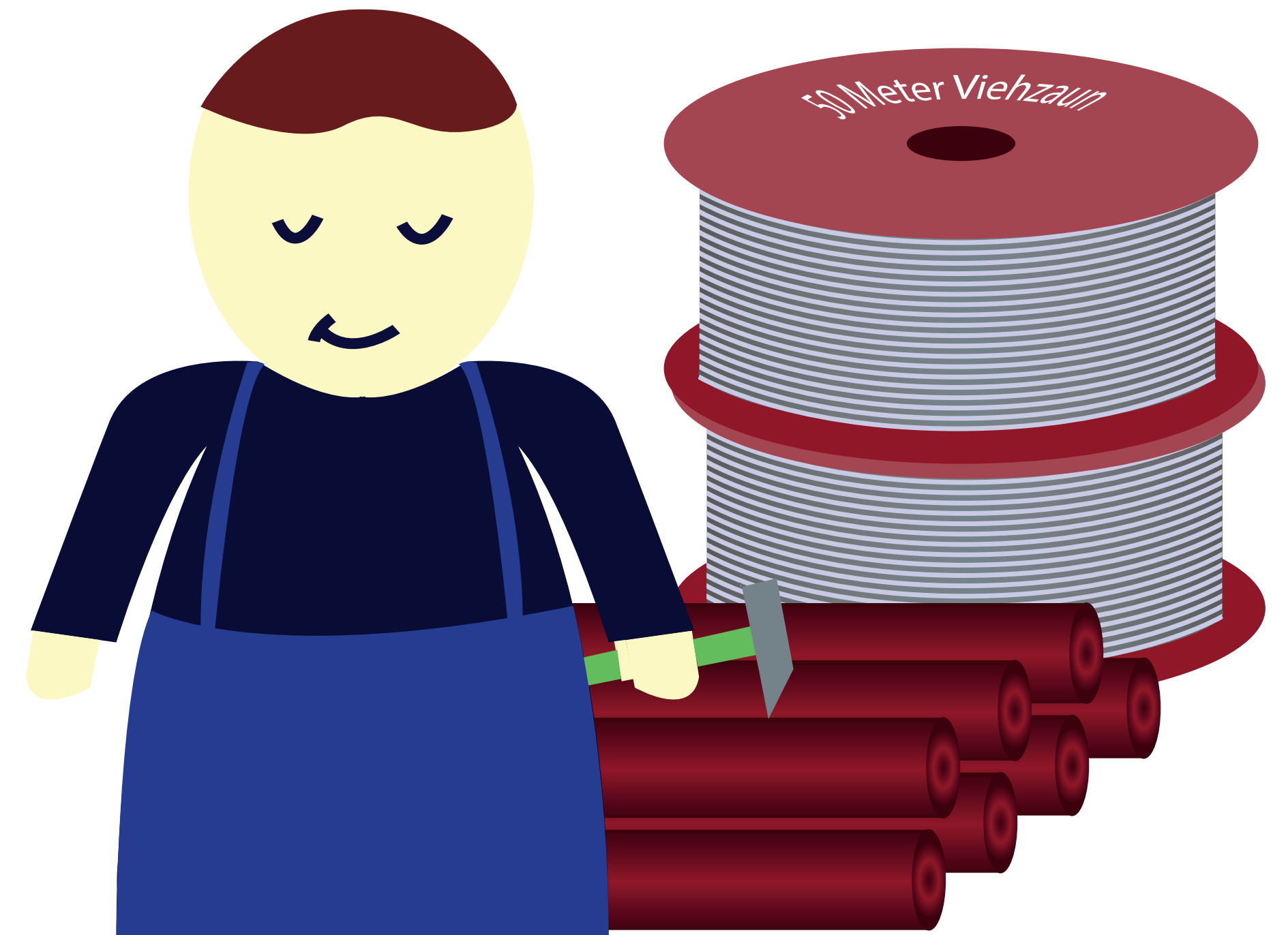
Die eingezäunte Fläche beträgt:

$$f(l,b) = l \cdot b$$

Würden wir wie bisher die partiellen Ableitungen nullsetzen, erhalten wir folgende "Lösung".

$$\frac{\partial f}{\partial l} = b \stackrel{!}{=} 0 \implies b = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = l \stackrel{!}{=} 0 \implies l = 0$$



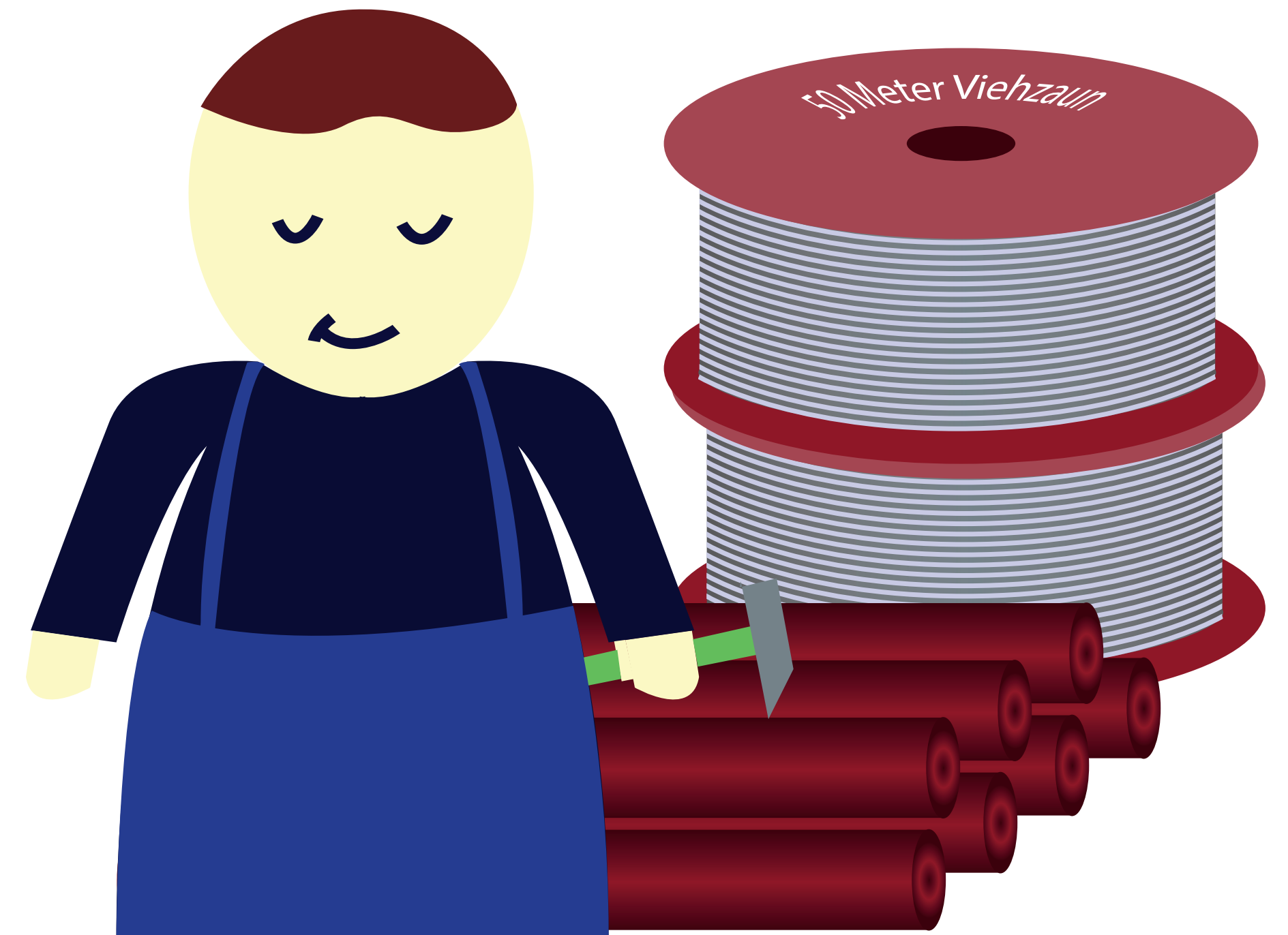
Lagrange Formalismus

Was wir mit den partiellen Ableitungen finden ist ein Minimum.
Bauen wir keinen Zaun, dann ist die Fläche minimal.

Ein Maximum können wir nicht finden, da wir Länge und Breite einfach immer noch größer wählen könnten.

Die Funktion weiß nicht, dass wir nur 100 Meter Zaun haben:

$$2l + 2b \leq 100$$



Lagrange Formalismus

Mit dem Lagrangeformalismus können wir diese sogenannte Nebenbedingung in die Formel für die Fläche einbauen.

Unabhängig von der "Story" der Aufgabe, folgt der Lagrangeformalismus immer demselben Kochrezept.

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren

Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren

Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen

Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren

Griechischer Buchstabe „Lambda“

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren

Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen

Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen

Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

Lagrange Formalismus

Schritt 1 - Zielfunktion identifizieren

$$\max f(l,b) = l \cdot b$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren

Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren

Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen

Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren

Griechischer Buchstabe „Lambda“

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren

Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen

Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen

Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

Lagrange Formalismus

Schritt 2 - Nebenbedingung identifizieren

$$\max f(l,b) = l \cdot b$$

$$\text{s.t. } 2l + 2b \leq 100$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren

Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren

Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen

Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren

Griechischer Buchstabe „Lambda“

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren

Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen

Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen

Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen



Die Abkürzung s.t. steht für "subjected to" und lässt sich als "unter der Bedingung" übersetzen.

Lagrange Formalismus

Schritt 3 - Nebenbedingung nach 0 auflösen

$$\max f(l,b) = l \cdot b$$

$$\text{s.t. } 2l + 2b \leq 100$$

$$2l + 2b \leq 100$$

$$\Leftrightarrow 2l + 2b - 100 \leq 0$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren

Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren

Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen

Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren

Griechischer Buchstabe „Lambda“

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren

Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen

Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen

Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

Lagrange Formalismus

Schritt 4 - Nebenbedingung mit λ multiplizieren

$$\max f(l,b) = l \cdot b$$

$$\text{s.t. } 2l + 2b \leq 100$$

$$2l + 2b \leq 100$$

$$\Leftrightarrow 2l + 2b - 100 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda[2l + 2b - 100] \leq 0$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren

Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren

Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen

Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren

Griechischer Buchstabe „Lambda“

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren

Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen

Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen

Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

Lagrange Formalismus

Schritt 5 - Entstehenden Term zur Zielfunktion addieren

$$\max f(l,b) = l \cdot b$$

$$\text{s.t. } 2l + 2b \leq 100$$

$$2l + 2b \leq 100$$

$$\Leftrightarrow 2l + 2b - 100 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda[2l + 2b - 100] \leq 0$$

+

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren

Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren

Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen

Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren

Griechischer Buchstabe „Lambda“

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren

Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen

Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen

Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

Lagrange Formalismus

Schritt 5 - Dadurch erhalten wir die Lagrangefunktion!

$$\max L(l, b, \lambda) = l \cdot b + \lambda[2l + 2b - 100]$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren

Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren

Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen

Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren

Griechischer Buchstabe „Lambda“

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren

Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen

Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen

Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

Lagrange Formalismus

Schritt 6 - Partielle Ableitungen berechnen

$$\max L(l, b, \lambda) = l \cdot b + \lambda[2l + 2b - 100]$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = b + 2\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = l + 2\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2l + 2b - 100$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren

Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren

Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen

Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren

Griechischer Buchstabe „Lambda“

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren

Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen

Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen

Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

Lagrange Formalismus

Schritt 7 - Partielle Ableitungen nullsetzen

$$\max L(l, b, \lambda) = l \cdot b + \lambda[2l + 2b - 100]$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = b + 2\lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = l + 2\lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2l + 2b - 100 \stackrel{!}{=} 0$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren

Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren

Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen

Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren

Griechischer Buchstabe „Lambda“

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren

Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen

Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen

Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

Lagrange Formalismus

Schritt 8 - Gleichungssystem lösen. Dieser Schritt kann sehr rechenintensiv sein, hier ist er jedoch sehr einfach ...

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial l} &= b + 2\lambda \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} &= 1 + 2\lambda \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \right\} \implies b + 2\lambda = 1 + 2\lambda \\
 \iff b = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2l + 2b - 100 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\iff 2l + 2l - 100 = 0 \implies b = l = 25$$

Bedingungen erster Ordnung

$$b + 2\lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$1 + 2\lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$2l + 2b - 100 \stackrel{!}{=} 0$$

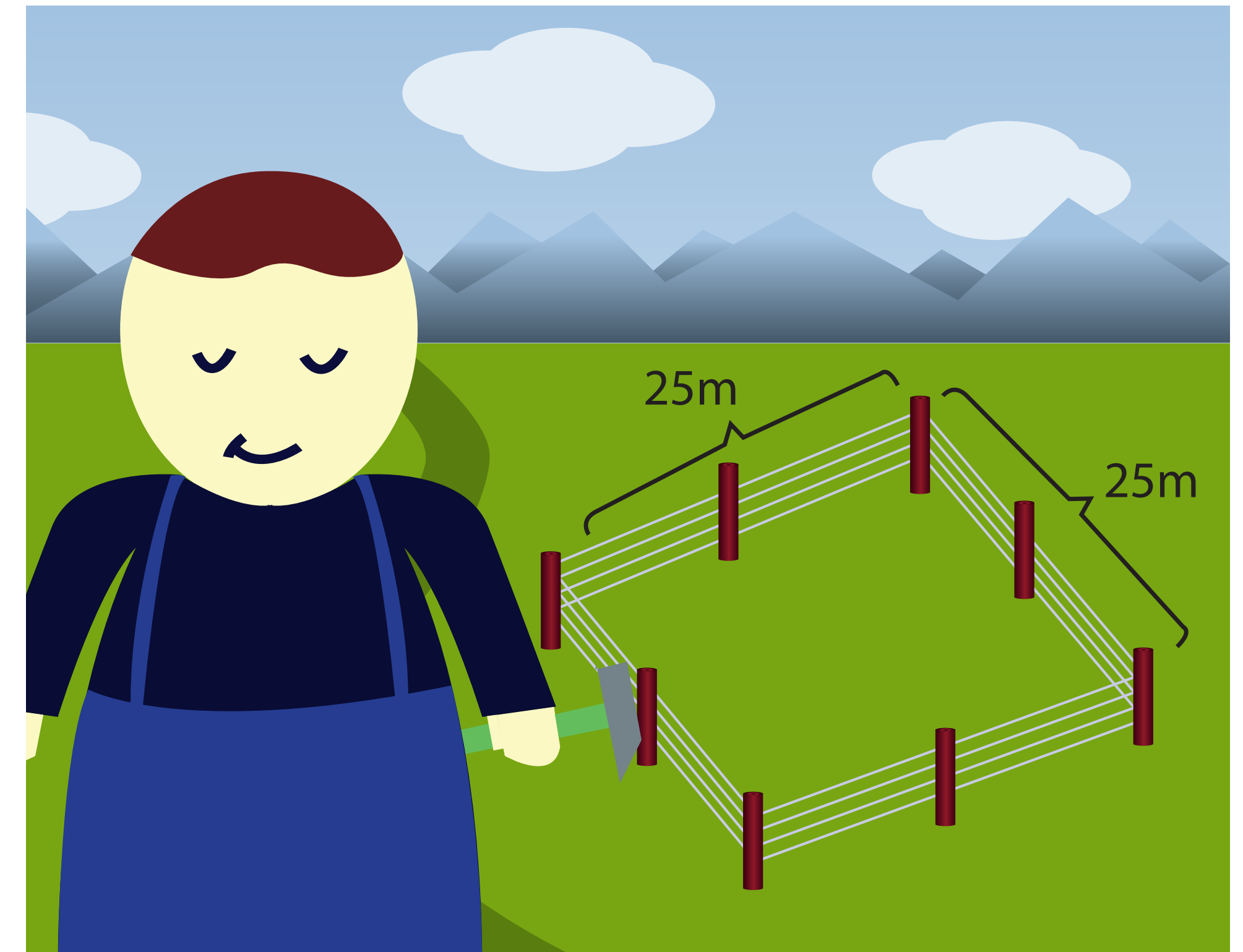
Lagrange Formalismus

Idee Wir suchen ein Minimum/Maximum einer Funktion, wobei wir nur Stellen der Funktion berücksichtigen die bestimmte Bedingungen erfüllen.

Beispiel Wir wollen mit 100 Meter Zaun eine rechteckige Fläche mit Länge l und Breite b einzäunen.

Wir wollen die Länge l und die Breite b so wählen, dass die Fläche so groß wie möglich wird.

Die Fläche muss eine Länge und Breite von 25 Meter haben.



Lagrange Formalismus

Maximiere die folgenden Funktionen unter der jeweils gegebenen Nebenbedingung:

$$\max f(x,y) = 2xy$$

$$\text{s.t. } 3x+2y \leq 60$$

$$\max f(x,y) = xy+x$$

$$\text{s.t. } 2x+y \leq 5$$

Lagrange Formalismus

a) $\max f(x,y) = 2xy$
s.t. $3x+2y \leq 60$

$$3x+2y \leq 60$$

Nebenbedingung nach 0 auflösen

$$\iff 3x+2y-60 \leq 0$$

Ungleichung mit λ multiplizieren

$$\iff \lambda[3x+2y-60] \leq 0$$

Linke Seite zu $f(x,y)$ addieren

$$L(x,y,\lambda) = 2xy + \lambda[3x+2y-60]$$

Partielle Ableitungen 0 setzen

Lagrange Formalismus

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2y + 3\lambda \stackrel{!}{=} 0 & 2y - 3x &= 0 \iff y = 1.5x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x + 2\lambda \stackrel{!}{=} 0 \iff \lambda = -x & & \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= 3x + 2y - 60 \stackrel{!}{=} 0 & & \end{aligned}$$

Einsetzen (from $y = 1.5x$ to $\frac{\partial f}{\partial x}$ and $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$)

$$3x + 2(1.5x) - 60 = 0 \iff 6x - 60 = 0 \implies x_1 = 10$$
$$\implies y_1 = 15$$

Lagrange Formalismus

b) $\max f(x,y) = xy+x$
s.t. $2x+y \leq 5$

$$2x+y \leq 5$$

Nebenbedingung nach 0 auflösen

$$\iff 2x+y-5 \leq 0$$

Ungleichung mit λ multiplizieren

$$\iff \lambda[2x+y-5] \leq 0$$

Linke Seite zu $f(x,y)$ addieren

$$L(x,y,\lambda) = xy+x + \lambda[2x+y-5]$$

Partielle Ableitungen 0 setzen

.

Lagrange Formalismus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 1 + 2\lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad y + 1 - 2x = 0 \iff y = 2x - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \iff \lambda = -x$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 2x + y - 5 \stackrel{!}{=} 0$$

$$2x + (2x - 1) - 5 = 0 \iff 4x - 6 = 0 \implies x_1 = 1.5$$

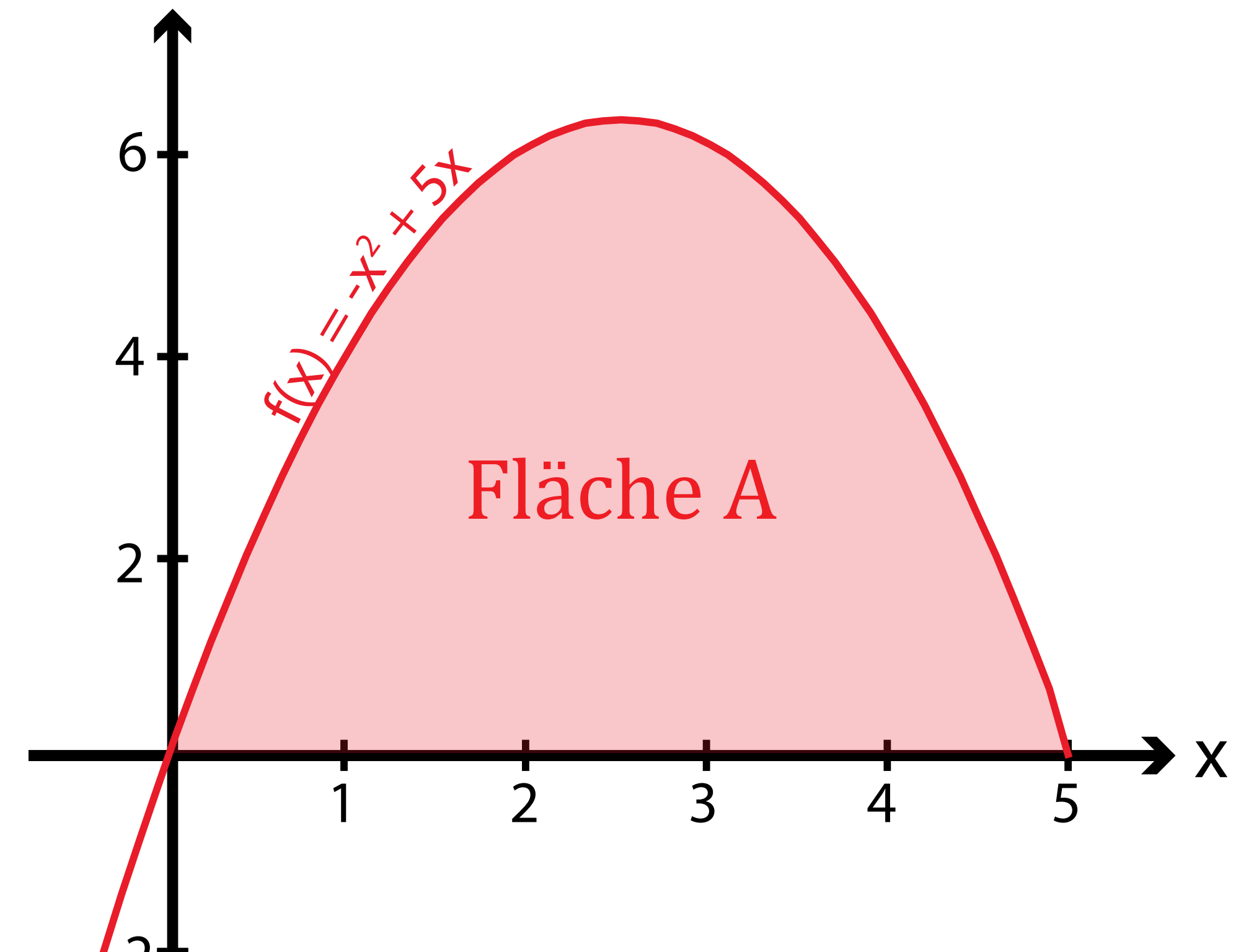
$$\implies y_1 = 2$$

Integralrechnung

Idee Wir wollen die Fläche unter einer Funktion berechnen. Als Beispiel verwenden wir:

$$f(x) = -x^2 + 5x \text{ auf dem Intervall } [0,5]$$

Wie können wir die Fläche A berechnen?



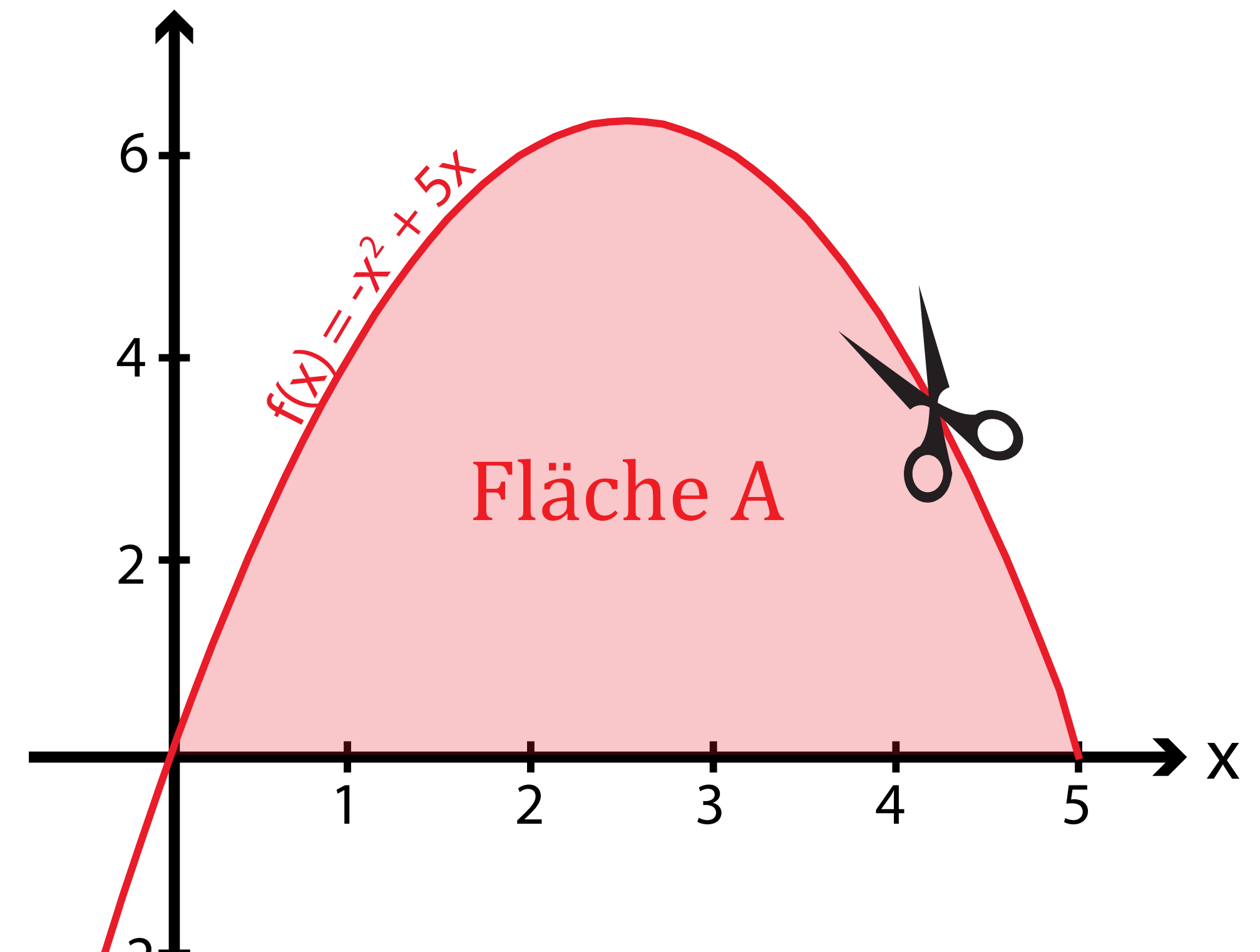
Integralrechnung

Idee Wir wollen die Fläche unter einer Funktion berechnen. Als Beispiel verwenden wir:

$$f(x) = -x^2 + 5x \text{ auf dem Intervall } [0,5]$$

Wie können wir die Fläche A berechnen?

Auf schwerem Papier (z. B. mit 200g/m²) drucken, ausschneiden und wiegen. Dann mit Dreisatz Gewicht in Fläche umrechnen.



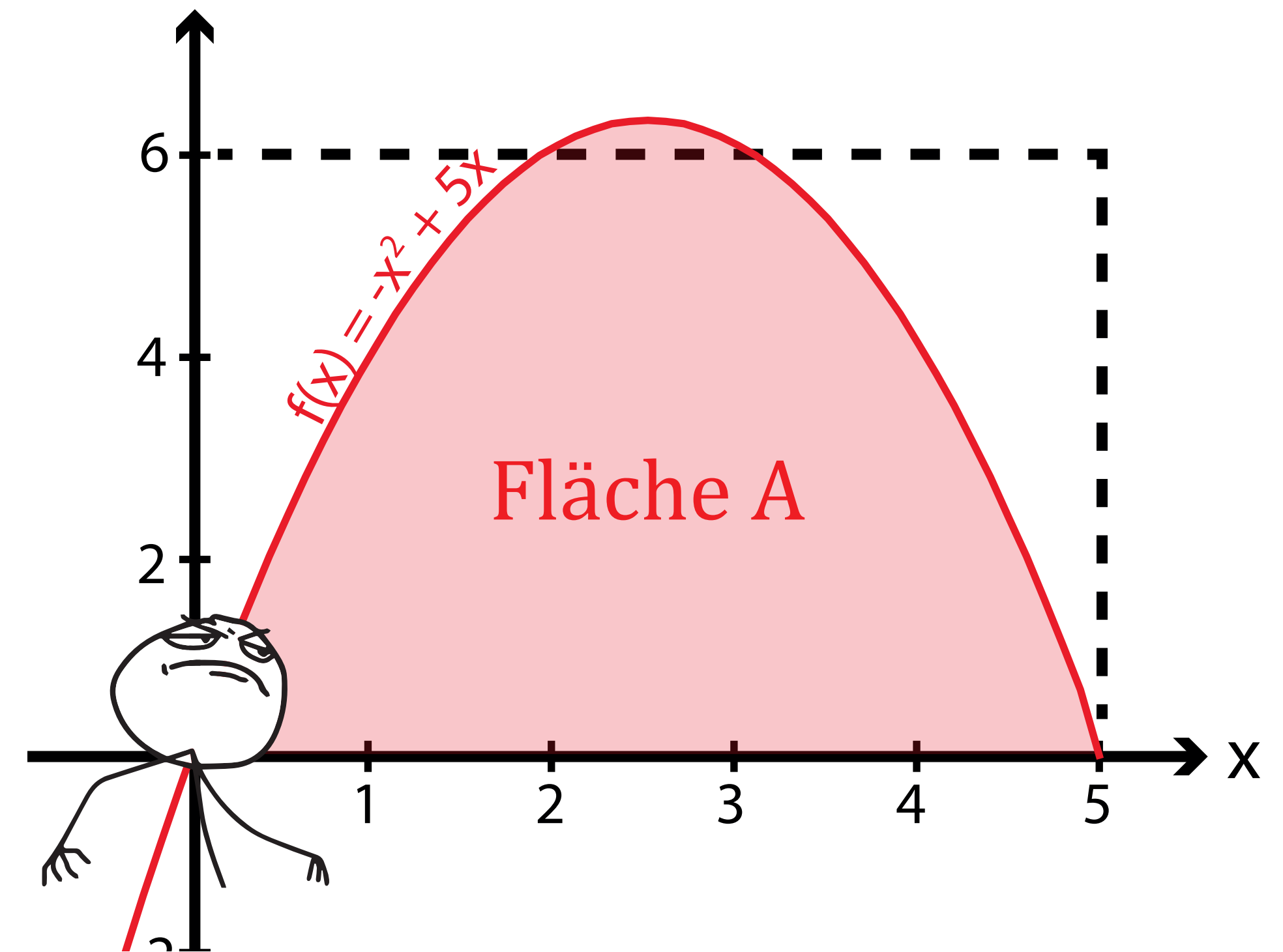
Integralrechnung

Idee Wir wollen die Fläche unter einer Funktion berechnen. Als Beispiel verwenden wir:

$$f(x) = -x^2 + 5x \text{ auf dem Intervall } [0,5]$$

Wie können wir die Fläche A berechnen?

Mit Augenmaß abschätzen: Fläche verdeckt gut $\frac{2}{3}$ des gezeigten Rechtecks.



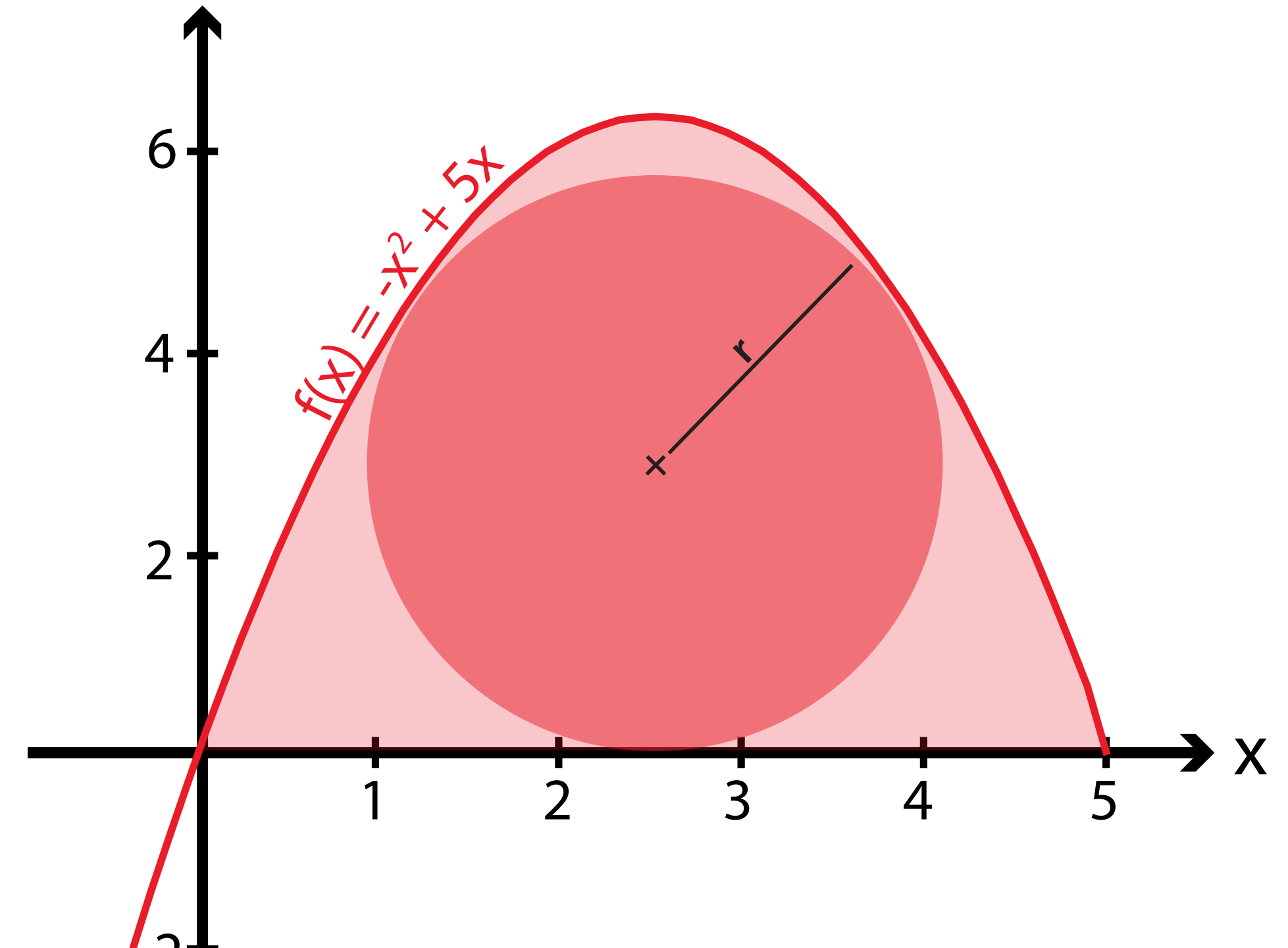
Integralrechnung

Idee Wir wollen die Fläche unter einer Funktion berechnen. Als Beispiel verwenden wir:

$$f(x) = -x^2 + 5x \text{ auf dem Intervall } [0,5]$$

Wie können wir die Fläche A berechnen?

Mit anderen geometrischen Formen annähern, z. B. Fläche des Kreises plus 33%

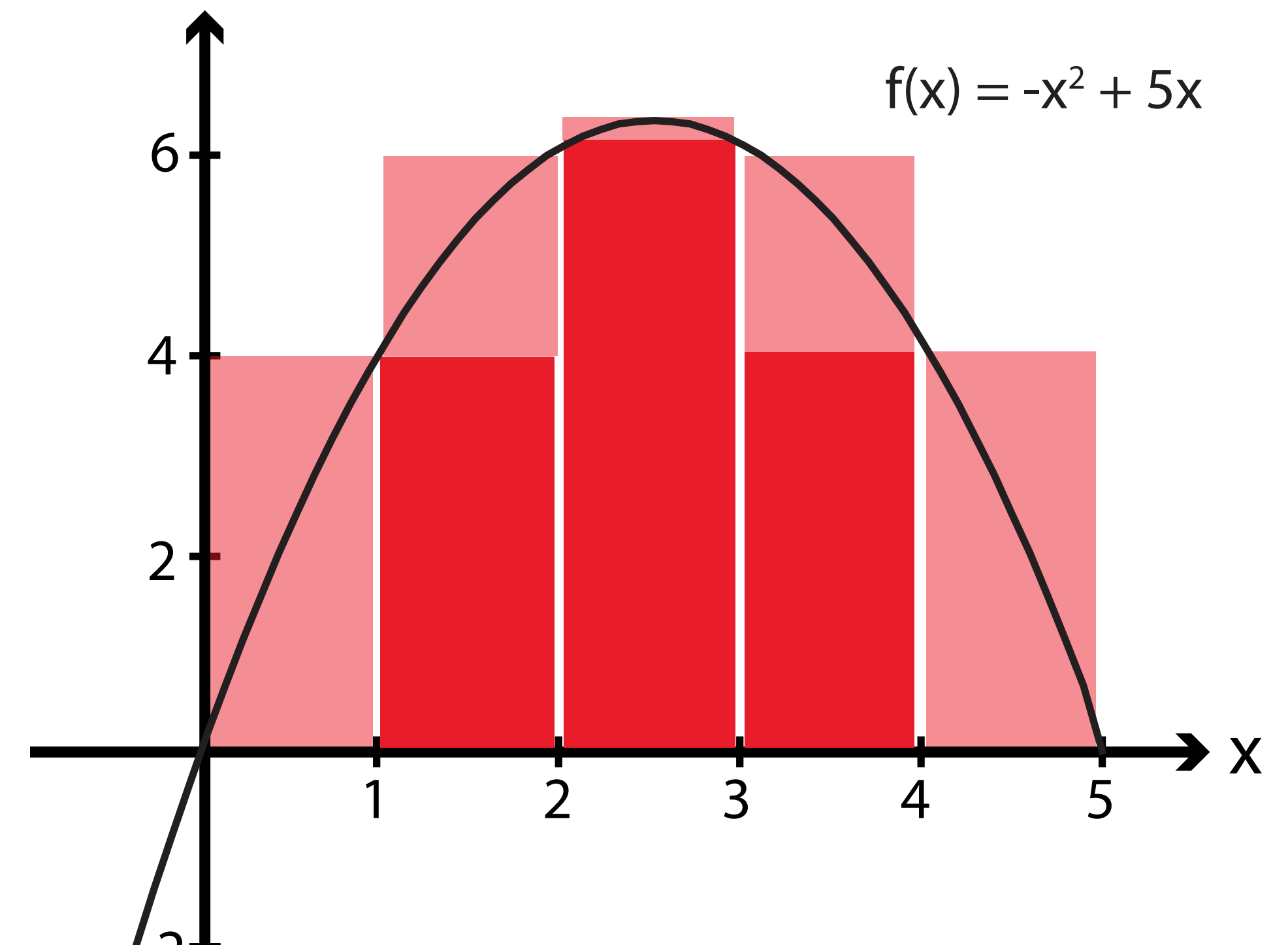


Integralrechnung

Das Integral verwendet den letztgenannten Ansatz, allerdings mit Rechtecken die eine gewisse Breite und Höhe haben.

Die Breite können wir frei wählen. Im Beispiel rechts wäre sie 1. Bei der Höhe gibt es zwei Varianten:

- Maximum der Funktion im Bereich (hell- & dunkelrote Flächen)
- Minimum der Funktion im Bereich (nur dunkelrot Flächen)



Integralrechnung

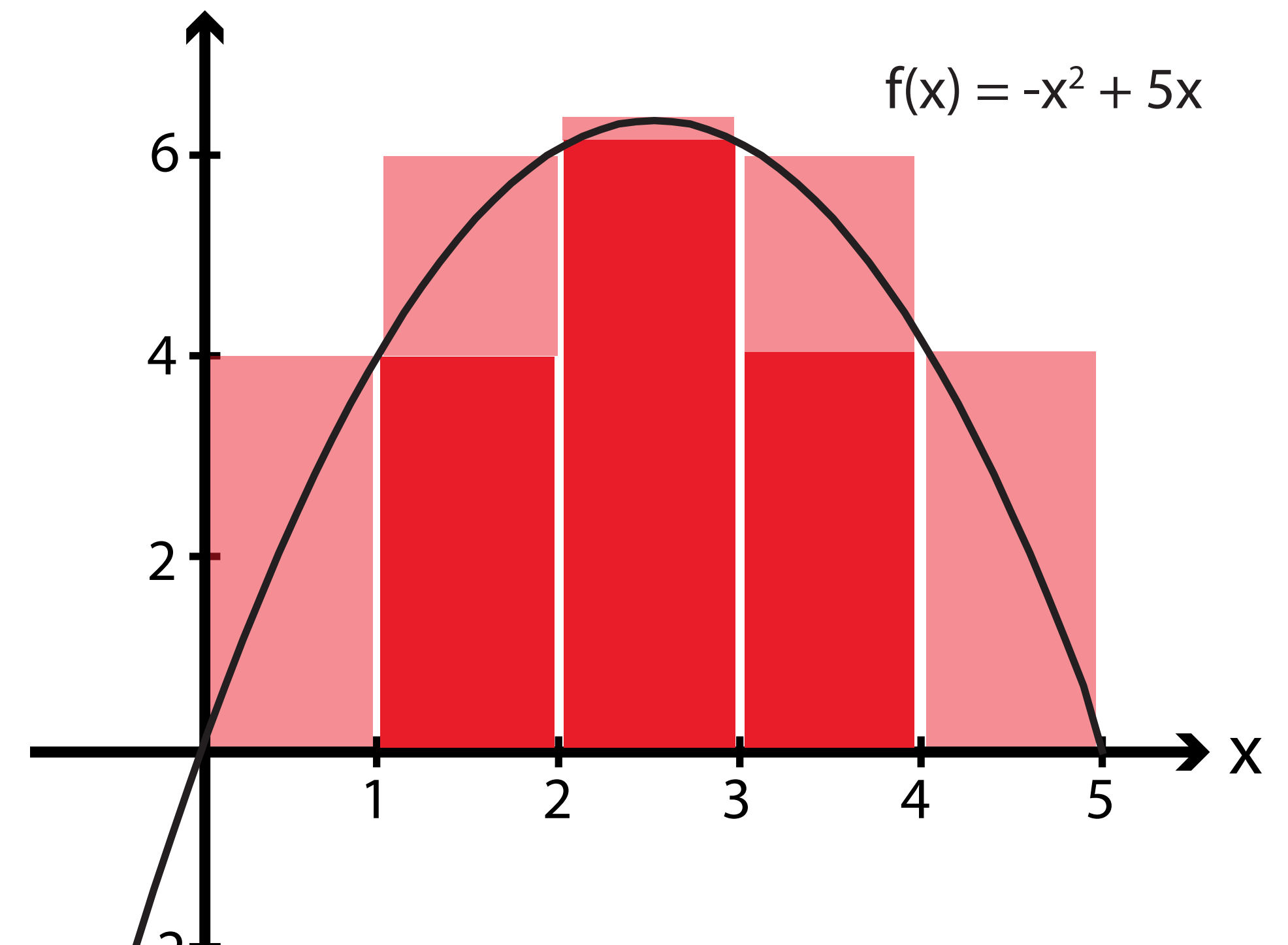
Wir erhalten die folgenden Näherungen:

$$\text{Obersumme } A \approx 4 + 6 + 6.25 + 6 + 4 = 26.25$$

$$\text{Untersumme } A \approx 0 + 4 + 6 + 4 + 0 = 14$$

Die Obersumme überschätzt die wahre Fläche tendenziell, da ihre Flächen über die Kurve hinausragen.

Die Untersumme unterschätzt die wahre Fläche tendenziell, da ihre Flächen die Kurve nicht vollständig ausfüllen.



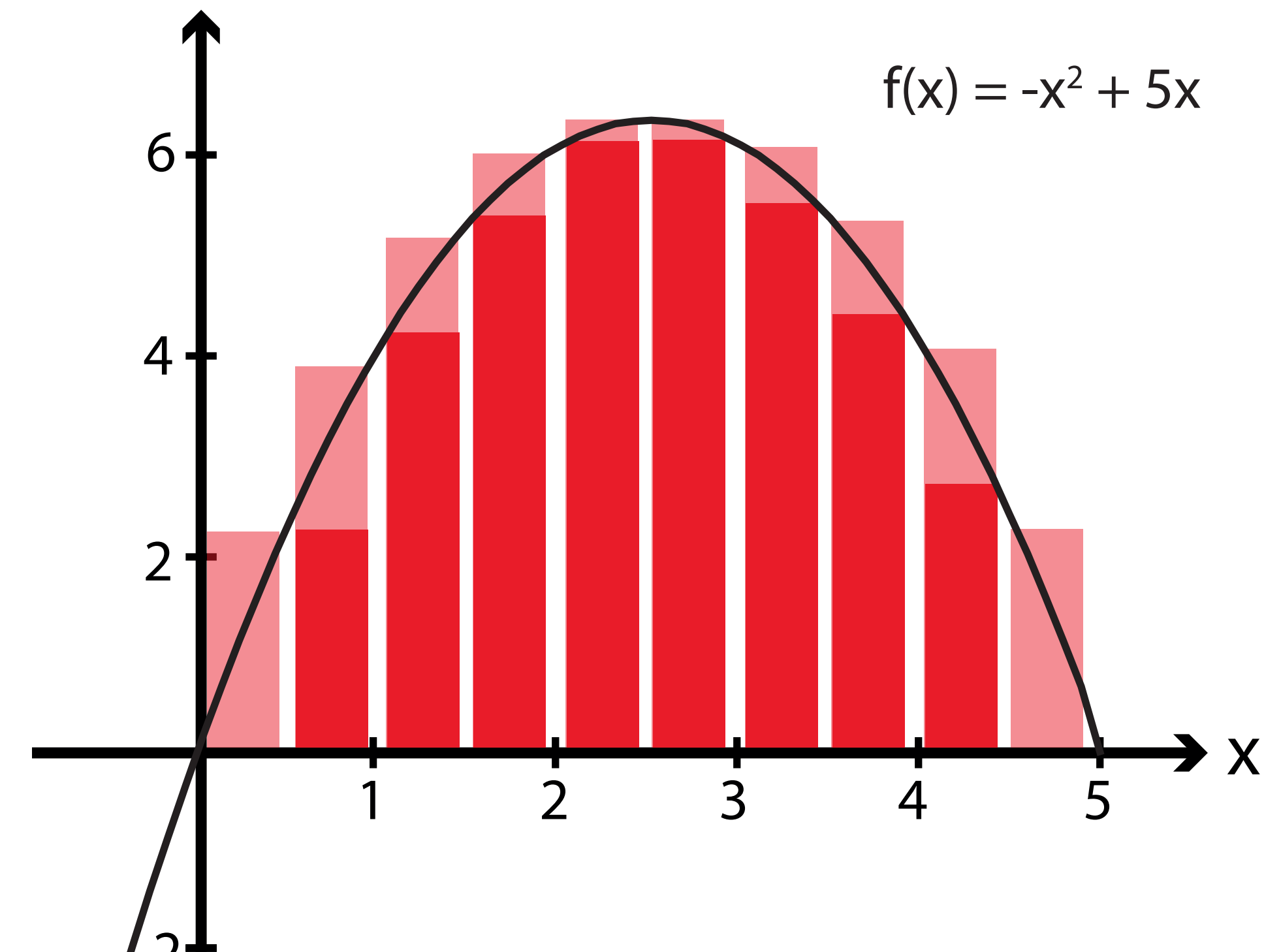
Integralrechnung

Die Näherung wird genauer, wenn wir die Breite der Rechtecke kleiner wählen.

Die Obersumme überschätzt die wahre Fläche weniger, da ihre Flächen weniger über die Kurve hinausragen.

Die Untersumme unterschätzt die wahre Fläche weniger, da ihre Flächen die Kurve vollständiger ausfüllen.

Der Unterschied zwischen Obersumme und Untersumme wird kleiner ...

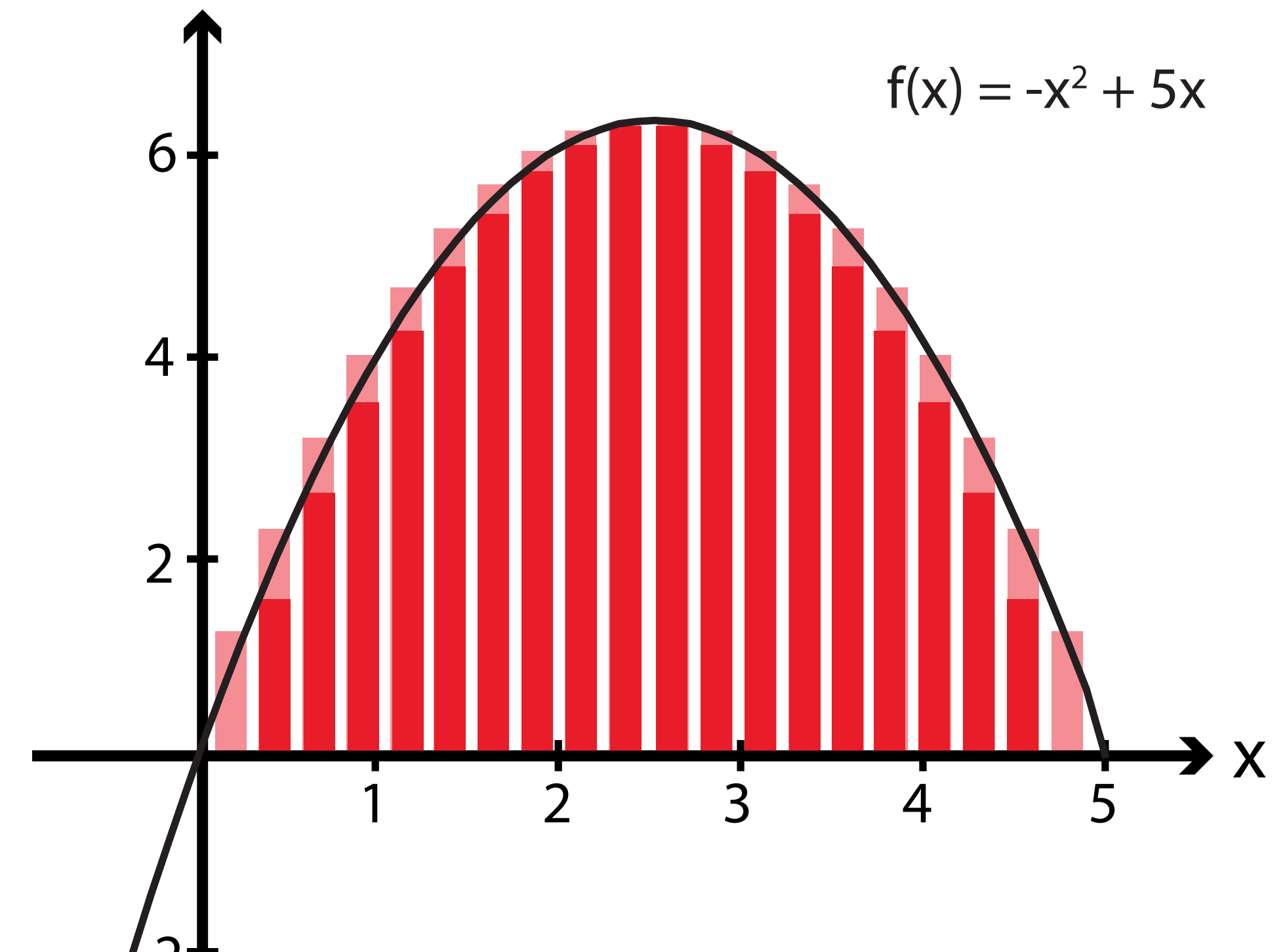


Integralrechnung

...und der Gedanke liegt nahe: Was passiert, wenn wir die Rechtecke unendlich klein machen?

Für alle Riemann-integrierbaren Funktionen konvergieren Ober- und Untersummen dann zum wahren Wert der Fläche.

Fast alle Funktionen, die uns begegnen, sind Riemann-integrierbar; insbesondere sind alle Funktionen die auf einem Intervall I stetig sind, dort auch Riemann-integrierbar!



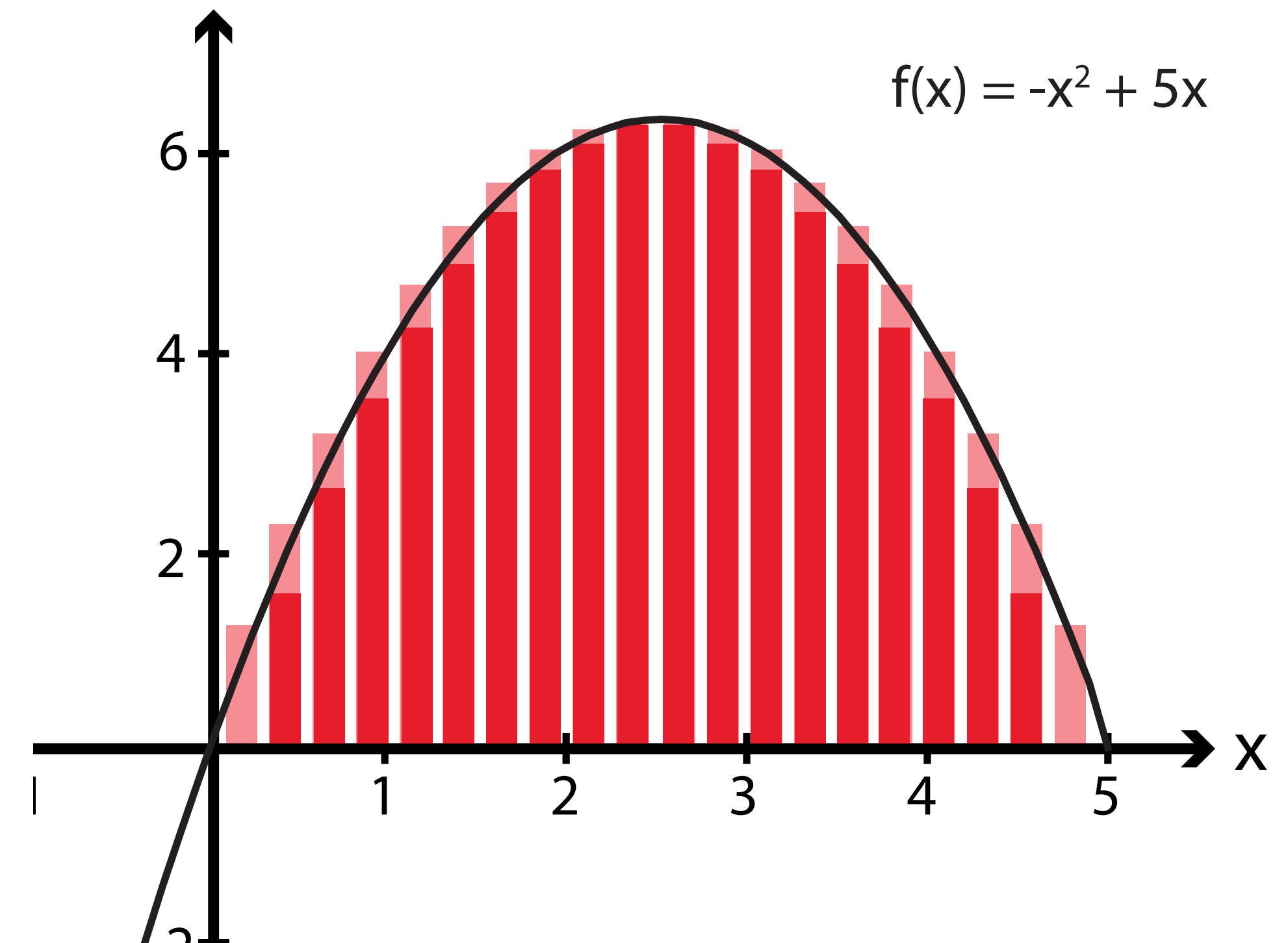
Integralrechnung

Die Integration ist die Umkehrung der Differenziation. Wir suchen hier eine Funktion $F(x)$ für die gilt:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Wir lösen diese Gleichung durch Integration der Funktion $f(x)$.

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) \iff F(x) = \int f(x) dx$$



Integralrechnung

Bei Potenzen erhöhen wir den Exponenten um eins und teilen danach den Vorfaktor durch den Exponenten:

$$F(x) = \int -x^2 + 5x \, dx = -\frac{1}{3}x^3 + 2.5x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Der Wert der Konstanten c ist irrelevant für die Lösung der DGL, da sie beim Ableiten wieder wegfällt:

$$\frac{d}{dx} F(x) = -x^2 + 5x$$

Potenzregel

für $b \neq -1$

$$f(x) = a \cdot x^b$$

$$F(x) = \frac{1}{b+1} a \cdot x^{b+1}$$

$$F(x) = \frac{1}{b+1} a \cdot x^{b+1}$$

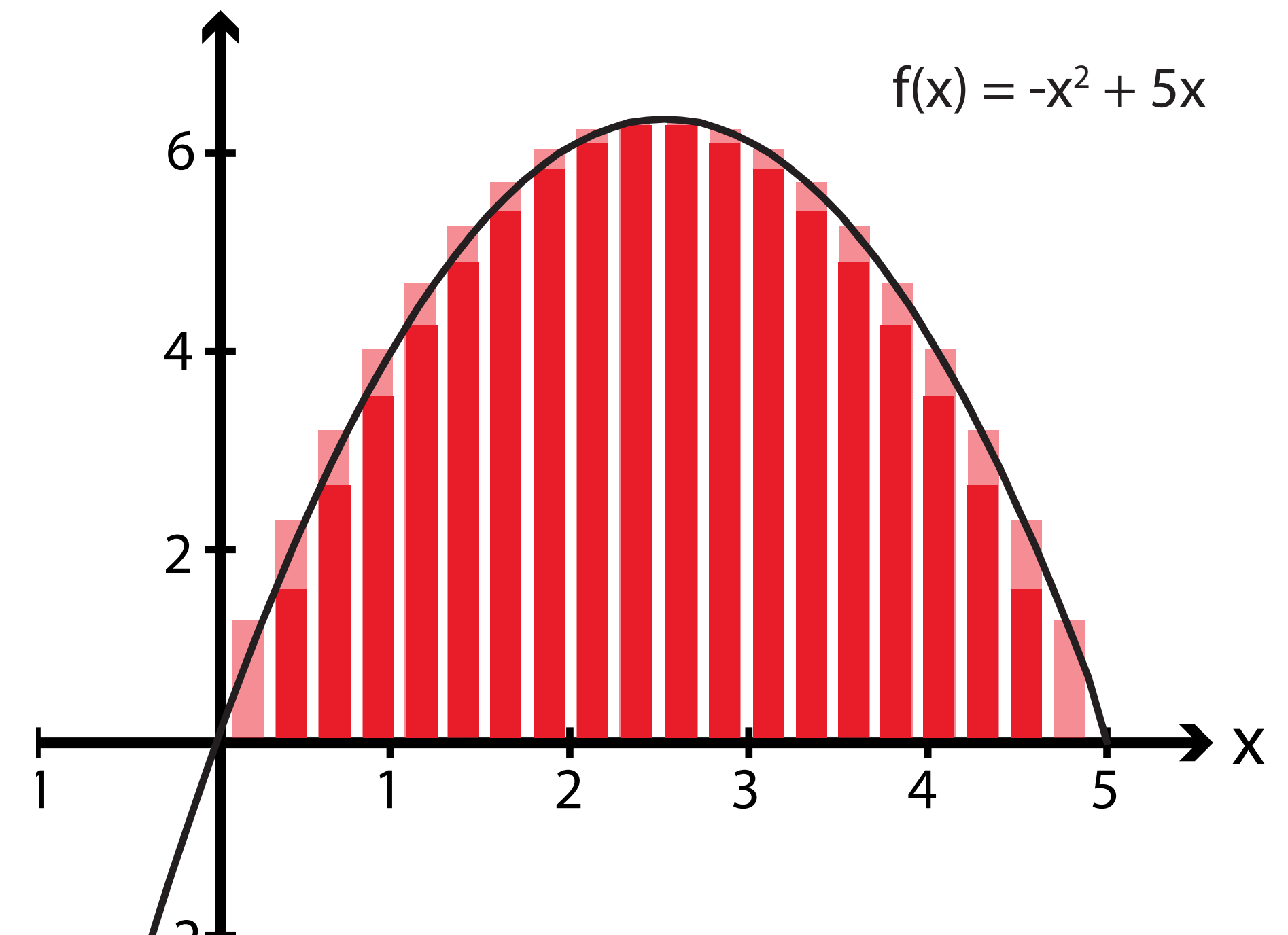
Integralrechnung

Unser Ergebnis ist allerdings keine Fläche, sondern eine sogenannte Stammfunktion; das Ergebnis eines unbestimmten Integrals.

$$F(x) = \int -x^2 + 5x \, dx = -\frac{1}{3}x^3 + 2.5x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Um die Fläche zu berechnen, müssen wir ein bestimmtes Integral berechnen.

$$A = \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$



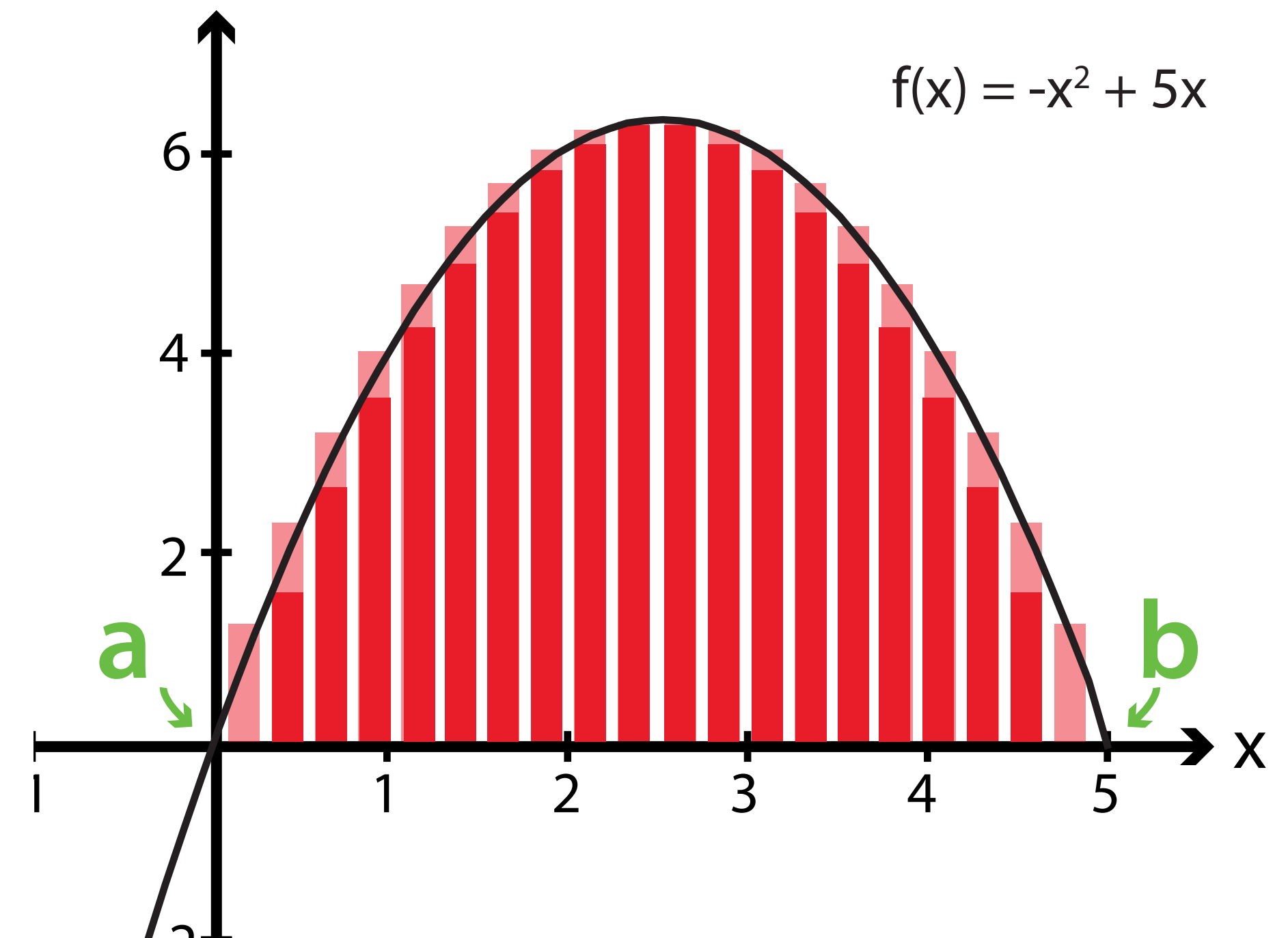
Integralrechnung

Das bestimmte Integral zeichnet sich durch eine Unter- und eine Obergrenze aus zwischen denen aufsummiert wird.

In unserem Beispiel ist die Untergrenze 0 und die Obergrenze 5.

Das liegt nicht an den Nullstellen der Funktion, sondern wurde von mir so gewählt. Wir hätten auch -1 bis 3 wählen können.

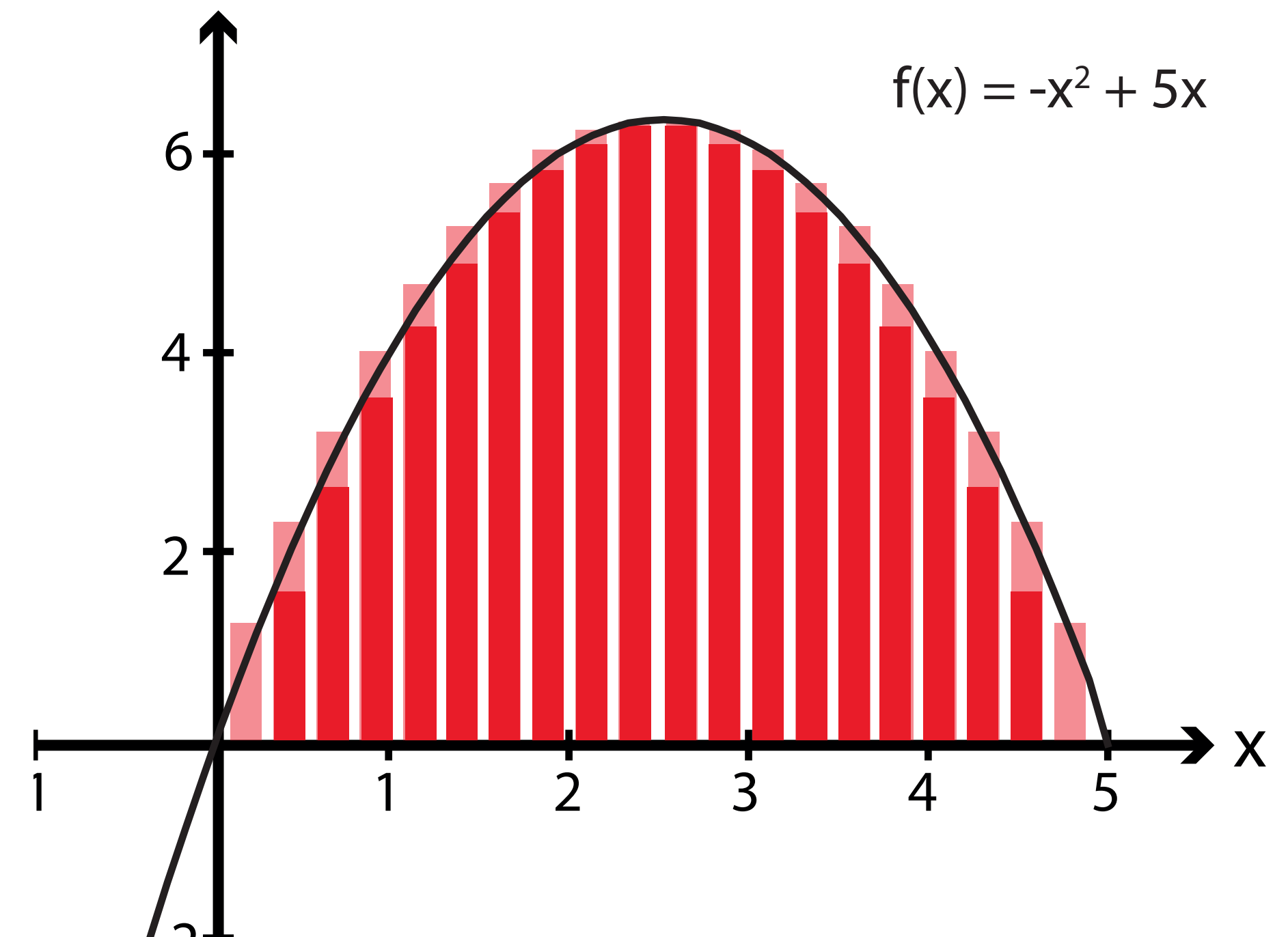
$$A = \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$



Integralrechnung

Bei der Berechnung des bestimmten Integrals kann die Konstante c ebenfalls weggelassen werden. Ihr Wert spielt keine Rolle:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^5 -x^2 + 5x \, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2.5x^2 + c \right]_0^5 \\ &= \left[-\frac{1}{3}5^3 + 2.5 \cdot 5^2 + c \right] - \left[-\frac{1}{3}0^3 + 0 \cdot 5^2 + c \right] \\ &= 20.83 \end{aligned}$$



Integrationsregeln

Wir lernen noch einige weitere Integrationsregeln kennen. Eine davon haben wir hier bereits angewendet: die Summenregel!

$$\begin{aligned} A &= \int_0^5 -x^2 + 5x \, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2.5x^2 + c \right]_0^5 \\ &= \left[-\frac{1}{3}5^3 + 2.5 \cdot 5^2 + c \right] - \left[-\frac{1}{3}0^3 + 0 \cdot 5^2 + c \right] \\ &= 20.83 \end{aligned}$$

Summenregel

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$F(x) = \int g(x)dx + \int h(x)dx$$

$$F(x) = G(x) + H(x)$$

Integrationsregeln

Konstante Faktoren können herausgezogen werden:

$$\int a \cdot f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx = a \cdot F(x)$$

Die Stammfunktion von x^{-1} ist eine Ausnahme der Potenzregel. Diese würde 0 als Stammfunktion ausgeben. Stattdessen gilt:

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(x)$$

Potenzregel

für $b \neq -1$

$$f(x) = a \cdot x^b$$

$$F(x) = \frac{1}{b+1} a \cdot x^{b+1}$$

$$F(x) = \frac{1}{b+1} a \cdot x^{b+1}$$

Integrationsregeln

Die folgenden Regeln für Exponentialfunktion und Logarithmus werdet ihr vermutlich nie benötigen ...

$$\int \ln(x) \, dx = x \cdot \ln(x) - x$$

$$\int e^x \, dx = e^x$$

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} \, dx = e^{f(x)}$$

Ableiten ist ein Handwerk, Integrieren eine Kunst!



Integrationsregeln

Gibt es bei der Integration auch eine Produktregel? Nicht direkt, aber etwas Ähnliches: Partielle Integration!

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx = \left[f(x) \cdot g(x) \right] - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

Mit dieser lässt sich z. B. die Stammfunktion von $\ln(x)$ bestimmen. Aber auch hier: Wir verlassen damit den Bereich des für uns Relevanten.



Integrationsregeln

Berechne die folgenden bestimmten Integrale:

$$\int_0^2 2x - 3x^2 \, dx =$$

$$\int_1^e \frac{1}{e} + \frac{1}{x} \, dx =$$

$$\int_0^1 \sqrt{9x} \, dx =$$

Integrationsregeln

$$\int_0^2 2x - 3x^2 \, dx = \left[x^2 - x^3 \right]_0^2 = (4-8) - (0-0) = -4$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{1}{e} + \frac{1}{x} \, dx &= \left[\frac{x}{e} + \ln(x) \right]_1^e \\ &= \frac{e}{e} + \ln(e) - \frac{1}{e} - \ln(1) \\ &= 2 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Integrationsregeln

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{9x} \, dx &= 3 \int_0^1 \sqrt{x} \, dx \\ &= 3 \left[\frac{2}{3} x^{1.5} \right]_0^1 \\ &= 3 \left(\frac{2}{3} - 0 \right) = 2\end{aligned}$$

Lineare Algebra

Bei der linearen Algebra lernen wir nicht nur Vektoren und Matrizen kennen, sondern auch zwei Algorithmen mit denen wir lineare Gleichungssysteme sicher lösen können!



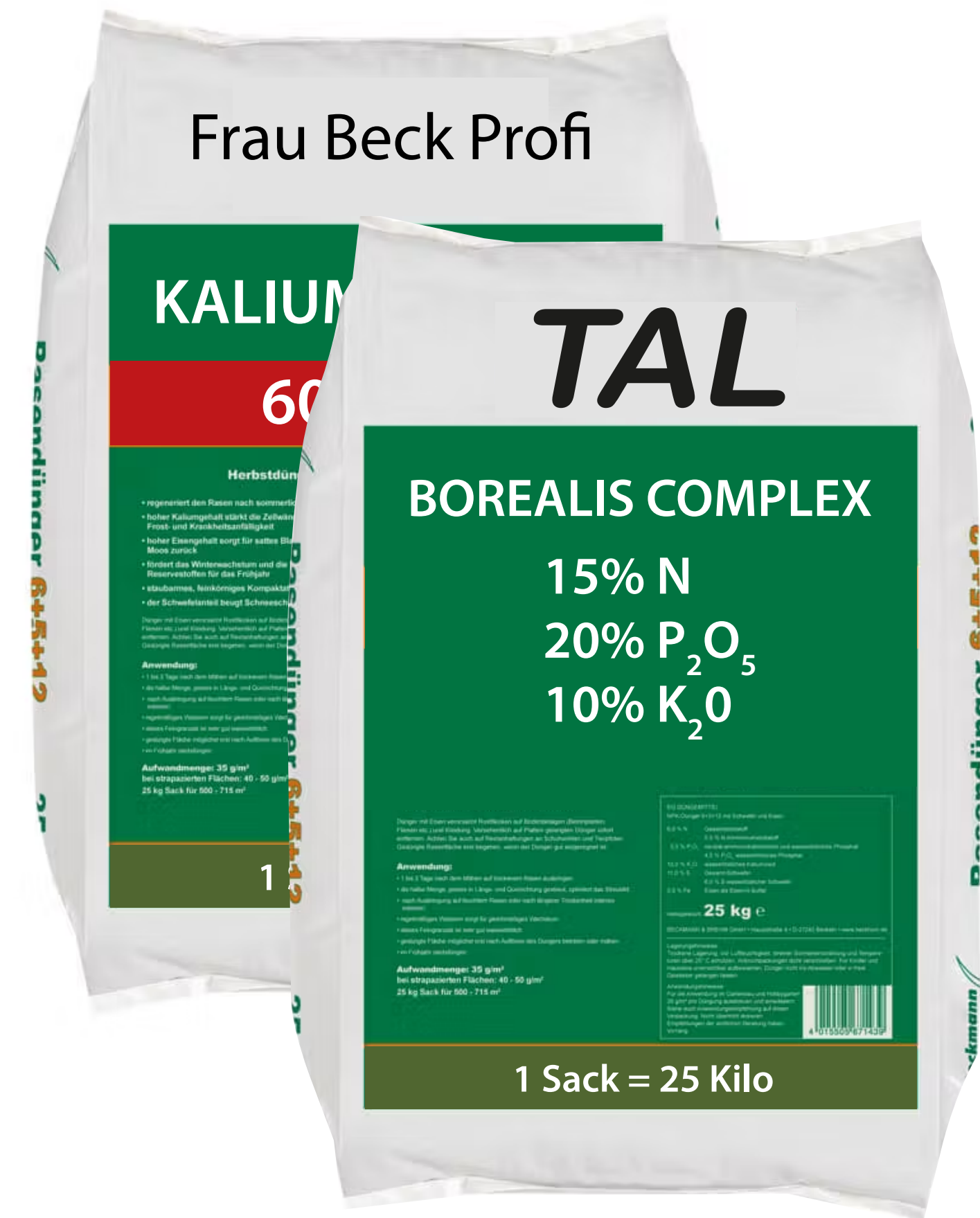
Lineare Algebra

-
- Vektoren
 - Matrizen
 - Lineare Gleichungssysteme II
 - Gauss-Jordan Algorithmus
 - Matrixinversion
-

Vektoren

Wir Beginnen das Thema mit einem Beispiel aus der Landwirtschaft: Düngemittel.

Viele Düngemittel enthalten eine Kombination an verschiedenen Nährstoffen in unterschiedlicher Konzentration.



Vektoren

Um das Konzentrationsverhältnis mathematisch zu beschreiben, verwenden wir Vektoren!

$$c = \begin{pmatrix} 15\% \\ 20\% \\ 10\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.20 \\ 0.10 \end{pmatrix}$$

$$c = (15\%, 20\%, 10\%) \\ = (0.15, 0.20, 0.10)$$



Vektoren

Es gibt formale Unterschiede zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren. Für unsere Zwecke sind es aber nur unterschiedliche Varianten der Darstellung.

$$c = \begin{pmatrix} 15\% \\ 20\% \\ 10\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.20 \\ 0.10 \end{pmatrix}$$

$$c = (15\%, 20\%, 10\%) \\ = (0.15, 0.20, 0.10)$$



Vektoren

Das Formelzeichen für ein Element aus einem Vektor ist das Formelzeichen des Vektors plus ein geeignetes Subskript. Die Elemente des Vektors c ...

$$c = \begin{pmatrix} 15\% \\ 20\% \\ 10\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.20 \\ 0.10 \end{pmatrix}$$

... können wir wie folgt bezeichnen:

$$c_1 = 0.15 \quad c_2 = 0.2 \quad c_3 = 0.1$$



Vektoren

Wir können Vektoren mit normalen Zahlen (sogenannte Skalare) multiplizieren und dividieren, indem wir die Rechenoperation auf jedes Element anwenden!

Beispiel: Welche Flächenkonzentrationen erhalten wir, wenn wir 100kg Borealis Complex kaufen und auf eine Fläche von 5 Hektar ausbringen?



Vektoren

Im ersten Schritt berechnen wir die Nährstoffmengen:

$$m_N = m_D \cdot c = 100\text{kg} \cdot \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.20 \\ 0.10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\text{kg} \cdot 0.15 \\ 100\text{kg} \cdot 0.20 \\ 100\text{kg} \cdot 0.10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\text{kg} \\ 20\text{kg} \\ 10\text{kg} \end{pmatrix}$$

Im zweiten Schritt die Flächenkonzentration:

$$\beta = m_N / A = \begin{pmatrix} 15\text{kg} \\ 20\text{kg} \\ 10\text{kg} \end{pmatrix} / 5\text{ha} = \begin{pmatrix} 3\text{kg/ha} \\ 4\text{kg/ha} \\ 2\text{kg/ha} \end{pmatrix}$$



Vektoren

Wir können zwei Vektoren miteinander addieren und subtrahieren, indem wir die Rechenoperation elementweise ausführen.

Beispiel: Wie viel Nährstoffe haben wir, wenn wir 100kg Borealis Complex mit 25kg 60%-igem Kaliumdünger mischen?



Vektoren

$$m_{N,1} = m_{D,1} \cdot c_1 = 100\text{kg} \cdot \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.20 \\ 0.10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\text{kg} \\ 20\text{kg} \\ 10\text{kg} \end{pmatrix}$$

$$m_{N,2} = m_{D,2} \cdot c_2 = 25\text{kg} \cdot \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\text{kg} \\ 0\text{kg} \\ 15\text{kg} \end{pmatrix}$$

$$m_N = m_{N,1} + m_{N,2} = \begin{pmatrix} 15\text{kg} \\ 20\text{kg} \\ 10\text{kg} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\text{kg} \\ 0\text{kg} \\ 15\text{kg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\text{kg} \\ 20\text{kg} \\ 25\text{kg} \end{pmatrix}$$



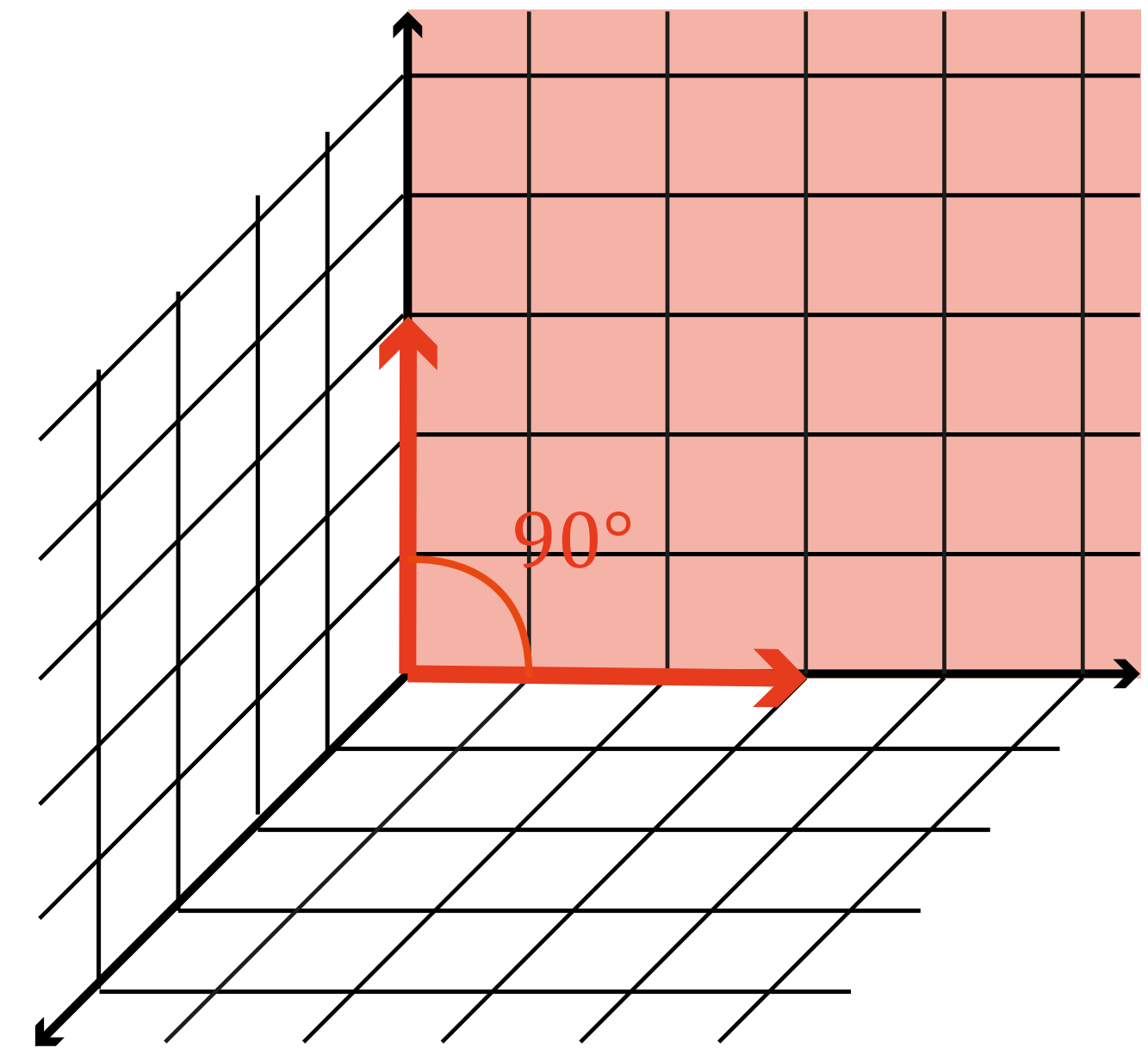
Vektoren

Bei Produkten zwischen zwei Vektoren unterscheiden wir zwischen dem Kreuz- und dem Skalarprodukt.

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren ist definiert als ...

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Aus dem Skalarprodukt lässt sich der Öffnungswinkel zwischen zwei Vektoren berechnen. Bei 90° ist das Skalarprodukt genau 0.



$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 0$$

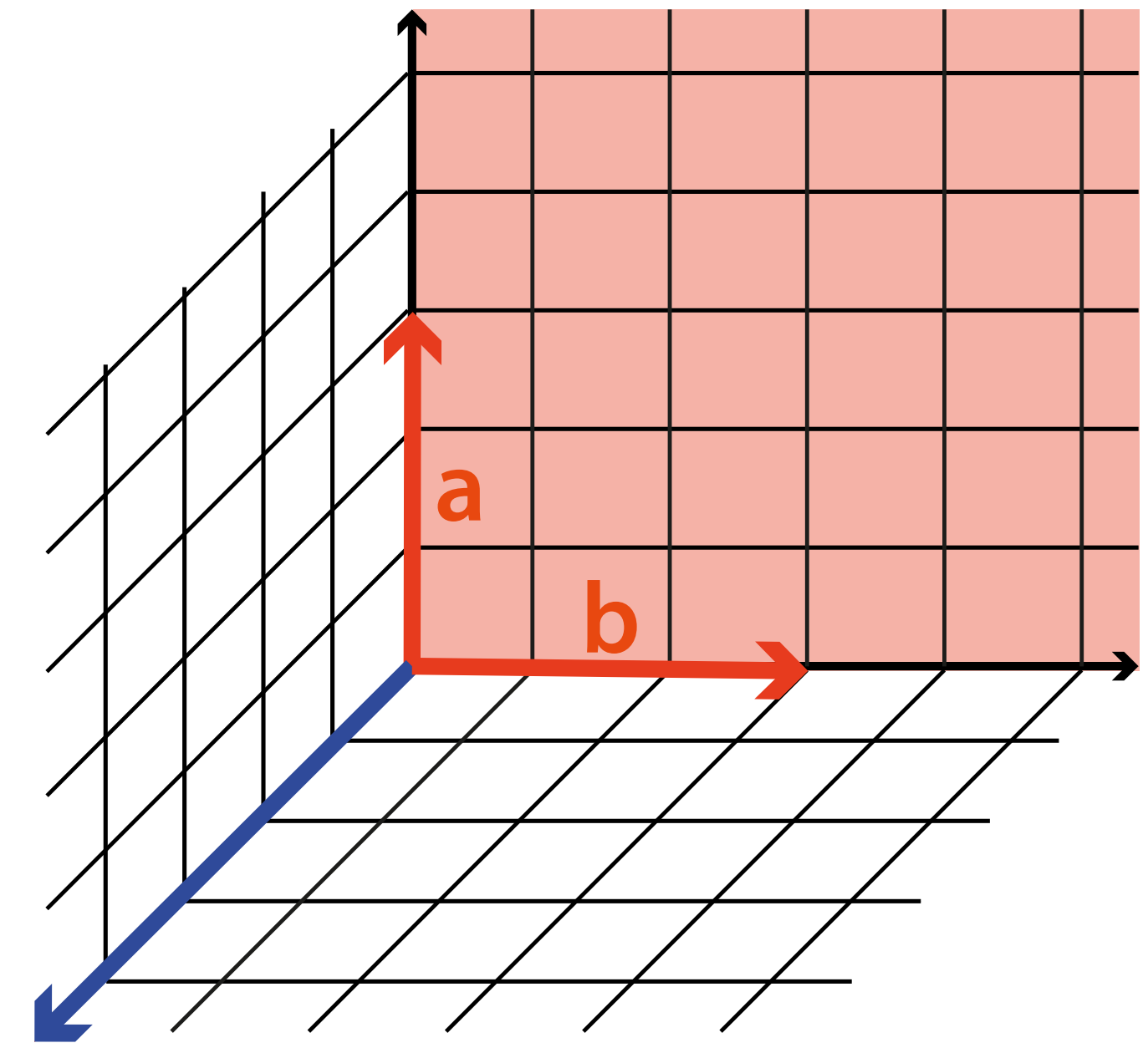
Vektoren

Bei Produkten zwischen zwei Vektoren unterscheiden wir zwischen dem Kreuz- und dem Skalarprodukt.

Das Kreuzprodukt zwischen zwei Vektoren ist definiert als ...

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Geometrisch betrachtet liefert uns das Kreuzprodukt von a und b einen Vektor, der senkrecht auf diesen beiden steht!



$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 9 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vektoren

Die Addition eines Skalars auf einen Vektor ist mathematisch nicht einheitlich definiert.

In einigen Computersystemen wie z. B. R/R-Studio führt sie zu einer Addition des Skalars zu jedem Element des Vektors.

In anderen Computersystemen führt sie aber auch zu einer Fehlermeldung bzw. einem ungültigen Ergebnis.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 = ??? \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - 2 = ???$$



$$\begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 50 \end{pmatrix} =$$

$$z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 40 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 30 \\ 65 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 16 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 21 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$5 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 40 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 29$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Matrizen

Matrizen sind eine Erweiterung des Vektors. Statt nur Zeilen oder Spalten zu haben, besitzt die Matrix beides.

Die Anzahl an Zeilen muss nicht zwingend der Anzahl an Spalten entsprechen.

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten wird als $m \times n$ Matrix bezeichnet und enthält $m \cdot n$ Elemente.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3x3 Matrix
mit 9 Elementen

Matrizen

Das Formelzeichen für ein Element aus einer Matrix ist das Formelzeichen der Matrix plus ein Subskript in dem zuerst die Zeilennummer und dann die Spaltennummer genannt wird:

$$a_{1,2} = 8 \quad a_{2,2} = 7 \quad a_{3,2} = 2$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3x3 Matrix
mit 9 Elementen

Matrizen

Matrizen gleicher Größe können elementweise addiert werden.

$$a + b = \begin{pmatrix} 1+1 & 8+0 & 0+0 \\ 2+0 & 7-5 & 5+0 \\ 3+0 & 2+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen können mit Skalaren multipliziert werden. Die Multiplikation wird auf alle Elemente angewendet.

$$2a = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 8 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 7 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 0 \\ 4 & 14 & 10 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen

Matrizen können gedreht werden. Bei der sogenannten Transponierung werden Zeilen zu Spalten und umgekehrt.

Tipp: Die Elemente auf der Diagonalen bleiben identisch.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad b^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

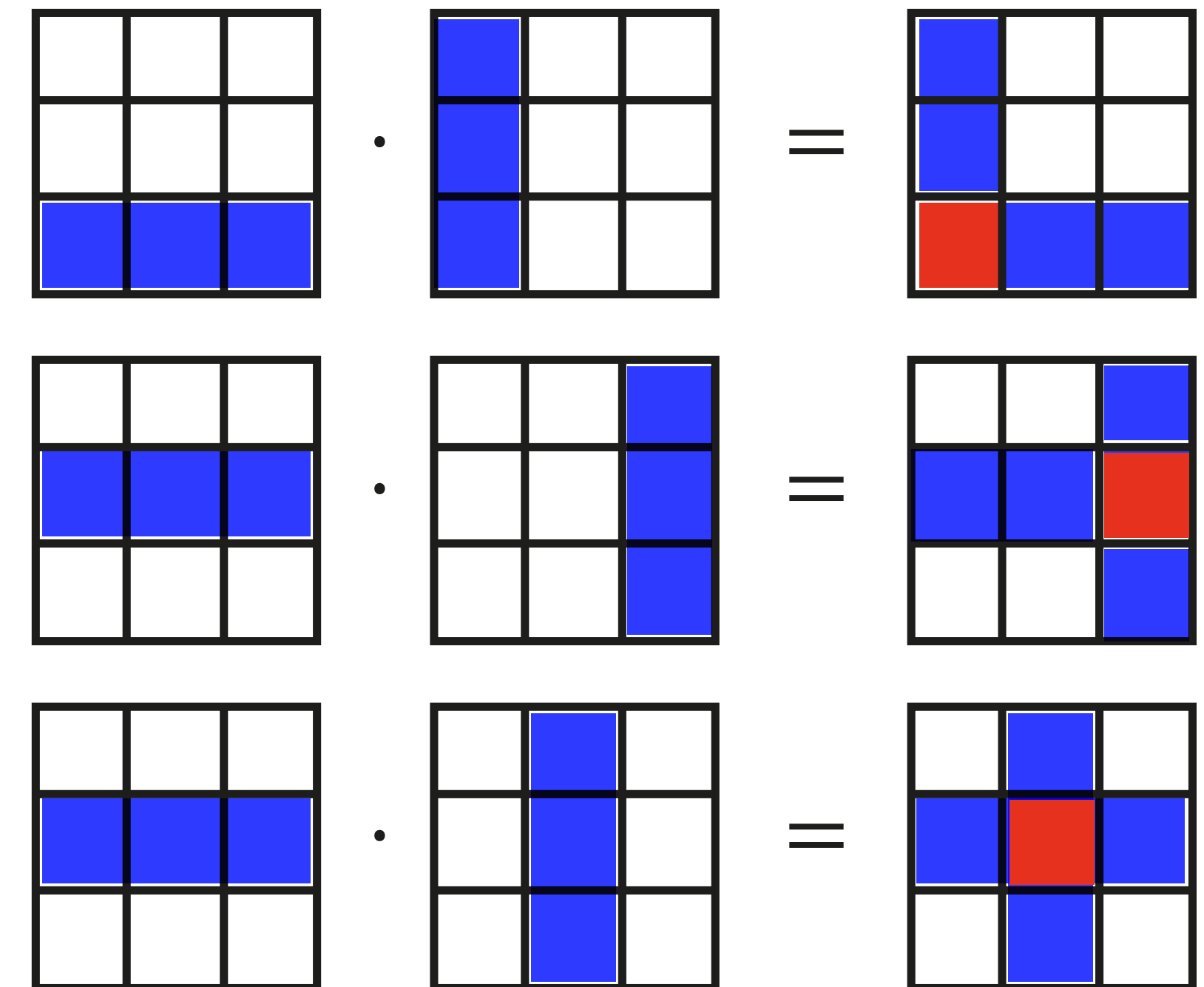
$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen

Matrizen können mit Matrizen multipliziert werden. Das Produkt ist eine Matrix, deren Größe von den beiden Faktoren abhängt. Die Elemente des Produkts $m_{i,k}$ ergeben sich aus den Skalarprodukten der i-ten Zeile mit der k-ten Spalte.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 23 & 8 \end{pmatrix}$$

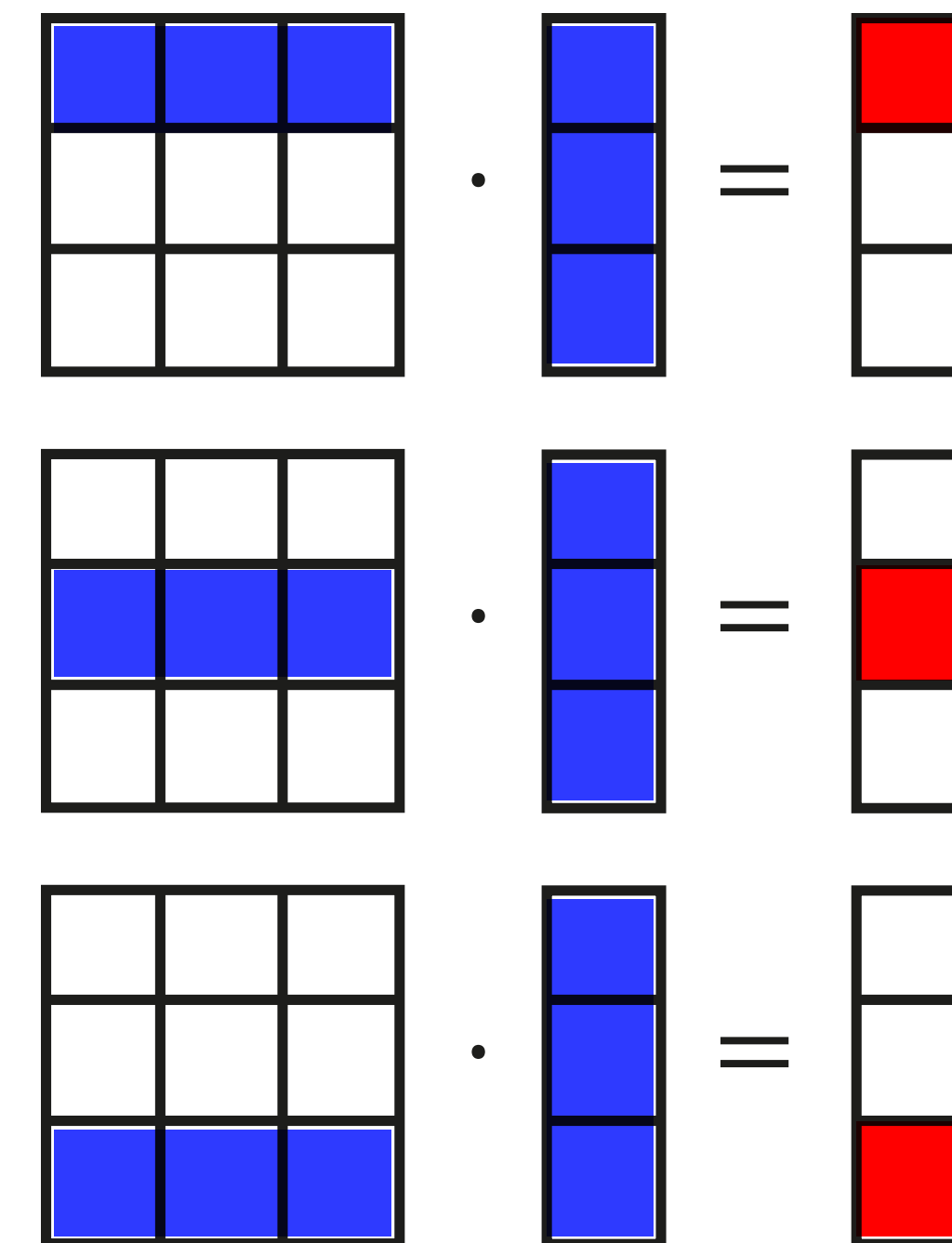


Matrizen

Matrizen können mit Vektoren multipliziert werden. Das Produkt ist ein Vektor, dessen Größe von den beiden Faktoren abhängt. Die Elemente des Produkts $m_{i,k}$ ergeben sich aus den Skalarprodukten der i-ten Zeile mit der k-ten Spalte.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 23 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$10 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 5 \\ 52 & 15 \end{pmatrix}$$

$$10 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 5 & 20 & 5 \\ 5 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme II

Zur Düngung eines Ackers benötigen wir eine ganz bestimmte Kombination an Nährstoffen.

Kaufen wir Düngemittel die nur einen einzelnen Nährstoff enthalten, können wir die benötigten Mengen separat berechnen.

Viele Düngemittel enthalten jedoch eine Kombination an Nährstoffen und gerade bei organischem Dünger ist von Natur aus mehr als nur ein Nährstoff enthalten.



Lineare Gleichungssysteme II

Für die Düngung eines Ackers benötigen wir 500kg Stickstoff, 300kg Phosphor und 400kg Kalium.

Wie können wir dieses Mengenverhältnis durch eine Mischung der drei rechts gezeigten Düngemittel erzielen?



Lineare Gleichungssysteme II

$$\begin{aligned}
 m_N &= m_1 c_{N,1} + m_2 c_{N,2} + m_3 c_{N,3} \\
 m_{P_{2O_5}} &= m_1 c_{P_{2O_5},1} + m_2 c_{P_{2O_5},2} + m_3 c_{P_{2O_5},3} \\
 m_{K_{2O}} &= m_1 c_{K_{2O},1} + m_2 c_{K_{2O},2} + m_3 c_{K_{2O},3} \\
 500 &= 0.40m_1 + 0.20m_2 + 0.10m_3 \\
 300 &= 0.20m_1 + 0.15m_2 + 0.10m_3 \\
 400 &= 0.10m_1 + 0.10m_2 + 0.375m_3
 \end{aligned}$$



Lineare Gleichungssysteme II

Wir können dieses LGS mit den aus der elementaren Algebra bekannten Rechenschritten lösen:

Technik 1 - Auflösen und Einsetzen

Technik 2 - Addieren/Subtrahieren der Gleichungen

Technik 3 - Rechte/Linke Seiten gleichsetzen



Lineare Gleichungssysteme II

Wir können dieses Gleichungssystem auch als Matrixgleichung schreiben. Jede Zeile der Matrix steht für einen Nährstoff und jede Spalte für einen Dünger.

$$\begin{pmatrix} 0.40 & 0.20 & 0.10 \\ 0.20 & 0.15 & 0.10 \\ 0.10 & 0.10 & 0.375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ 0.20 & 0.15 & 0.10 & 300 \\ 0.10 & 0.10 & 0.375 & 400 \end{array} \right)$$



Lineare Gleichungssysteme II

Mit der Matrixschreibweise können wir die Lösungen über folgende Rechenwege finden:

Gauss-Jordan Algorithmus

Matrixinversion

Cramersche Regel

Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir nur die ersten beiden Rechenwege behandeln.



Gauss-Jordan

Im ersten Schritt verwenden wir die erste Zeile, um in den beiden anderen Zeilen das linke Element zu eliminieren.

Wir ziehen die erste Zeile ...

...0.50 mal von der zweiten ab.

...0.25 mal von der dritten ab.

Schritt 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ 0.20 & 0.15 & 0.10 & 300 \\ 0.10 & 0.10 & 0.375 & 400 \end{array} \right)$$

Schritt 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ - & 0.05 & 0.05 & 50 \\ - & 0.05 & 0.35 & 275 \end{array} \right)$$

Schritt 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ - & 0.05 & 0.05 & 50 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & - & 425 \\ - & 0.05 & - & 12.5 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & - & - & 375 \\ - & 0.05 & - & 12.5 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & - & - & 937.5 \\ - & 1 & - & 250 \\ - & - & 1 & 750 \end{array} \right)$$

Gauss-Jordan

Im zweiten Schritt verwenden wir die zweite Zeile, um in der dritten Zeile das zweite Element zu eliminieren.

Wir ziehen die zweite Zeile von der dritten ab.

Schritt 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ 0.20 & 0.15 & 0.10 & 300 \\ 0.10 & 0.10 & 0.375 & 400 \end{array} \right)$$

Schritt 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ - & 0.05 & 0.05 & 50 \\ - & 0.05 & 0.35 & 275 \end{array} \right)$$

Schritt 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ - & 0.05 & 0.05 & 50 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & - & 425 \\ - & 0.05 & - & 12.5 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & - & - & 375 \\ - & 0.05 & - & 12.5 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & - & - & 937.5 \\ - & 1 & - & 250 \\ - & - & 1 & 750 \end{array} \right)$$

Gauss-Jordan

Im dritten Schritt verwenden wir die dritte Zeile, um in den ersten beiden Zeilen das dritte Element zu eliminieren.

Wir ziehen die dritte Zeile ...

...1/3 mal von der ersten ab.

...1/6 mal von der zweiten ab.

Schritt 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ 0.20 & 0.15 & 0.10 & 300 \\ 0.10 & 0.10 & 0.375 & 400 \end{array} \right)$$

Schritt 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ - & 0.05 & 0.05 & 50 \\ - & 0.05 & 0.35 & 275 \end{array} \right)$$

Schritt 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ - & 0.05 & 0.05 & 50 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & - & 425 \\ - & 0.05 & - & 12.5 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & - & - & 375 \\ - & 0.05 & - & 12.5 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & - & - & 937.5 \\ - & 1 & - & 250 \\ - & - & 1 & 750 \end{array} \right)$$

Gauss-Jordan

Im vierten Schritt verwenden wir die zweite Zeile, um in der ersten Zeile das zweite Element zu eliminieren.

Wir ziehen die zweite Zeile vier mal von der ersten ab.

Schritt 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ 0.20 & 0.15 & 0.10 & 300 \\ 0.10 & 0.10 & 0.375 & 400 \end{array} \right)$$

Schritt 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ - & 0.05 & 0.05 & 50 \\ - & 0.05 & 0.35 & 275 \end{array} \right)$$

Schritt 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ - & 0.05 & 0.05 & 50 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & - & 425 \\ - & 0.05 & - & 12.5 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & - & - & 375 \\ - & 0.05 & - & 12.5 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & - & - & 937.5 \\ - & 1 & - & 250 \\ - & - & 1 & 750 \end{array} \right)$$

Gauss-Jordan

Im letzten Schritt multiplizieren wir alle Zeilen mit einem Faktor, der die Diagonalelemente zur 1 werden lässt.

Wir multiplizieren ...

...die erste Zeile mit 2.5

...die zweite Zeile mit 20

...die dritte Zeile mit 10/3

Schritt 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ 0.20 & 0.15 & 0.10 & 300 \\ 0.10 & 0.10 & 0.375 & 400 \end{array} \right)$$

Schritt 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ - & 0.05 & 0.05 & 50 \\ - & 0.05 & 0.35 & 275 \end{array} \right)$$

Schritt 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ - & 0.05 & 0.05 & 50 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & - & 425 \\ - & 0.05 & - & 12.5 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & - & - & 375 \\ - & 0.05 & - & 12.5 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & - & - & 937.5 \\ - & 1 & - & 250 \\ - & - & 1 & 750 \end{array} \right)$$

Gauss-Jordan

Jetzt können wir das Ergebnis rechts ablesen. Wir benötigen:

937.5kg vom TAL Borealis Complex
 250.0kg vom FBAS High Yield Pro
 750.0kg vom S&K Kali Aktiv

Schritt 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ 0.20 & 0.15 & 0.10 & 300 \\ 0.10 & 0.10 & 0.375 & 400 \end{array} \right)$$

Schritt 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ - & 0.05 & 0.05 & 50 \\ - & 0.05 & 0.35 & 275 \end{array} \right)$$

Schritt 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 500 \\ - & 0.05 & 0.05 & 50 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & 0.20 & - & 425 \\ - & 0.05 & - & 12.5 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.40 & - & - & 375 \\ - & 0.05 & - & 12.5 \\ - & - & 0.30 & 225 \end{array} \right)$$

Schritt 6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & - & - & 937.5 \\ - & 1 & - & 250 \\ - & - & 1 & 750 \end{array} \right)$$

Matrixinversion

Bei der Matrixinversion suchen wir eine Matrix M^{-1} für die gilt:

$$M M^{-1} = I$$

Die Einheitsmatrix I ist eine Matrix deren Diagonalelemente 1 und deren andere Elemente 0 sind.

Die Lösung unseres Gleichungssystems ist das Produkt aus M^{-1} und Zielvektor.

$$aM=b \Leftrightarrow a=M^{-1}b$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 1 & - & - \\ 0.20 & 0.15 & 0.10 & - & 1 & - \\ 0.10 & 0.10 & 0.375 & - & - & 1 \end{array} \right)$$



$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 1 & - & - \\ - & 0.05 & 0.05 & -1/2 & 1 & - \\ - & 0.05 & 0.35 & -1/4 & - & 1 \end{array} \right)$$



$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 1 & - & - \\ - & 0.05 & 0.05 & -1/2 & 1 & - \\ - & - & 0.30 & 1/4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Matrixinversion

Der Rechenweg wird wieder mit dem Gauss-Jordan-Algorithmus bestritten. Ziel ist es erneut auf der linken Seite die Einheitsmatrix zu erhalten!

Statt dem Zielvektor b wird der Matrix M die Einheitsmatrix M gegenübergestellt.

$$\begin{pmatrix} 0.40 & 0.20 & 0.10 & | & 1 & - & - \\ 0.20 & 0.15 & 0.10 & | & - & 1 & - \\ 0.10 & 0.10 & 0.375 & | & - & - & 1 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} 0.40 & 0.20 & 0.10 & | & 1 & - & - \\ - & 0.05 & 0.05 & | & -1/2 & 1 & - \\ - & 0.05 & 0.35 & | & -1/4 & - & 1 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} 0.40 & 0.20 & 0.10 & | & 1 & - & - \\ - & 0.05 & 0.05 & | & -1/2 & 1 & - \\ - & - & 0.30 & | & 1/4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrixinversion

Die Rechnung ist nicht schwierig, aber langwierig und anfällig für Fehler die auch die folgenden Rechenschritte beeinträchtigen.

Matrixinversion wird in der Praxis quasi immer von einer Software durchgeführt.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.40 & 0.20 & 0.10 & 1 & - & - \\ - & 0.05 & 0.05 & -1/2 & 1 & - \\ - & - & 0.30 & 1/4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$



$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.40 & 0.20 & - & 11/12 & 1/3 & -1/3 \\ - & 0.05 & - & -13/24 & 7/6 & -1/6 \\ - & - & 0.30 & 1/4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$



$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.40 & - & - & 37/12 & -13/3 & 1/3 \\ - & 0.05 & - & -13/24 & 7/6 & -1/6 \\ - & - & 0.30 & 1/4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Matrixinversion

Der Gauss-Jordan Algorithmus war übersichtlicher. Welchen Vorteil hat die Matrixinversion gegenüber dem Gauss-Jordan Algorithmus?

Der Vorteil ist, dass wir mit der Inverse die Mengen an Düngemitteln für beliebige Kombinationen von Nährstoffen berechnen können!

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.40 & - & - & 37/12 & -13/3 & 1/3 \\ - & 0.05 & - & -13/24 & 7/6 & -1/6 \\ - & - & 0.30 & 1/4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$



$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & - & - & 185/24 & -65/6 & 5/6 \\ - & 1 & - & -65/6 & 70/3 & -10/3 \\ - & - & 1 & 5/6 & -10/3 & 10/3 \end{array} \right)$$

$$a = M^{-1}b = \begin{pmatrix} 73/24 & -25/6 & 1/6 \\ -13/24 & 7/6 & -1/6 \\ 1/4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 937.5 \\ 250.0 \\ 750.0 \end{pmatrix}$$

Zur Düngung eines Ackers benötigen wir die folgende Kombination an Nährstoffen:

110kg Stickstoff
180kg Phosphat
130kg Kaliumoxid

Zur Verfügung stehen uns die rechts gezeigten Düngemittel. Stelle das lineare Gleichungssystem in Matrixschreibweise dar und löse es mit dem Gauss-Jordan-Algorithmus oder durch Matrixinversion.



Schritt 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.10 & 0.10 & 0.20 & 110 \\ 0.20 & 0.40 & 0.20 & 180 \\ 0.30 & 0.20 & 0.15 & 130 \end{array} \right)$$

Schritt 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.10 & 0.10 & - & 30 \\ - & 0.20 & - & 40 \\ - & - & 1 & 400 \end{array} \right)$$

Schritt 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.10 & 0.10 & 0.20 & 110 \\ - & 0.20 & -0.20 & -40 \\ - & -0.10 & -0.45 & -200 \end{array} \right)$$

Schritt 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.10 & - & - & 10 \\ - & 0.20 & - & 40 \\ - & - & 1 & 400 \end{array} \right)$$

Schritt 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.10 & 0.10 & 0.20 & 110 \\ - & 0.20 & -0.20 & -40 \\ - & - & -0.55 & -220 \end{array} \right)$$

Schritt 6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & - & - & 100 \\ - & 1 & - & 200 \\ - & - & 1 & 400 \end{array} \right)$$

Lineare Optimierung

Der Umgang mit Vektoren und Matrizen und das Verständnis von linearen LGS bildet die Basis für die lineare Optimierung.

Ein mögliches lineares Optimierungsproblem:

Wir müssen mit unserer Düngemittelkombination mindestens bestimmte Nährstoffmengen erreichen ...

...und wollen dabei möglichst geringe Kosten haben.



Lineare Optimierung

Die mathematische Formulierung wäre:

$$\min \quad m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3$$

$$\text{s.t.} \quad m_N \leq m_1 c_{N,1} + m_2 c_{N,2} + m_3 c_{N,3}$$

$$\text{s.t.} \quad m_{P_{205}} \leq m_1 c_{P_{205},1} + m_2 c_{P_{205},2} + m_3 c_{P_{205},3}$$

$$\text{s.t.} \quad m_{K_{20}} \leq m_1 c_{K_{20},1} + m_2 c_{K_{20},2} + m_3 c_{K_{20},3}$$



Lineare Optimierung

In der Praxis werden Rechnungen dieser Art oft unter dem Stichwort "Operations Research" gemacht.

Eine häufige Anwendung ist die Produktionsplanung bzw. die AV in der Industrie. In der Landwirtschaft sind Dünger- und Futtermittelmischungen ein Beispiel.

Der Rechenaufwand ist dabei jedoch so hoch, dass wir eine Software zur Hilfe nehmen sollten, z. B. AMPL/GMPL oder R.



Investition & Finanzierung

In den Kapiteln Investition und Finanzierung legen wir das mathematische Fundament für diverse fortgeschrittene BWL Vorlesungen.

Wir lernen verschiedene Anlageklassen und Kreditarten kennen und streifen auch das bisher vernachlässigte Thema Summen und Reihen



Investition

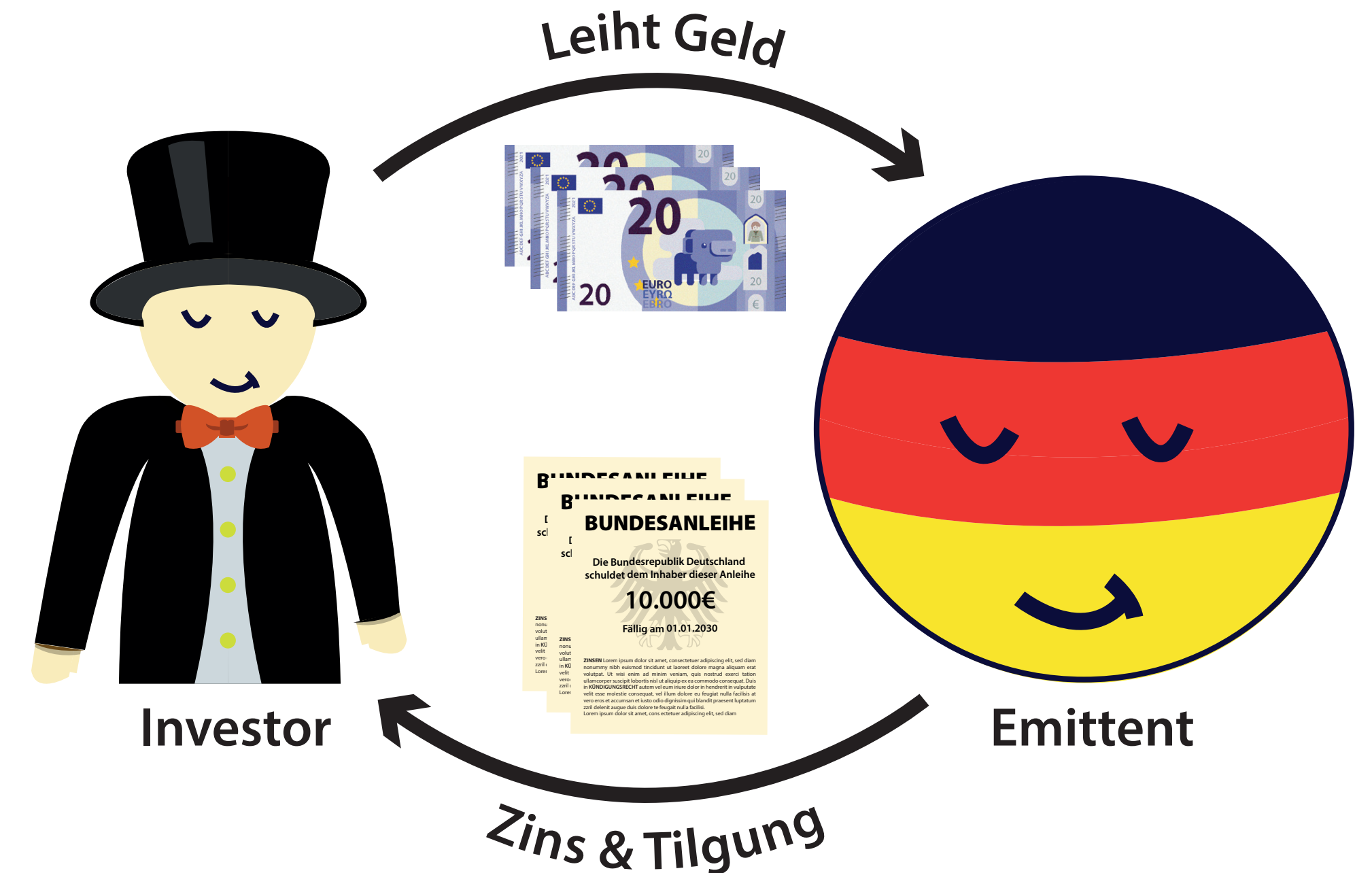
- Zinsrechnung
 - Kontinuierliche Verzinsung
 - Rentenbarwerte
 - Ewige Rente
 - Annuitäten (Sparpläne)
 - Termingeschäfte
 - Optionen
 - Devisen
-

Einfache Zinsrechnung

Als Sparer oder Investor begegnet uns die einfache Zinsrechnung in Form von endfälligen Anleihen.

Anleihen werden von Staaten und Unternehmen ausgegeben, um Fremdkapital aufzunehmen.

Der Zeichner der Anleihe leiht dem Emittenten der Anleihe Geld und bekommt dafür eine Inhaberschuldverschreibung, die ihm Zinszahlungen und Rückzahlung zusichert.



Einfache Zinsrechnung

Früher wurden Anleihen tatsächlich auf einen Papierbogen zum Ausschneiden gedruckt.

Die ausgeschnittenen **Coupons** konnte man gegen die Zinszahlung einlösen.

Den ausgeschnittenen **Talon** konnte man gegen die Rückzahlung des geliehenen Geldbetrags einlösen oder direkt zum Kauf einer neuen Anleihe verwenden.



Rechts sehen wir eine fiktive Anleihe mit den Eigenschaften:

Wir leihen der Bundesrepublik 10000€ und bekommen fünf Jahre lang 8% Zinsen auf diesen Betrag. Danach erhalten wir den geliehenen Betrag zurück.

<p>OLKE DEM DEUTSCHEN VOLKE DEM DEUTSCHEN VOLKE DEM DEUTSC</p> <p>ANLEIHE DER BUNDESREPUBLIK VON 2022</p> <p>Jährliche Zinszahlung am 1. Januar über 8.00% des Nennwerts von 10.000€</p> <p>800€ Achthundert Euro</p> <p>Schuldverschreibung über 10.000€ 2023</p> <p>HEN VOLKE DEM DEUTSCHEN V</p>	<p>OLKE DEM DEUTSCHEN VOLKE DEM DEUTSCHEN VOLKE DEM DEUTSC</p> <p>ANLEIHE DER BUNDESREPUBLIK VON 2022</p> <p>Jährliche Zinszahlung am 1. Januar über 8.00% des Nennwerts von 10.000€</p> <p>800€ Achthundert Euro</p> <p>Schuldverschreibung über 10.000€ 2024</p> <p>HEN VOLKE DEM DEUTSCHEN V</p>
<p>OLKE DEM DEUTSCHEN VOLKE DEM DEUTSCHEN VOLKE DEM DEUTSC</p> <p>ANLEIHE DER BUNDESREPUBLIK VON 2022</p> <p>Jährliche Zinszahlung am 1. Januar über 8.00% des Nennwerts von 10.000€</p> <p>800€ Achthundert Euro</p> <p>Schuldverschreibung über 10.000€ 2025</p> <p>HEN VOLKE DEM DEUTSCHEN V</p>	<p>OLKE DEM DEUTSCHEN VOLKE DEM DEUTSCHEN VOLKE DEM DEUTSC</p> <p>ANLEIHE DER BUNDESREPUBLIK VON 2022</p> <p>Jährliche Zinszahlung am 1. Januar über 8.00% des Nennwerts von 10.000€</p> <p>800€ Achthundert Euro</p> <p>Schuldverschreibung über 10.000€ 2026</p> <p>HEN VOLKE DEM DEUTSCHEN V</p>
<p>OLKE DEM DEUTSCHEN VOLKE DEM DEUTSCHEN VOLKE DEM DEUTSC</p> <p>ANLEIHE DER BUNDESREPUBLIK VON 2022</p> <p>Jährliche Zinszahlung am 1. Januar über 8.00% des Nennwerts von 10.000€</p> <p>800€ Achthundert Euro</p> <p>Schuldverschreibung über 10.000€ 2027</p> <p>HEN VOLKE DEM DEUTSCHEN V</p>	<p>OLKE DEM DEUTSCHEN VOLKE DEM DEUTSCHEN VOLKE DEM DEUTSC</p> <p>ANLEIHE DER BUNDESREPUBLIK VON 2022</p> <p>Jährliche Zinszahlung am 1. Januar über 8.00% des Nennwerts von 10.000€</p> <p>Talon Zehntausend Euro</p> <p>Schuldverschreibung über 10.000€ 2027</p> <p>HEN VOLKE DEM DEUTSCHEN V</p>

Einfache Zinsrechnung

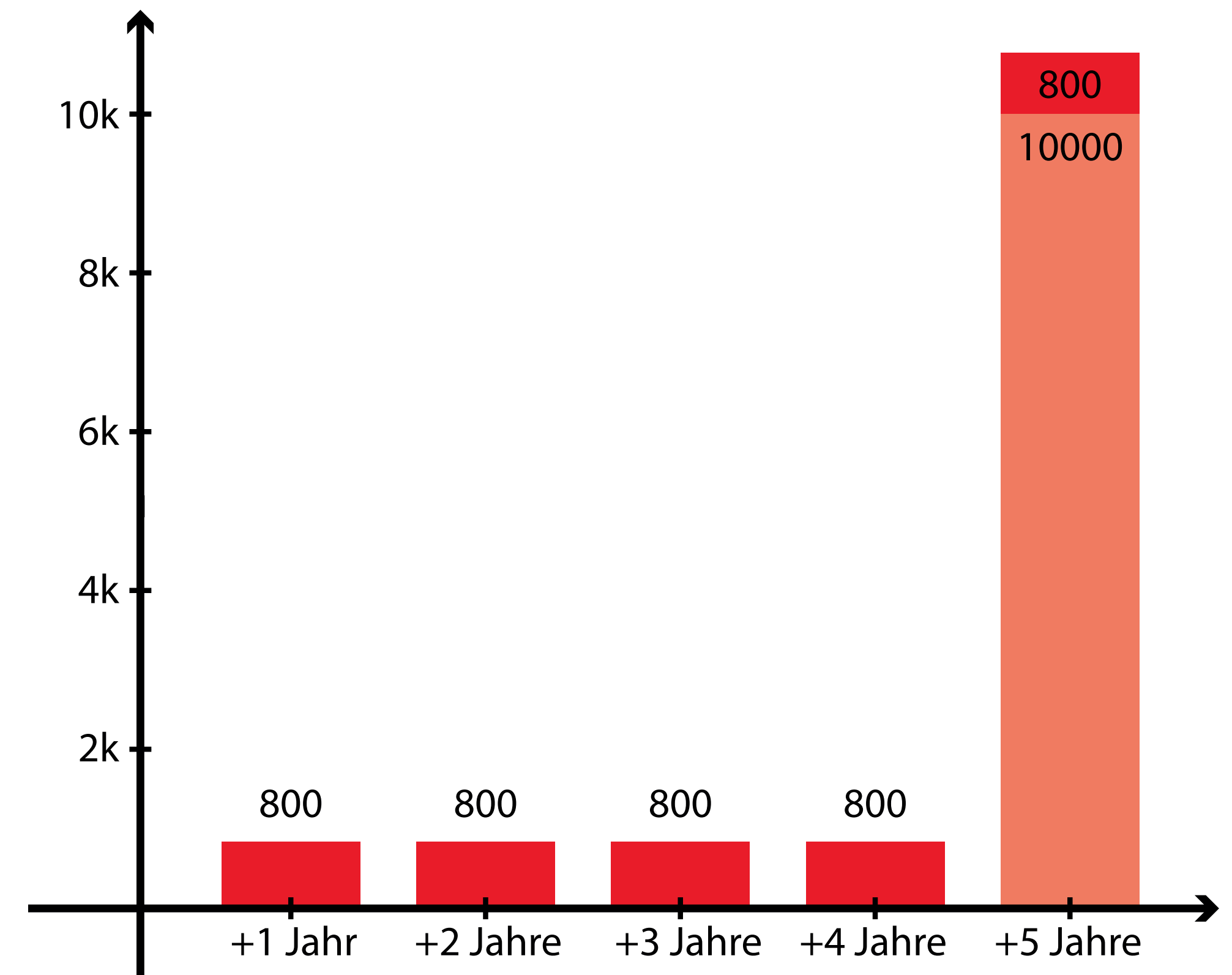
Wie hoch ist unser Endkapital C_n wenn wir ein Anfangskapital von $C_0 = 10.000\text{€}$ in diese Anleihe investieren?

Wir erhalten 5 Coupons zu je 800€ und am Ende die Rückzahlung des Nennwerts von 10000€. Insgesamt also $C_n = 14.000\text{€}$.

Allgemein gilt die folgende Formel mit Zinssatz i und Laufzeit n :

$$C_n = C_0 (1 + i \cdot n)$$

Cashflows aus Anleihe



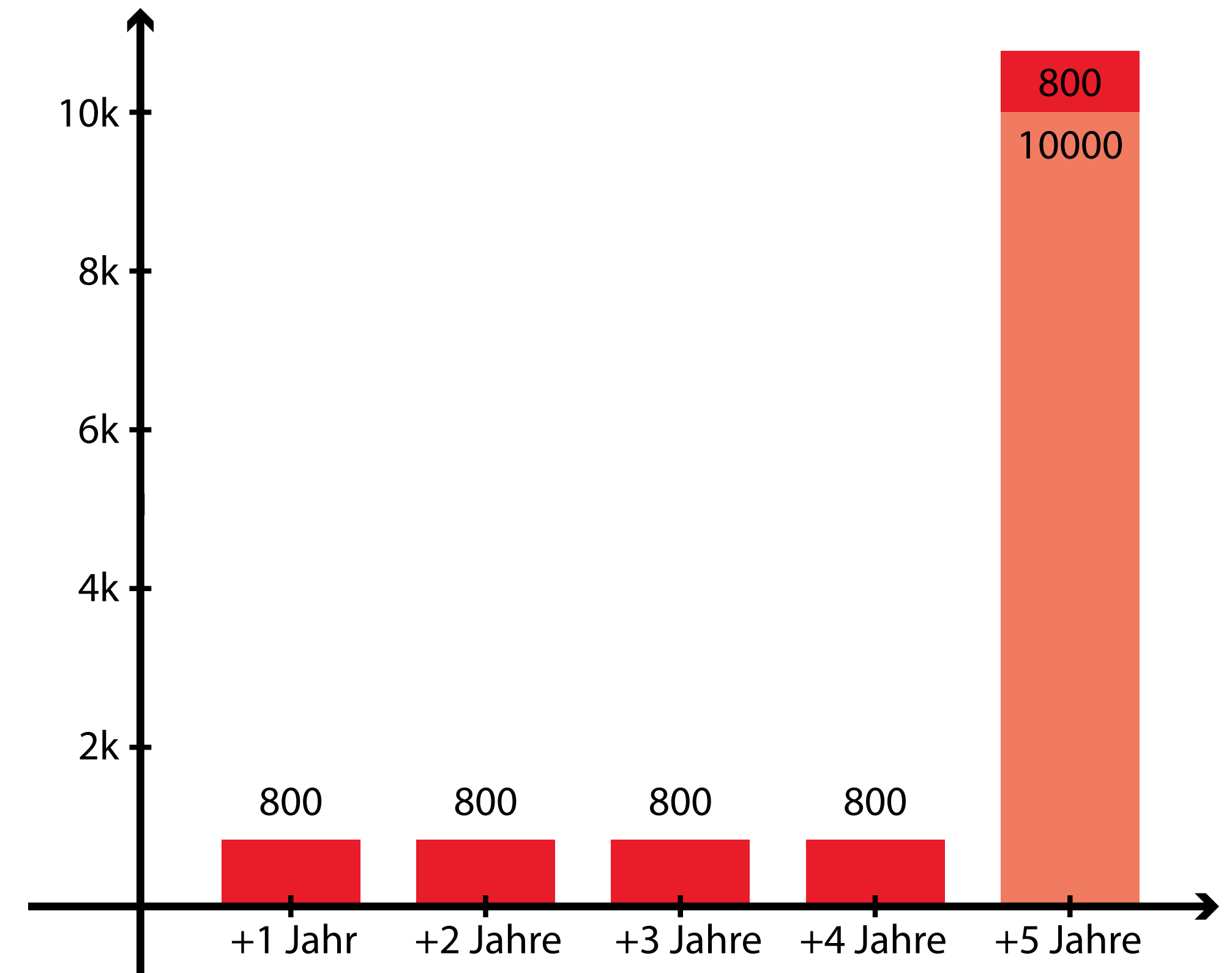
Einfache Zinsrechnung

Mit dieser Formel können wir das Endkapital in unserem Beispiel berechnen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}C_n &= C_0 (1 + i \cdot n) \\&= 10000\text{€} \cdot (1 + 0.08 \cdot 5) \\&= 10000\text{€} \cdot (1 + 0.4) \\&= 14000\text{€}\end{aligned}$$

Entspricht die Anleihe also 1:1 einer 5 jährigen Festgeldanlage mit 8% Zinsen p. a. (per annum, lt. pro Jahr)?

Cashflows aus Anleihe



Einfache Zinsrechnung

Festgeld und Anleihen sind grundverschiedene Anlagen:

Allgemein unterschiedliche Bestimmungen bzgl. Emission, Handel, Haltung und Besteuerung usw.

Börsengehandelte Anleihen können jederzeit gehandelt werden, der Kurswert entspricht nicht immer dem Nennwert.

Bei Anleihen wird die Zinszahlung ausbezahlt, bei Festgeld verbleibt die Zinszahlung in den meisten Fällen in der Anlage und wird weiter verzinst.



Spaß

Festgeld mit 8% auf 5 Jahre

Jetzt Termin mit ihrem „persönlichen Berater“ bei ihrer Spaßkassenfiliale vereinbaren und kasrieren!

Wenns ins Geld geht Spaßkasse

Zinseszinsrechnung

Statt einer Anleihe betrachten wir nun ein Festgeldangebot mit den folgenden Konditionen:

Laufzeit 5 Jahre
Zinssatz 8.00% p. a.

Als Anlagebetrag wählen wir erneut 10000€.



Spaß

Festgeld mit 8% auf 5 Jahre

Jetzt Termin mit ihrem „persönlichen Berater“ bei ihrer Spaßkassenfiliale vereinbaren und kassieren!

Wenns ins Geld geht Spaßkasse

Zinseszinsrechnung

Wie hoch ist unser Endkapital C_n wenn wir ein Anfangskapital von $C_0 = 10.000\text{€}$ in diese Anleihe investieren?

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n)$$

Die einfache Zinsrechnung funktioniert nicht mehr, da wir auch Zinseszinsen haben.

Bereits im zweiten Jahr erhalte ich nicht nur Zinsen auf C_0 , sondern auch auf die Zinszahlung im ersten Jahr.



Spaß

Festgeld mit 8% auf 5 Jahre

Jetzt Termin mit ihrem „persönlichen Berater“ bei ihrer Spaßkassenfiliale vereinbaren und kassieren!

Wenns ins Geld geht Spaßkasse

Zinseszinsrechnung

Im ersten Jahr stimmt die einfache Zinsrechnung also noch.

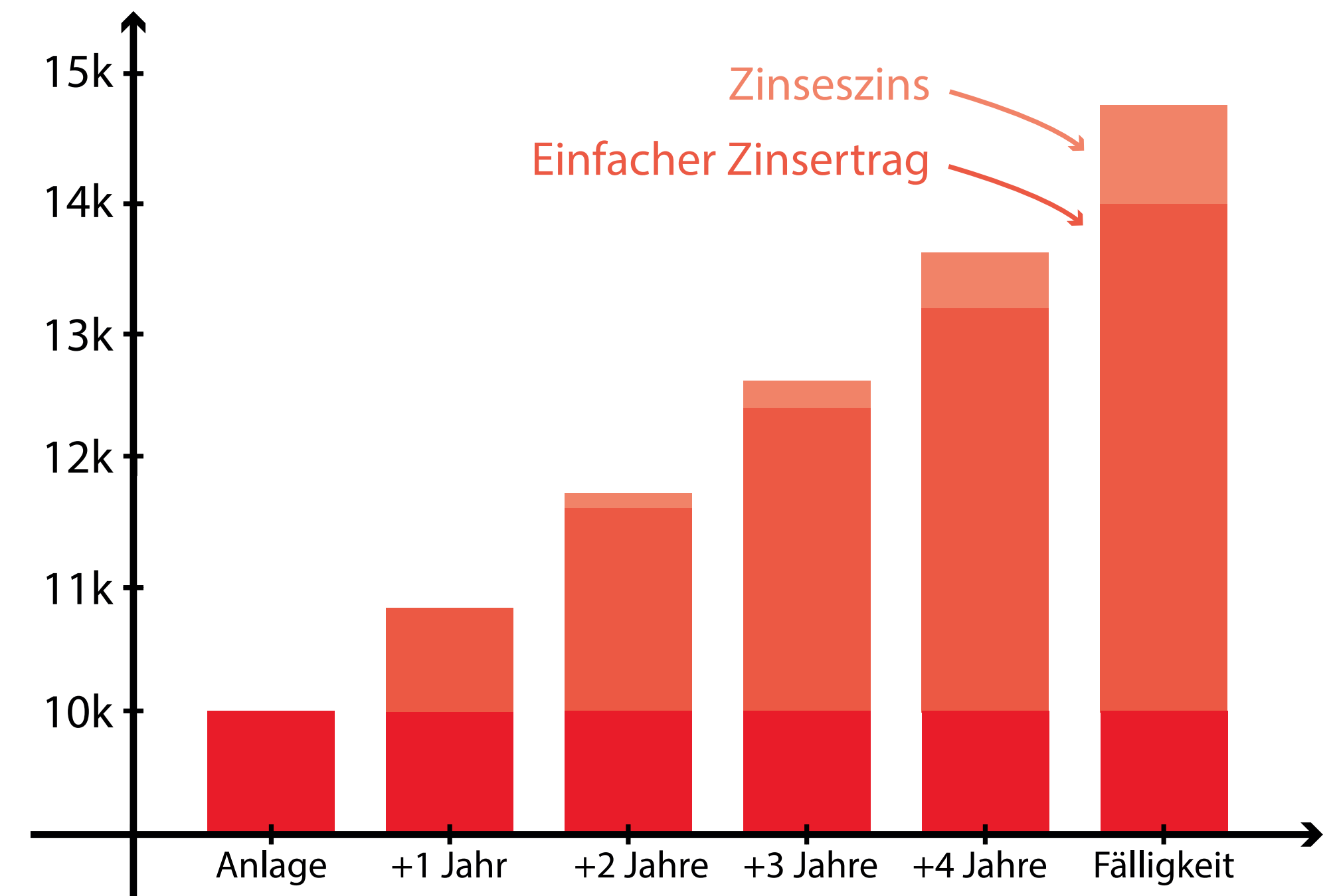
$$C_1 = C_0 (1 + i)$$

Im zweiten Jahr wird der Zins auf C_1 berechnet:

$$C_2 = C_1 (1 + i) = C_0 (1 + i) (1 + i) = C_0 (1 + i)^2$$

Im dritten Jahr wird der Zins auf C_2 berechnet:

$$C_3 = C_2 (1 + i) = C_0 (1 + i) (1 + i) (1 + i) = C_0 (1 + i)^3$$



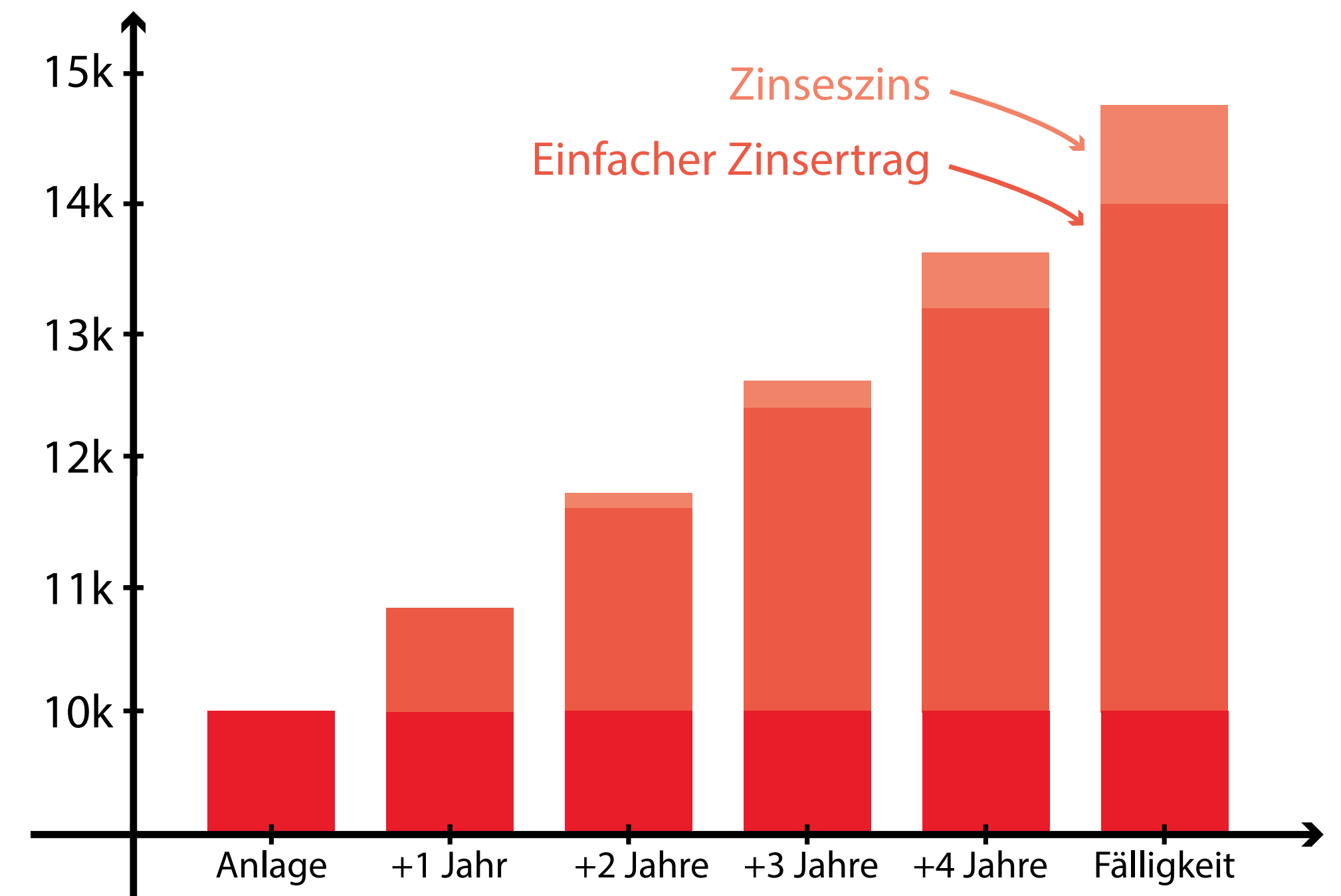
Zinseszinsrechnung

Wir erkennen ein Muster! Nach n Jahren erhalten wir:

$$C_n = C_{n-1} (1 + i) = C_0 (1 + i)^n$$

In unserem Beispiel:

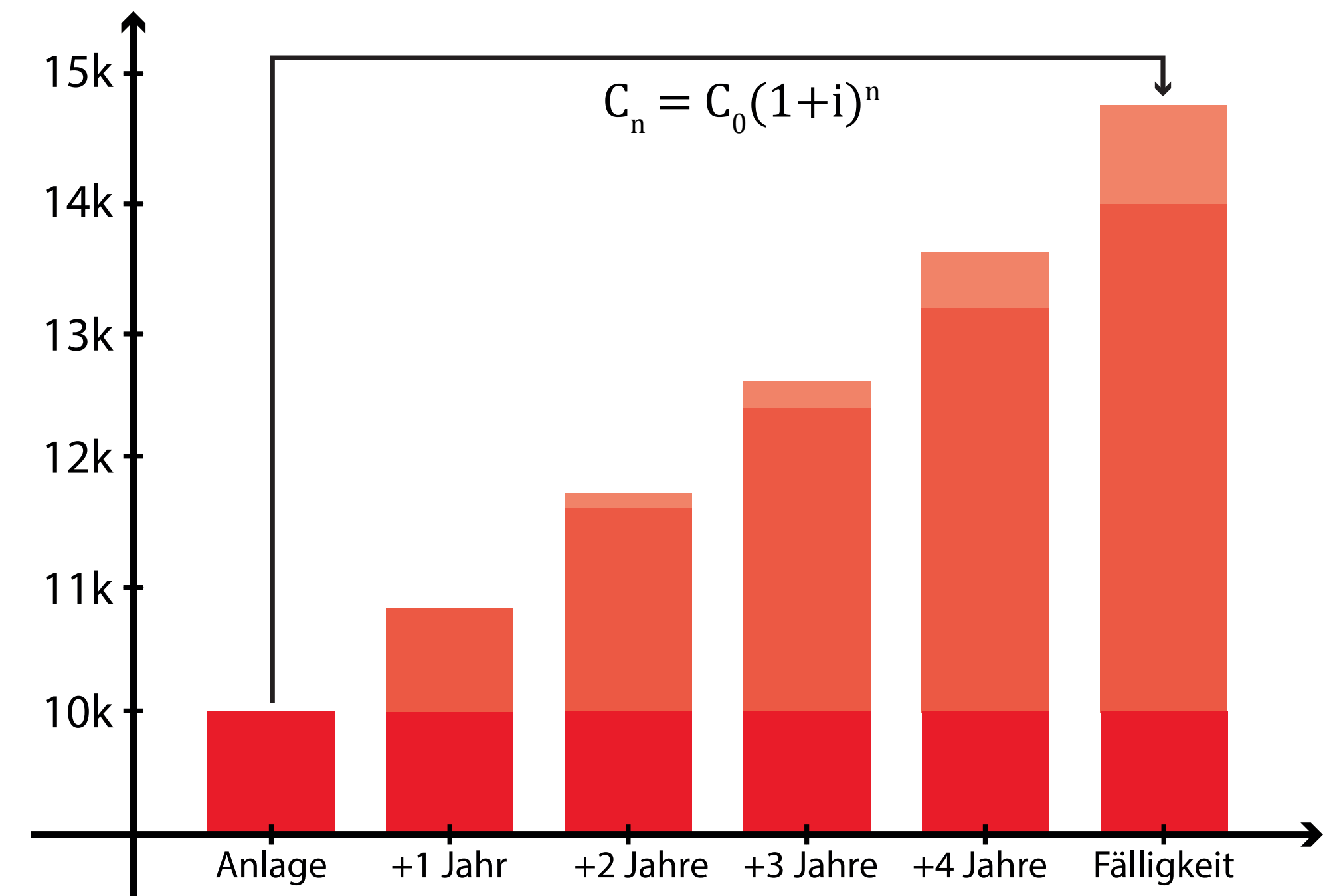
$$C_5 = 10000\text{€} (1 + 0.08)^5 = 14693.28\text{€}$$



Zinseszinsrechnung

Diese Gleichung verbindet Anfangs- und Endkapital wenn wir eine Anlage mit Zinseszinsen haben:

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$



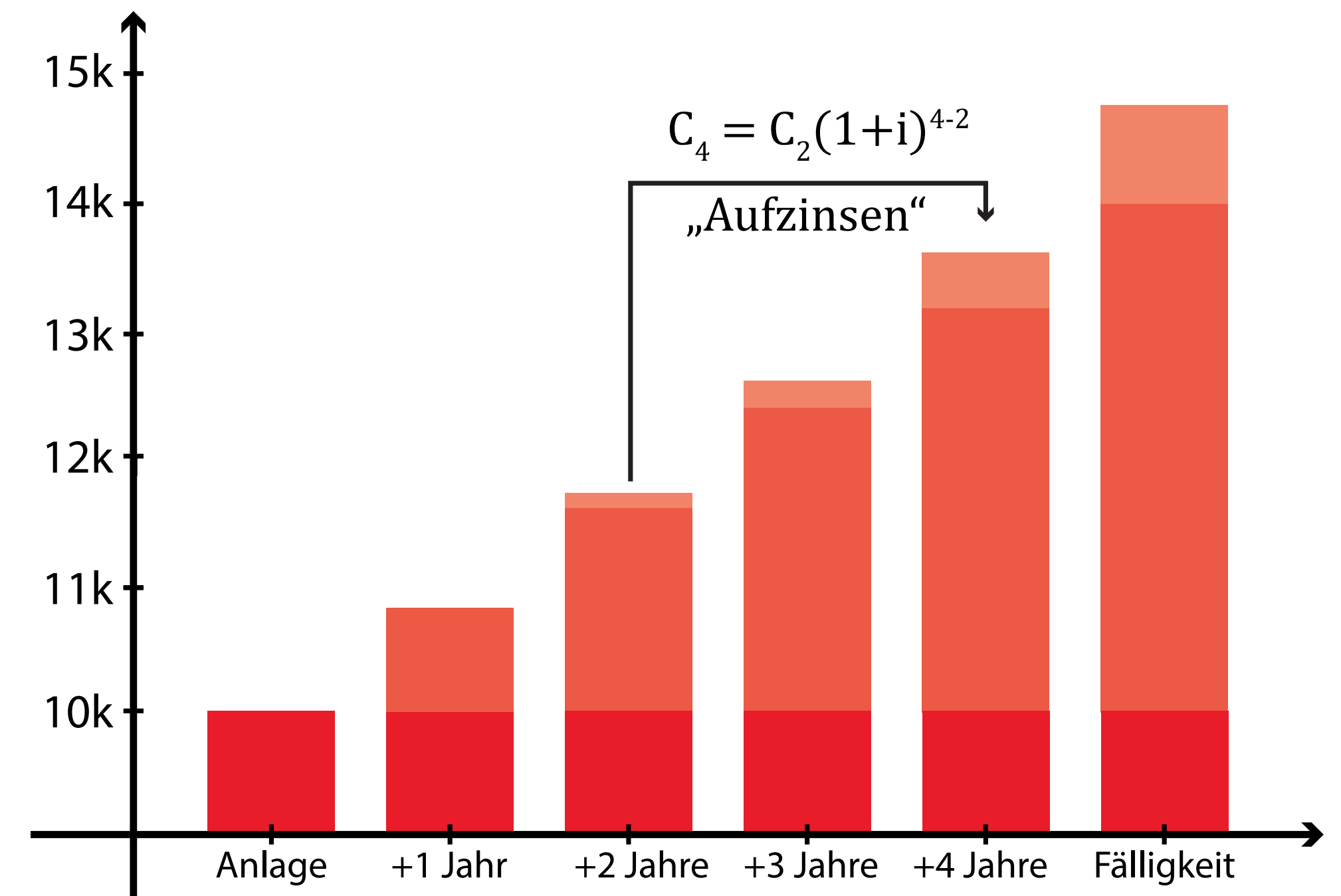
Zinseszinsrechnung

Diese Gleichung verbindet Anfangs- und Endkapital wenn wir eine Anlage mit Zinseszinsen haben:

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$

Innerhalb der Anlagedauer können wir mit folgender Formel auf einen beliebigen Zeitpunkt aufzinsen und abzinsen:

$$C_{t2} = C_{t1} (1+i)^{t2-t1}$$



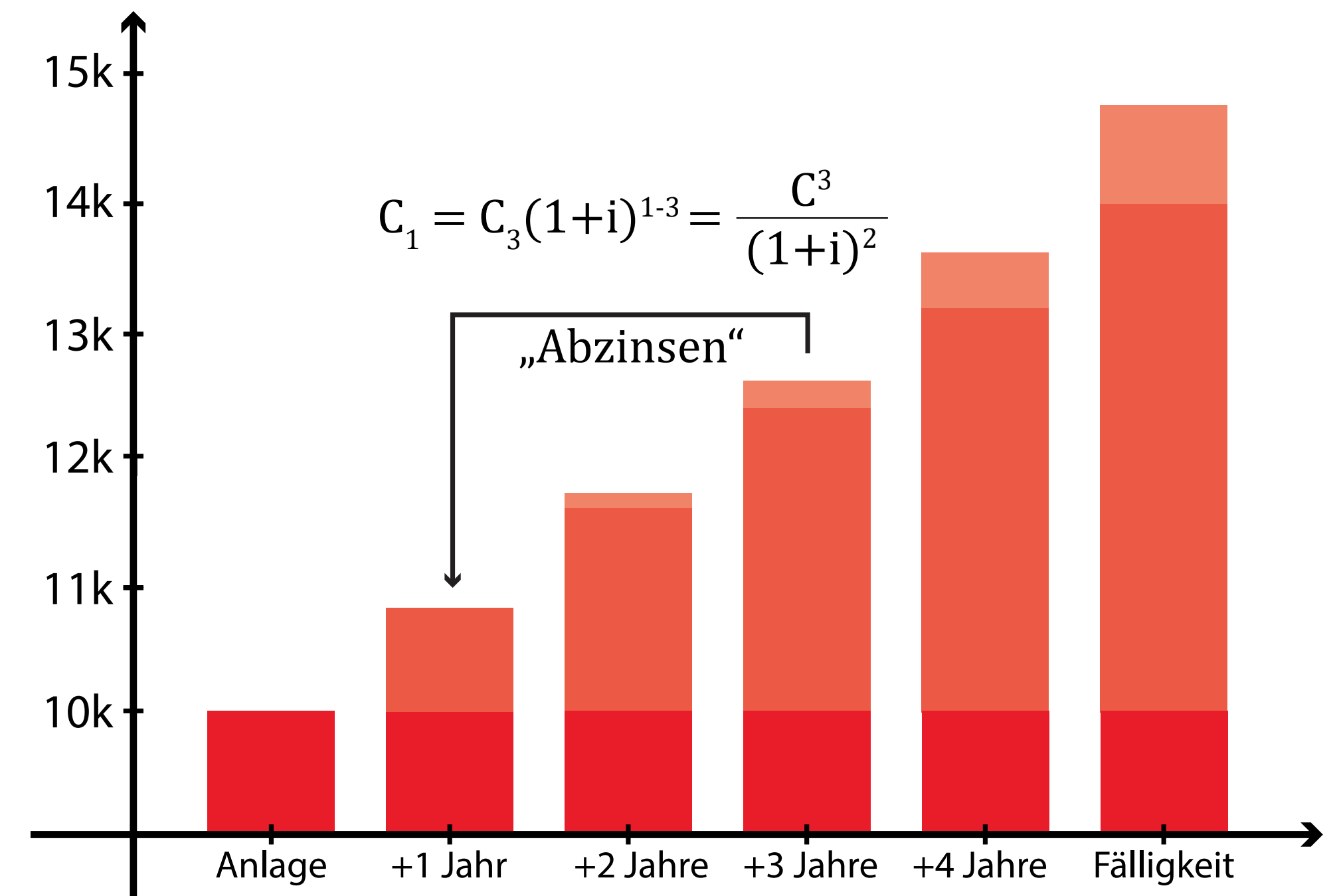
Zinseszinsrechnung

Diese Gleichung verbindet Anfangs- und Endkapital wenn wir eine Anlage mit Zinseszinsen haben:

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

Innerhalb der Anlagedauer können wir mit folgender Formel auf einen beliebigen Zeitpunkt aufzinsen und abzinsen:

$$C_{t2} = C_{t1} (1 + i)^{t2-t1}$$



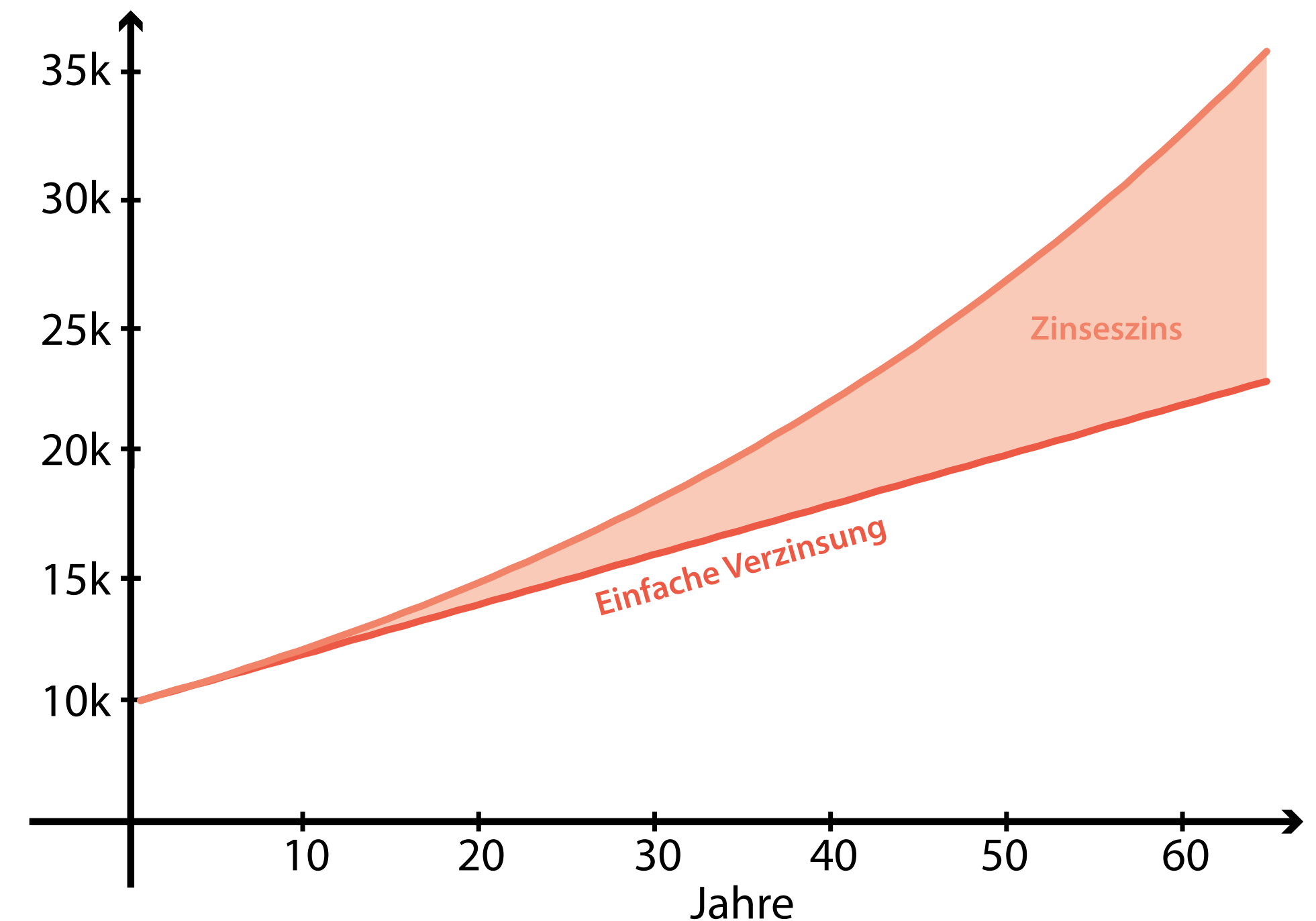
Zinseszinsrechnung

Der Zinseszinsertrag ist durch folgende Differenz gegeben:

$$C_0 (1+i)^n - C_0 (1+i \cdot n)$$

Die Differenz ist für kleine Zinssätze und kurze Zeiträume vernachlässigbar ...

...kann jedoch für hohe Zinssätze und/oder lange Zeiträume immens groß werden!



Zinseszinsrechnung

Wie lange dauert es, bis sich das eingesetzte Kapital bei einem Zins von $i=2.00\%$ verdoppelt? Bei einfacher Verzinsung:

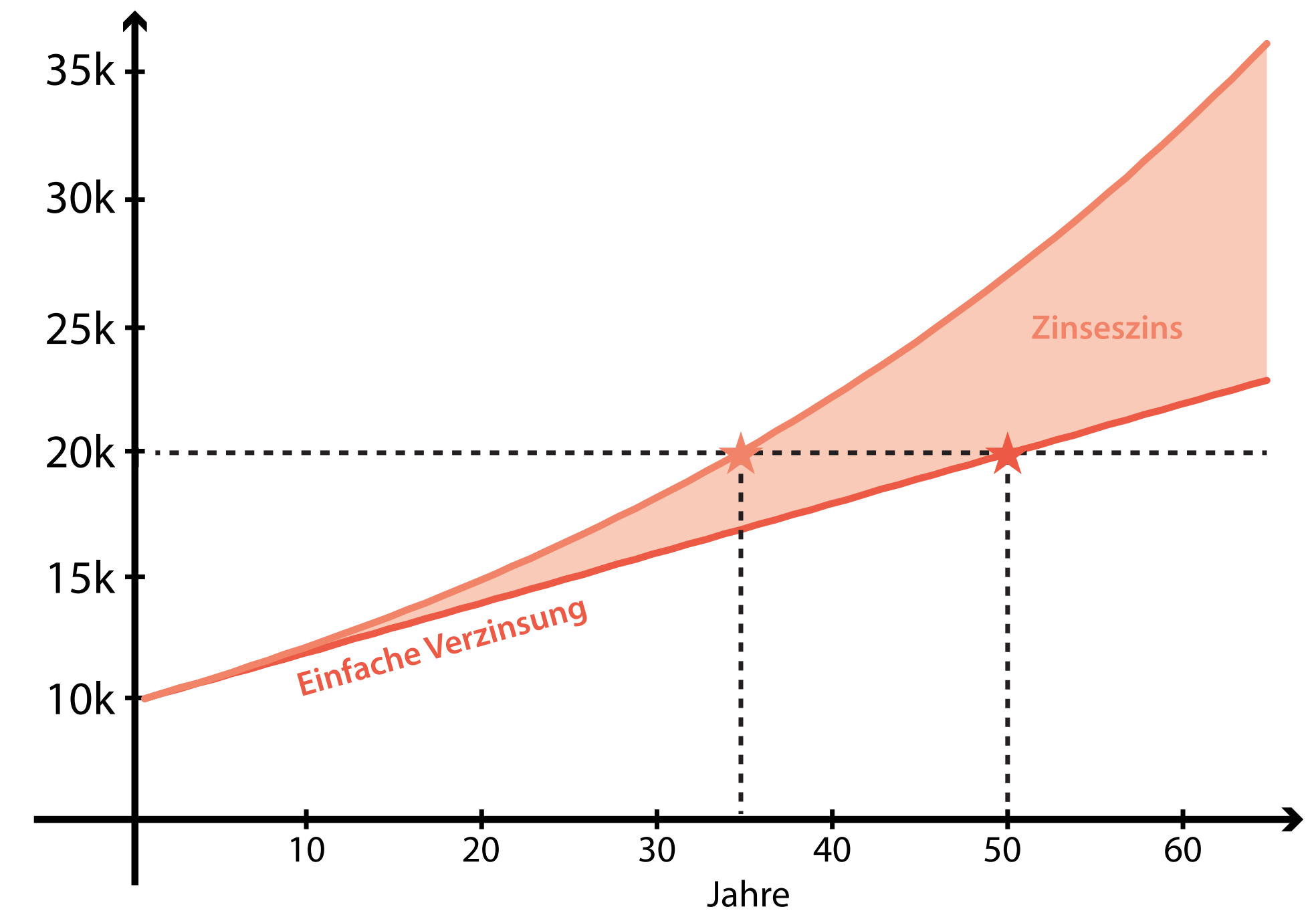
$$1 + i \cdot n = 2 \quad \text{mit } i = 0.02$$

Wir lösen nach n auf und erhalten 50 Jahre:

$$1 + 0.02n = 2$$

$$\Leftrightarrow 0.02n = 1$$

$$\Leftrightarrow n = 50$$



Zinseszinsrechnung

Mit Zinseszins dagegen:

$$(1 + i)^n = 2 \text{ mit } i = 0.02$$

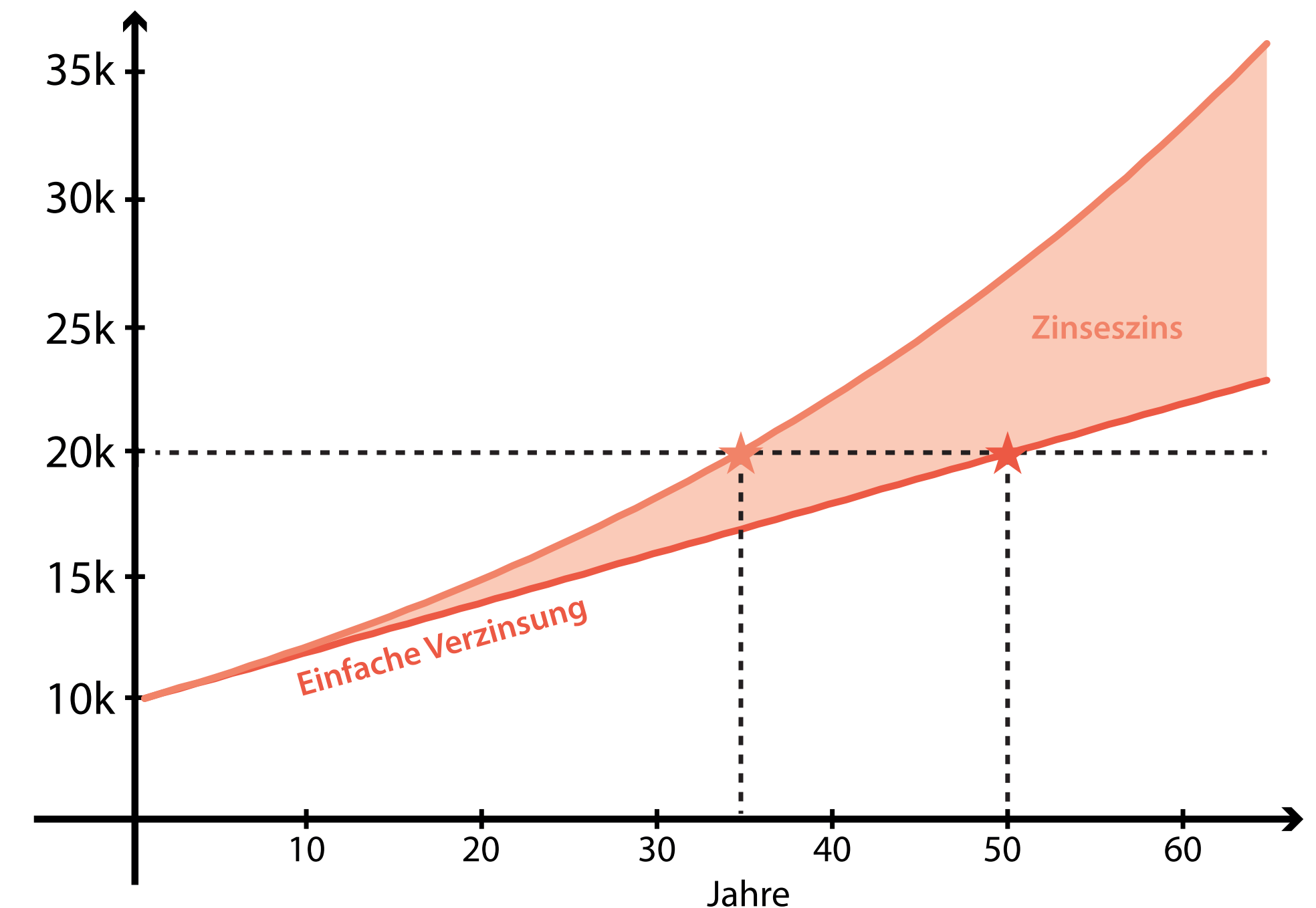
Wir lösen nach n auf und erhalten ca. 35 Jahre.

$$1.02^n = 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(1.02^n) = \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln(1.02) = \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow n = \ln(2) / \ln(1.02)$$



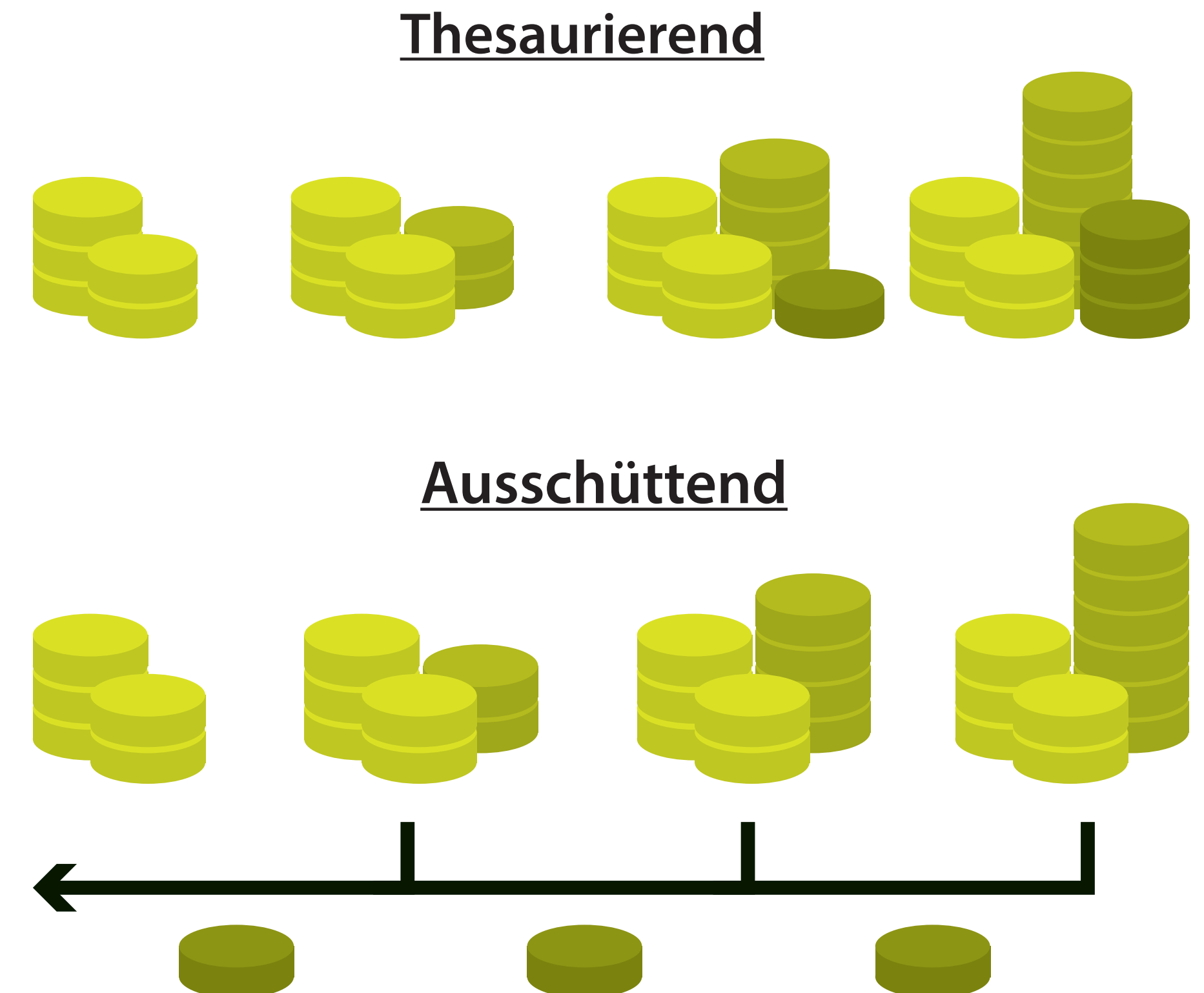
Zinseszinsrechnung

Den Zinseszinseffekt gibt es auch bei Fonds & ETFs. Bei diesen wird in ausschüttend und thesaurierend unterschieden.

Ausschüttend bedeutet, dass die Erträge des Fonds an die Anteilseigner ausgeschüttet werden.

Thesaurierend bedeutet, dass die Erträge des Fonds automatisch reinvestiert werden.

Tradeoff: Regelmäßige Cashflows vs. Zinseszinseffekt



Zinseszinsrechnung

- a) Sie zeichnen eine Anleihe über 25000€ zum Nennwert. Die Anleihe zahlt einen jährlichen Coupon von 5% und hat eine Laufzeit von 10 Jahren. Berechnen Sie das Endkapital.
- b) Sie zeichnen eine Anleihe über 25000€ zum Nennwert. Wie hoch muss der Coupon sein, damit sie am Ende der 10 Jahre Laufzeit ein Endkapital von 30000€ haben?
- c) Wie lange müssen Sie 8000€ als Festgeldanlage mit 4% jährlicher Verzinsung anlegen, damit sie ein Endkapital von 10000€ erreichen?
- d) Wie hoch müsste die Verzinsung einer 7 jährigen Festgeldanlage sein, damit sie ihre Anlage nach den 7 Jahren verdoppelt haben?

Zinseszinsrechnung

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad C_n &= C_0 (1 + i \cdot n) \\ &= 25000\text{€} (1 + 0.05 \cdot 10) \\ &= 37500\text{€} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad C_n &= C_0 (1 + i \cdot n) \\ &25000\text{€} (1 + i \cdot 10) \stackrel{!}{=} 30000\text{€} \\ \Leftrightarrow 25000\text{€} + 250000\text{€} \cdot i &= 30000\text{€} \\ \Leftrightarrow 250000\text{€} \cdot i &= 5000\text{€} \\ \Rightarrow i &= 2\% \end{aligned}$$

Zinseszinsrechnung

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad C_n &= C_0 (1+i)^n \\ 8000\text{€} \cdot 1.04^n &\stackrel{!}{=} 10000\text{€} \\ \Leftrightarrow 1.04^n &= 1.25 \\ \Leftrightarrow n \ln(1.04) &= \ln(1.25) \\ \Leftrightarrow n &= \frac{\ln(1.25)}{\ln(1.04)} = 5.69 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad C_n &= C_0 (1+i)^n \\ 1\text{€} \cdot (1+i)^7 &\stackrel{!}{=} 2\text{€} \\ \Leftrightarrow (1+i)^7 &= 2 \\ \Leftrightarrow 1+i &= 2^{1/7} \\ \Leftrightarrow i &= 2^{1/7} - 1 = 10.4\% \end{aligned}$$

Einfache Zinsrechnung

Zinseszinsrechnung

Gesucht: Endkapital

$$C_n = C_0 (1 + i \cdot n)$$

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

Gesucht: Startkapital

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i \cdot n)}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i)^n}$$

Gesucht: Zinssatz

$$i = \frac{1}{n} \left[\frac{C_n}{C_0} - 1 \right]$$

$$i = \left[\frac{C_n}{C_0} \right]^{\frac{1}{n}} - 1$$

Gesucht: Laufzeit

$$n = \frac{1}{i} \left[\frac{C_n}{C_0} - 1 \right]$$

$$n = \frac{\ln (C_n / C_0)}{\ln (1 + i)}$$

Unterjährige Verzinsung

In unseren bisherigen Beispielen nehmen wir stets eine Zinszahlung pro Jahr an.

Es gibt jedoch viele Anlageprodukte, bei denen mehrere Zinszahlungen pro Jahr vorgesehen sind. Gängige Taktungen sind:

Halbjährlich
Quartalsweise
Monatlich



Unterjährige Verzinsung

Bei Anlagen ohne Zinseszins, wie z. B. unsere Anleihen, ist die Umrechnung dieser unterjährigen Zinsen denkbar einfach.

$$i_b = i_a \frac{\text{Länge Zeitraum } b}{\text{Länge Zeitraum } a}$$

Eine quartalsweiser Coupon von $i_q = 1.25\%$ entspricht:

$$\begin{aligned} i &= i_q \cdot \frac{\text{Länge Jahr}}{\text{Länge Quartal}} \\ &= 0.0125 \cdot 4 \\ &= 0.05 = 5\% \end{aligned}$$



Unterjährliche Verzinsung

Bei Anlagen mit Zinseszins funktioniert diese Gleichung nicht.

~~$$i_b = i_a \frac{\text{Länge Zeitraum } b}{\text{Länge Zeitraum } a}$$~~

Mit einer quartalsweisen Verzinsung von $i_q = 1.25\%$ erhalten wir ein höheres Endkapital als mit einer jährlichen Verzinsung zu 5%

$$\begin{aligned}
 C_n &= C_0 (1+i)^n \\
 &= 10000\text{€} \cdot 1.0125^4 \\
 &= 10509.45\text{€}
 \end{aligned}$$



Unterjährige Verzinsung

Die Umrechnungsformel für Verzinsung mit Zinseszins ist:

$$1+i_b = \left[1+i_a \right]^{\frac{\text{Länge Zeitraum b}}{\text{Länge Zeitraum a}}}$$

Für unser Beispiel erhalten wir:

$$1+i_b = \left[1+0.0125 \right]^{\frac{4 \text{ Quartale}}{1 \text{ Quartal}}} = 1.05094$$
$$\Leftrightarrow i_b = 5.094\%$$



Unterjährliche Verzinsung

Speziell für die Umrechnung zum **effektiven Jahreszins** können wir folgende Formel verwenden. Das n steht in diesem Fall für die Anzahl an Zinsterminen pro Jahr!

$$i_{\text{eff}} = \left[1 + i_{\text{nom}} \right]^n - 1$$

Für unser Beispiel erhalten wir:

$$i_{\text{eff}} = \left[1 + 0.0125 \right]^4 = 1.05094$$



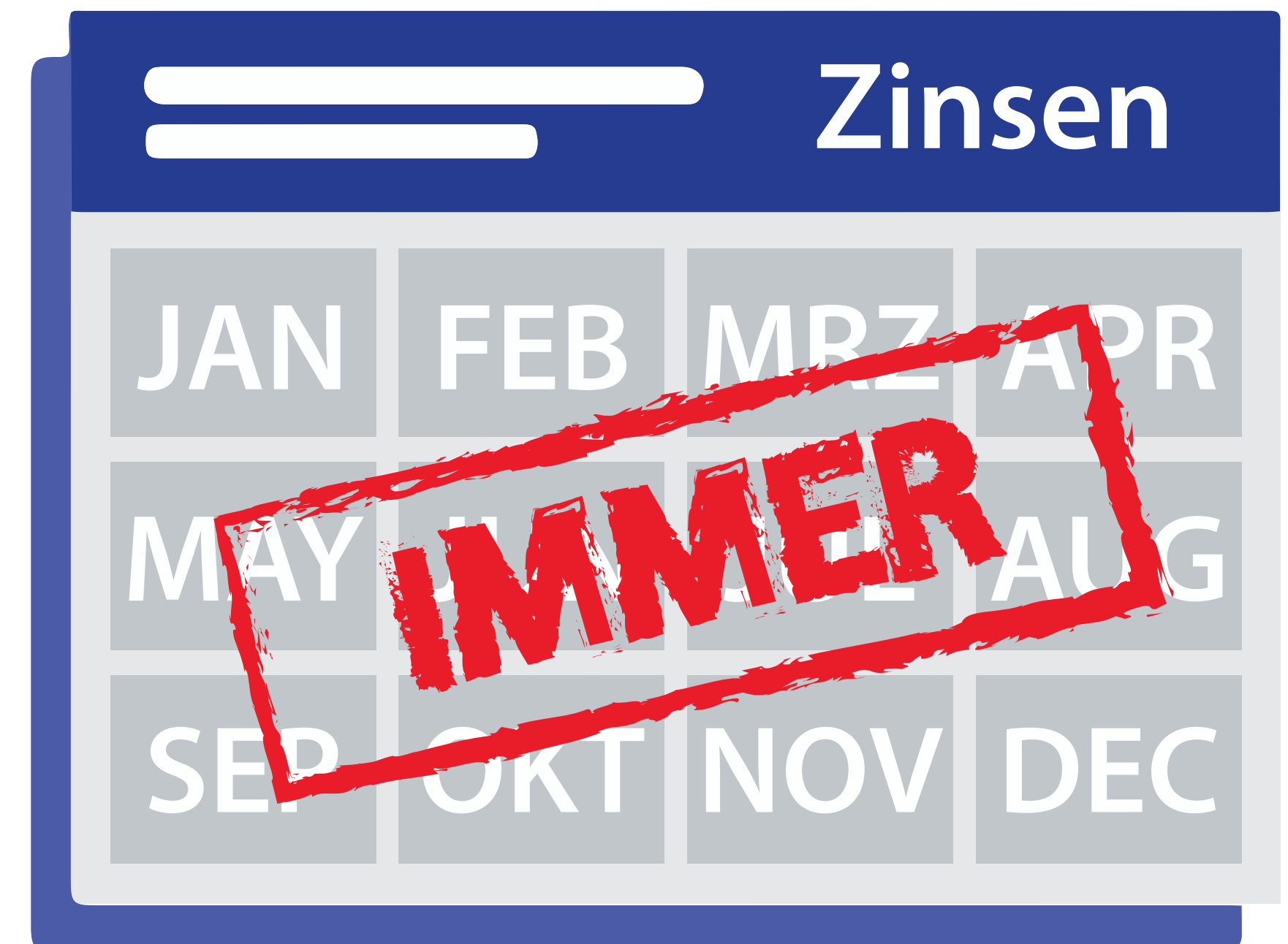
Kontinuierliche Verzinsung

Die kontinuierliche Verzinsung ist ein Sonderfall, bei der es keine festen Zinsintervalle gibt.

Die Wertentwicklung einer kontinuierlich verzinsten Anlage ohne Ausschüttung wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$C_n = C_0 e^{r \cdot t}$$

Wir erkennen die Eulersche Zahl $e \approx 2.718$ wieder!



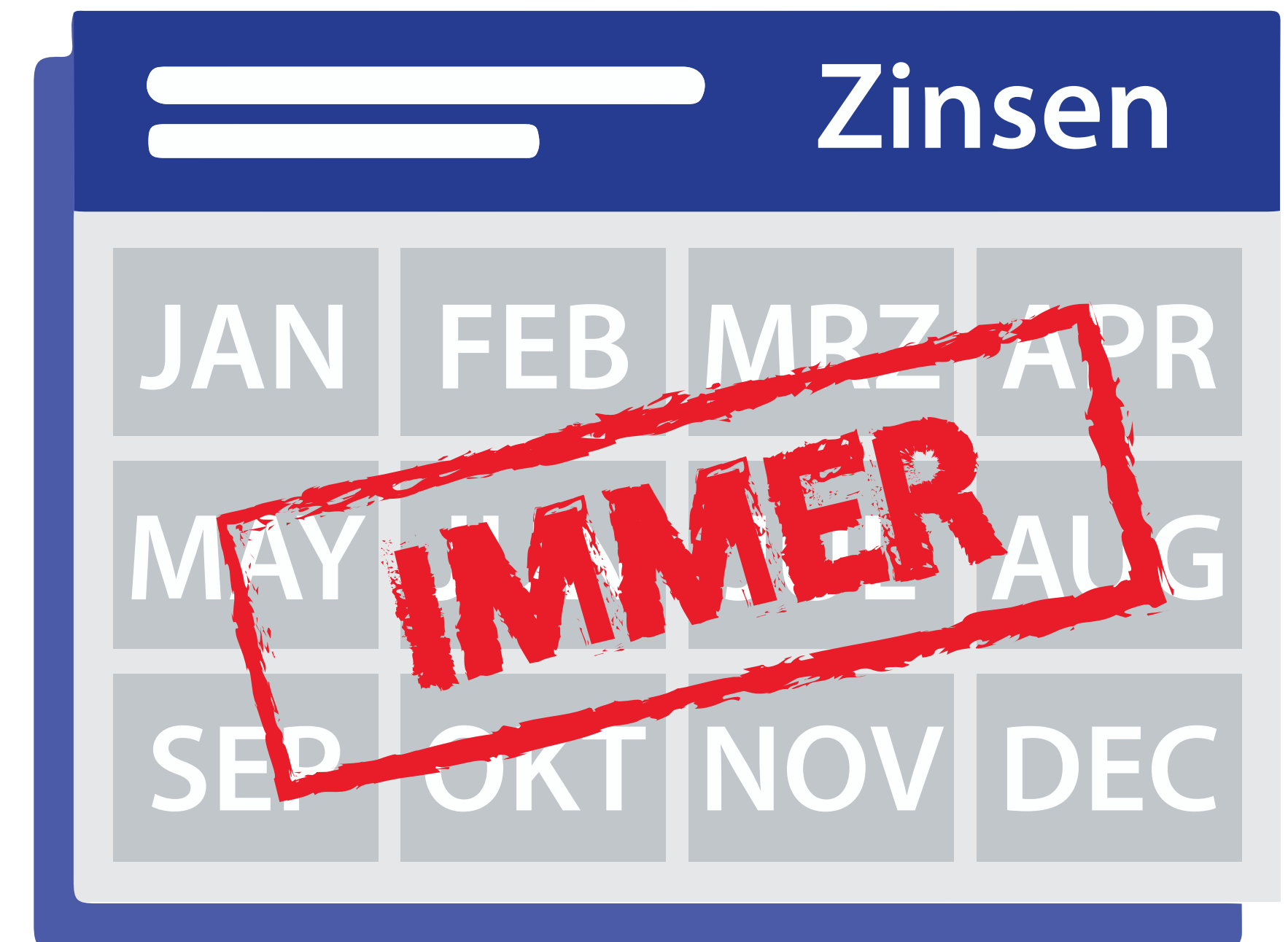
Kontinuierliche Verzinsung

Die kontinuierliche Verzinsung ist ein Sonderfall, bei der es keine festen Zinsintervalle gibt.

Die Wertentwicklung einer kontinuierlich verzinsten Anlage wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$C_n = C_0 e^{r \cdot t}$$

Die Rendite r und die Verzinsungsdauer t müssen dieselbe Einheit haben, z. B. beides in Jahren.



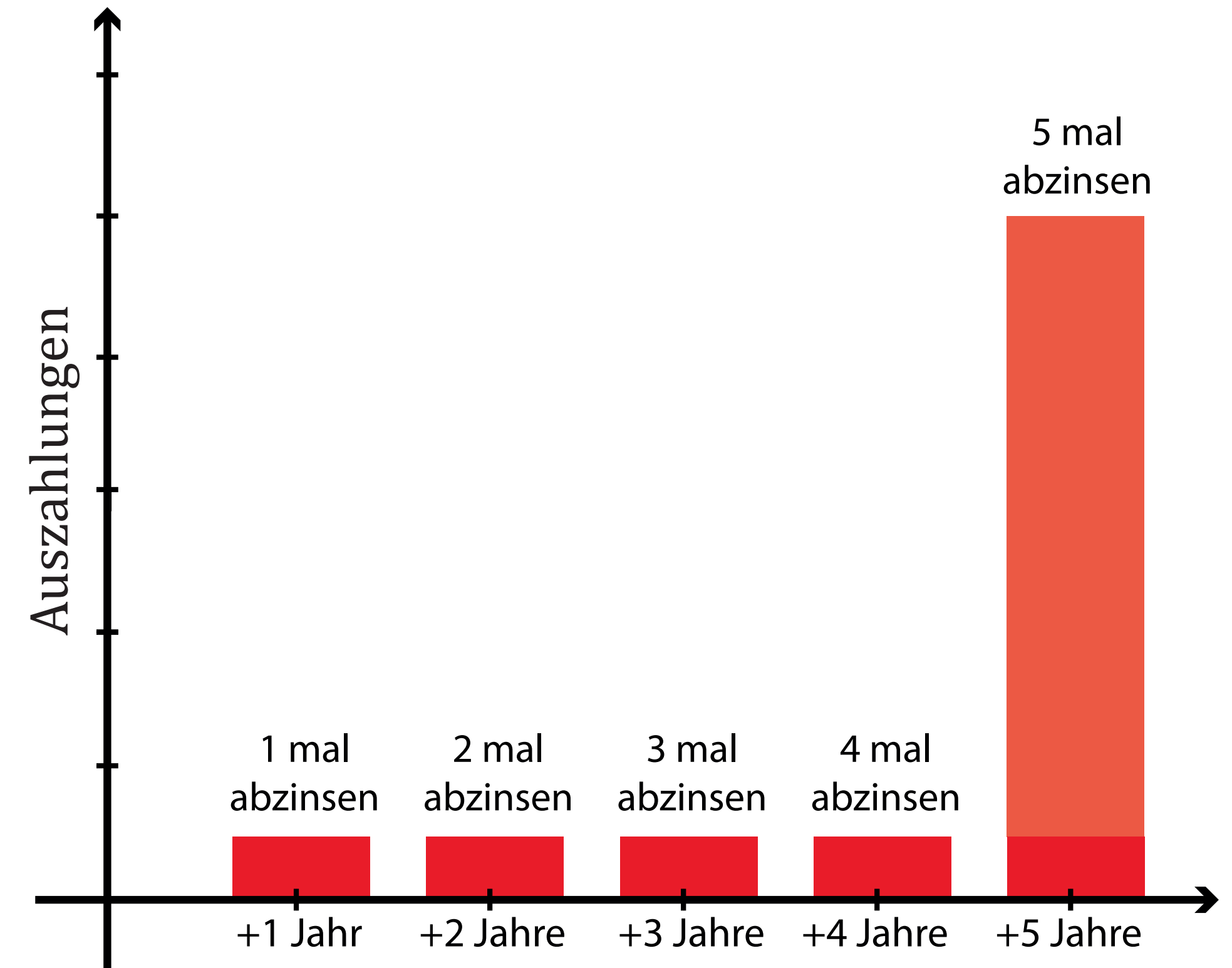
Barwertrechnung

Wir möchten Auszahlungen in der Zukunft einen Wert im hier und jetzt zumessen - den Barwert.

Welche Summe an Bargeld sofort entsprechen den Zahlungen in der Zukunft?

Idee Wir zinsen Zahlungen aus der Zukunft ab.

Als Zinssatz verwenden wir den Zins den ich am Markt ohne Risiko und bei voller Flexibilität bekomme (Tagesgeld, o. ä.)

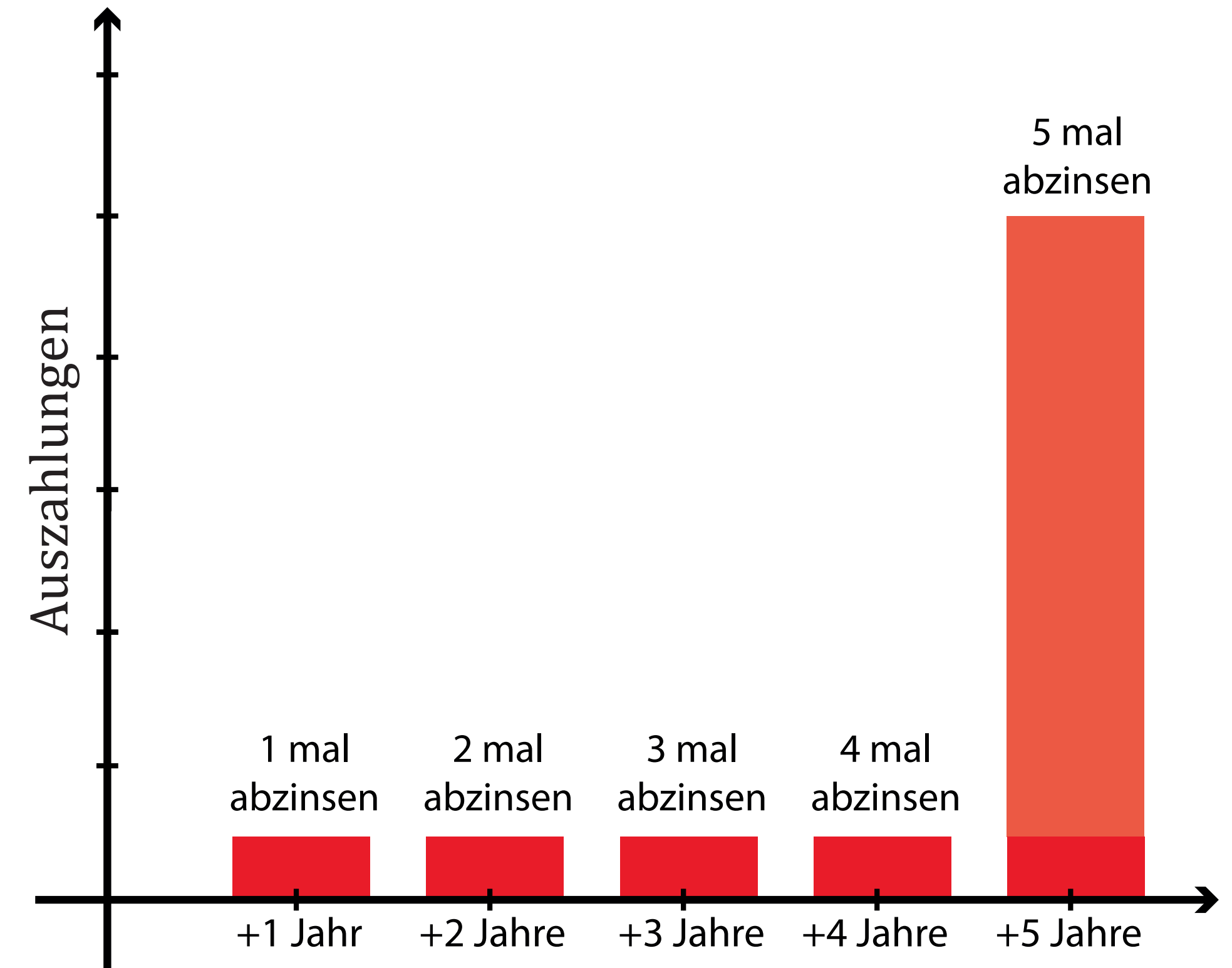


Barwertrechnung

Wie viel ist unsere 5Y-Bund Anleihe bei Emission Wert? Sie verspricht die rechts gezeigten Zahlungen, allerdings könnte ich diese alternativ anlegen, wenn ich diese sofort bar hätte.

Wir zinsen die Zahlungen mit dem risikolosen Zins auf den heutigen Zeitpunkt ab.

Je weiter die Zahlungen in der Zukunft liegen, umso stärker werden diese abgezinst.



Barwertrechnung

Den ersten Coupon hätten wir einmal verzinsen können:

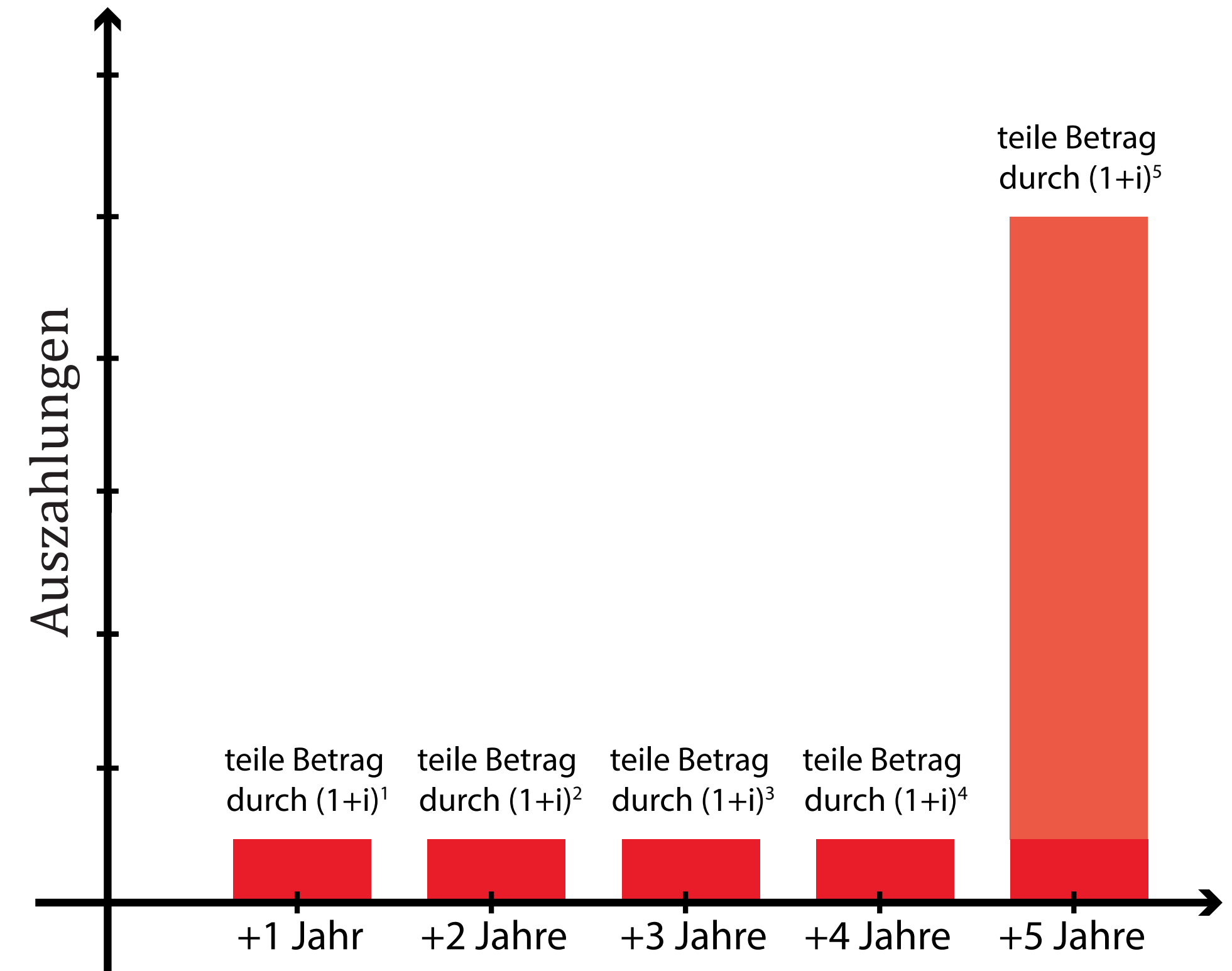
$$\text{Barwert} = \frac{\text{Coupon}}{(1+i)}$$

Den zweiten Coupon hätten wir zweimal verzinsen können:

$$\text{Barwert} = \frac{\text{Coupon}}{(1+i)^2}$$

Rückzahlung und letzter Coupon wären fünf Mal verzinst worden:

$$\text{Barwert} = \frac{\text{Coupon} + \text{Rückzahlung}}{(1+i)^5}$$



Barwertrechnung

Die Rechnung wird auf Papier schnell unübersichtlich. Wir schauen uns die Rechnung daher in Excel an und erhalten:

13397.40€

Was passiert, wenn wir den Risikolosen Zins ändern?

Anleihe

Risikoloser Zins 4%
Barwert 11.780,73 €

Auszahlung	In ... Jahren	Barwert
800,00 €	1	769,23 €
800,00 €	2	739,64 €
800,00 €	3	711,20 €
800,00 €	4	683,84 €
10.800,00 €	5	8.876,81 €

Barwertrechnung

Senken wir den risikolosen Zins auf $i=0\%$ steigt der Wert auf:

14000.00€

Erhöhen wir den risikolosen Zins auf $i=4\%$ sinkt der Wert auf:

11780.73€

Ab einem Zins von $i > 8\%$ fällt der Wert unter den Nennwert!

Anleihe

Risikoloser Zins 4%
 Barwert 11.780,73 €

Auszahlung	In ... Jahren	Barwert
800,00 €	1	769,23 €
800,00 €	2	739,64 €
800,00 €	3	711,20 €
800,00 €	4	683,84 €
10.800,00 €	5	8.876,81 €

Barwertrechnung

Dieser Zusammenhang gilt für alle Vermögenswerte mit Zahlungen in der Zukunft: PV-Anlage, Biogasanlage, LED-Studio usw.

Langfristige Projekte verlieren an Wert und Attraktivität, wenn risikolose Finanzanlagen attraktiver werden.

Zinserhöhungen hemmen die Investition, auch wenn ich mein Projekt ohne Kredit umsetzen kann!

Anleihe

Risikoloser Zins 4%
Barwert 11.780,73 €

Auszahlung	In ... Jahren	Barwert
800,00 €	1	769,23 €
800,00 €	2	739,64 €
800,00 €	3	711,20 €
800,00 €	4	683,84 €
10.800,00 €	5	8.876,81 €

Ewige Rente

Bei der Barwertrechnung haben wir bisher endliche Zahlungsströme betrachtet:

- Anleihen haben fast immer ein Fälligkeitsdatum
- Projekte wie PV-Anlagen haben eine begrenzte Lebensdauer

Wie viel ist ein dauerhafter Zahlungsstrom heute wert? Wie viel sind z.B. $A=500\text{€}$ pro Jahr "für immer" wert, wenn der risikolose Zins 2.00% beträgt?



Ewige Rente

Wie bisher zinsen wir die Zahlungen in der Zukunft auf die Gegenwart ab. Die Rückzahlung entfällt, aber es gibt unendlich viele Zahlungen.

$$PV = A(1+r)^{-1} + A(1+r)^{-2} + A(1+r)^{-3} + \dots$$

Schreibweise mit Summenzeichen:

$$PV = \sum_{n=1}^{\infty} A(1+r)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{(1+r)^n}$$

Summenzeichen

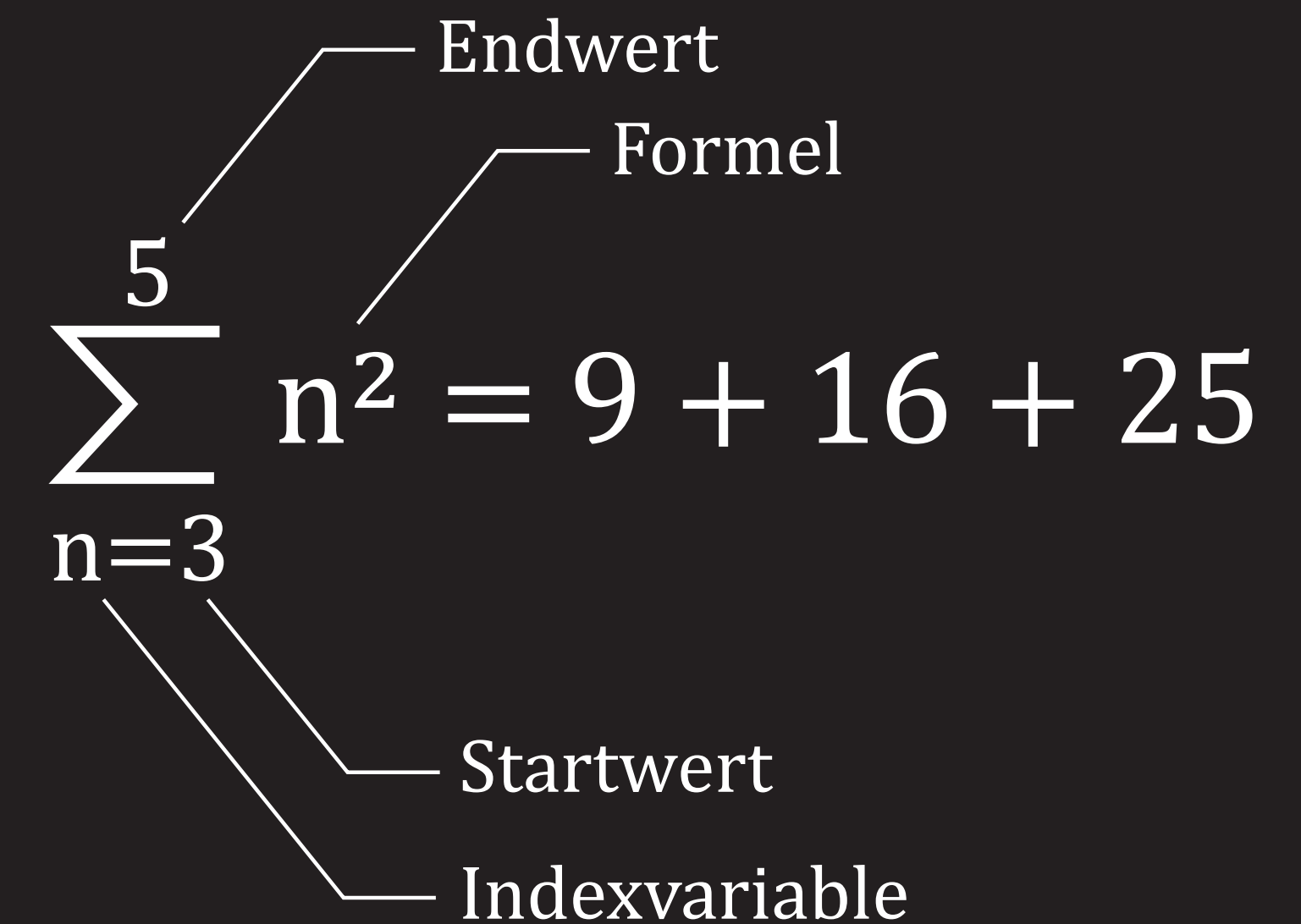


Diagram illustrating the components of the summation formula $\sum_{n=3}^5 n^2 = 9 + 16 + 25$:

- Endwert** (End value): Points to the upper limit '5'.
- Formel** (Formula): Points to the expression n^2 .
- Startwert** (Start value): Points to the lower limit 'n=3'.
- Indexvariable** (Index variable): Points to the variable 'n' in the lower limit.

Ewige Rente

Wir können die Höhe der ewigen Zahlung aus der Summe herausziehen und den Zähler 1 in die Potenz aufnehmen:

$$\begin{aligned} PV &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{(1+r)^n} \\ &= A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^n} \\ &= A \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1+r} \right]^n \end{aligned}$$

Potenzklammer

$$1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{(1+r)^i} = \frac{1^i}{(1+r)^i} = \left[\frac{1^i}{1+r} \right]$$

Ewige Rente

Danach ändern wir den Startindex der Summe von 1 auf 0. Es entsteht ein zusätzliches 0-tes Element das PV ändern würde. Damit PV gleich bleibt, ziehen wir das zusätzliche Element wieder ab!

$$\begin{aligned}
 &= A \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1+r} \right]^i \\
 &= A \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{1+r} \right]^i - \left[\frac{1}{1+r} \right]^0 \right)
 \end{aligned}$$

Indexänderung

$$\sum_{n=3}^5 n = 3+4+5$$

$$\sum_{n=2}^5 n = 2+3+4+5$$

Ewige Rente

Warum die Indexverschiebung? Wir können jetzt die geometrische Reihe anwenden, um die Summe zu berechnen!

$$\begin{aligned} &= A \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{1+r} \right]^i - \left[\frac{1}{1+r} \right]^0 \right) \\ &= A \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{1+r} \right]^i - 1 \right) \end{aligned}$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

wenn $|x| < 1$

Ewige Rente

Warum die Indexverschiebung? Wir können jetzt die geometrische Reihe anwenden, um die Summe zu berechnen!

$$= A \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{1+r} \right]^i - 1 \right)$$

$$= A \left(\frac{1}{1 - \left[\frac{1}{1+r} \right]} - 1 \right)$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

wenn $|x| < 1$

Ewige Rente

Danach bringen die Brüche im Nenner auf denselben Nenner ...

$$= A \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} - 1 \right)$$

$$= A \left(\frac{1}{\frac{1+r}{1+r} - \frac{1}{1+r}} - 1 \right)$$

$$= A \left(\frac{1}{\frac{1+r}{1+r} - \frac{1}{1+r}} - 1 \right)$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

wenn $|x| < 1$

Ewige Rente

...und verfahren ebenso mit der "-1" ganz rechts.

$$= A \left(\frac{1}{\frac{1+r-1}{1+r}} - 1 \right)$$

$$= A \left(\frac{1+r}{r} - 1 \right)$$

$$= A \left(\frac{1+r}{r} - \frac{r}{r} \right)$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

wenn $|x| < 1$

Ewige Rente

Das Ergebnis ist eine sehr einfache Formel!

$$\begin{aligned} &= A \left(\frac{1+r}{r} - 1 \right) \\ &= A \left(\frac{1+r}{r} - \frac{r}{r} \right) \\ &= \frac{A}{r} \end{aligned}$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

wenn $|x| < 1$

Ewige Rente

Wie viel sind $A=500\text{€}$ pro Jahr "für immer" wert, wenn der risikolose Zins 2.00% beträgt?

$$PV = \frac{A}{r} = \frac{500\text{€}}{0.02} = 25.000\text{€}$$

Basisformel für Stiftungen, ewige Anleihen und teilweise auch Immobilienprojekte. Es gibt auch eine Variante der Formel für den Aktienmarkt ...

Ewige Rente

$$PV = \frac{A}{r}$$

Ewige Rente

Wie viel ist eine Aktie Wert die eine jährliche Dividende von 2.50€ ausschüttet und bei der mit einem Dividendenwachstum von 1% gerechnet werden kann?

Der risikofreie Zinssatz sei wieder 2%

$$PV = \frac{\text{Divi}}{r - g} = \frac{2.50\text{€}}{0.02 - 0.01} = 250\text{€}$$

Divi-Wachstumsmodell

$$PV = \frac{\text{Divi}}{r - g}$$

Barwertrechnung

- a) Sie erhalten die nächsten 3 Jahre jeweils 1000€ zum Jahresende. Berechnen Sie den Barwert dieser Anlage, wenn der risikolose Zins 8% beträgt.
- b) Sie erhalten unbefristet jeweils 1000€ zum Jahresende. Berechnen Sie den Barwert dieser Anlage wenn der risikolose Zins 8% beträgt und langfristig auf diesem Niveau verweilt.
- c) Eine Aktie zahlt 1€ Dividende pro Jahr und weist ein jährliches Dividendenwachstum von 3% auf. Berechnen Sie den Wert dieser Aktie nach dem Dividendenwachstumsmodell, wenn der risikolose Zins 8% beträgt.
- d) Wie hoch müsste das Dividendenwachstum sein, damit die Aktie 100€ Wert ist?

Barwertrechnung

$$\text{a) } PV = \sum_{n=1}^3 \frac{1000}{1.08^n} = 926\text{€} + 857\text{€} + 793\text{€} = 2576\text{€}$$

$$\text{b) } PV = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000}{1.08^n} = \frac{1000}{1.08 - 1} = 12500\text{€}$$

$$\text{c) } PV = \frac{\text{Divi}}{r - g} = \frac{1\text{€}}{0.05} = 20\text{€}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } PV &= \frac{1\text{€}}{0.08 - g} \stackrel{!}{=} 100\text{€} \iff 0.08 - g = \frac{1\text{€}}{100\text{€}} \\ &\implies g = 7\% \end{aligned}$$

Renditerechnung

Die Rendite r zeigt das Verhältnis von Anfangs- und Endkapital an und wird meistens auf ein Jahr heruntergerechnet.

Erfolgen Einzahlung und Auszahlung auf einen Schlag, können wir die jährliche Rendite mit folgender Formel beschreiben.

$$r = \left[\frac{C_n}{C_0} \right]^{\frac{1}{t}} - 1$$



Renditerechnung

Gelegentlich wird in Brutto- und Nettorendite unterschieden. Das kann zwei Gründe haben:

Rendite mit/ohne Berücksichtigung von Steuern und Gebühren

Rendite vs. Auszahlungsverhältnis

Wir berücksichtigen weder Steuern noch Gebühren, noch verwenden wir Auszahlungsverhältnisse. Daher auch das "-1" in der Gleichung.

Bruttorendite vs. Nettorendite

$$\text{Bruttorendite} = \frac{\text{Auszahlung}}{\text{Einzahlung}} \quad \text{Nettorendite} = \frac{\text{Gewinn}}{\text{Einzahlung}}$$

	Bruttorendite	Nettorendite
Totalverlust	0%	-100%
Halbierung	50%	-50%
Null auf Null	100%	0%
Verdopplung	200%	100%
Verzehnfachung	1000%	900%

Beispiel: Wenn wir einen Anlagebetrag von 10.000€ in 10 Jahren auf 20.000€ verdoppeln ist die jährliche Rendite nicht 10% sondern:

A stylized illustration of a tree where the leaves are replaced by numerous 100 Euro banknotes. The tree stands on a dirt path in a landscape with green fields, distant hills, and a sky with soft clouds.

Renditerechnung

Bei einer Anlage mit regelmäßigen Ein- oder Auszahlungen ist die Rechnung schwieriger.

Hier ergibt sich die Rendite als jener Zinssatz bei dem die abgezinsten Auszahlungen den abgezinsten Einzahlungen entsprechen.

Schauen wir uns dazu die rechts gezeigte Anleihe an!



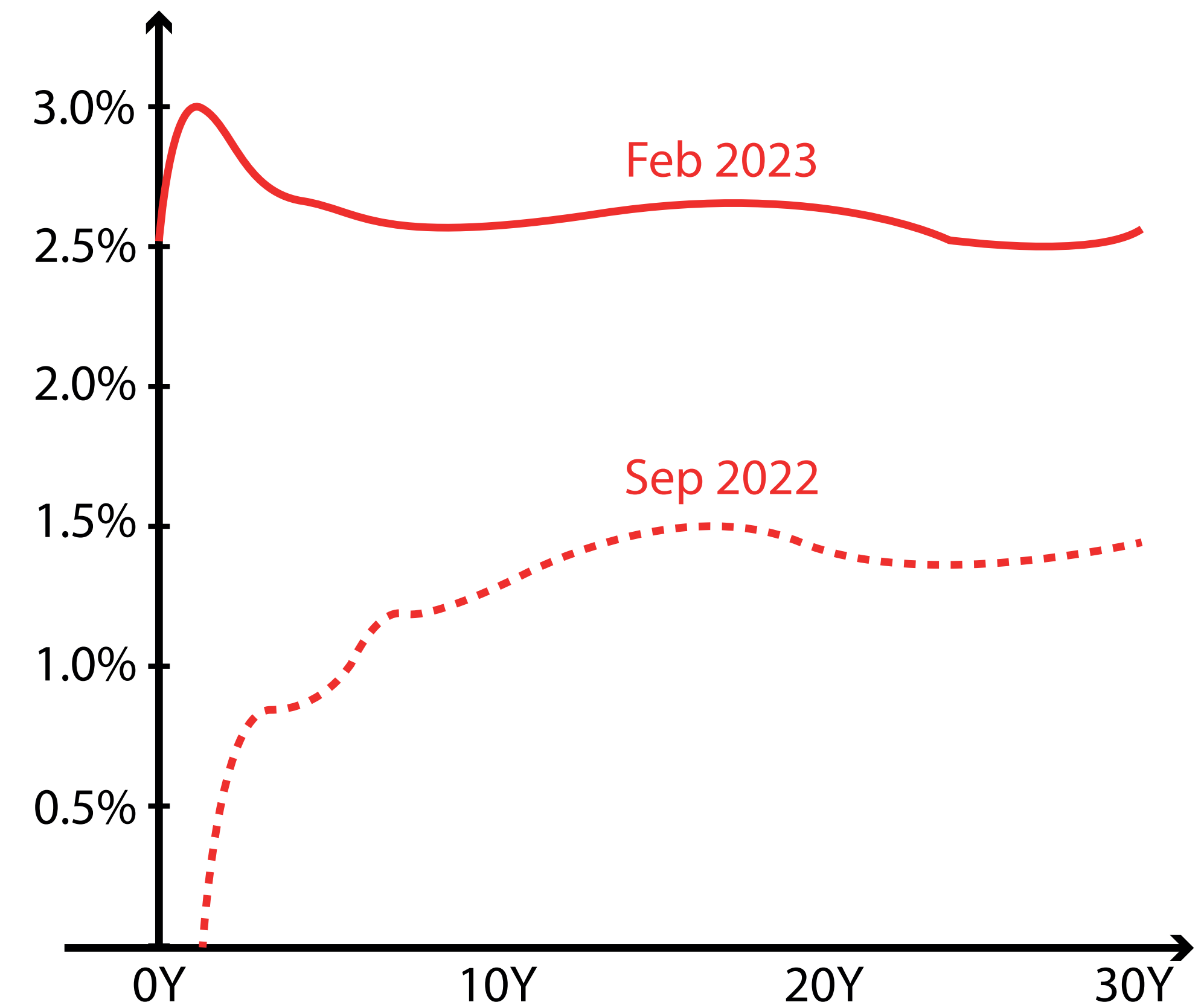
Renditerechnung

Zentrale Größe bei Anleihen ist die Rendite und die Restlaufzeit!

Mit Zinsstrukturkurven erhalten wir einen schnellen Überblick über die Renditen die uns ein Emittent, hier die BRD, bietet.

Woher kommen die starken Schwankungen von Renditen bzw. Prozentkursen, wenn die Anleihe doch immer denselben Zins zahlt?

Zinsstrukturkurve BUNDs



Renditerechnung

Neben dem Risiko das der Schuldner der Anleihe ausfällt, bindet die Anleihe auch mein Kapital über die Laufzeit.

Opportunitätskosten Das Geld, das ich in die Anleihe stecke, kann ich während der Laufzeit nicht für andere Investitionen benutzen.

Steigt die Rendite die ich ohne Risiko und bei voller Flexibilität erreichen kann, dann werden die Zahlungen der Anleihe stärker abgezinst. Der Barwert fällt und damit auch der Preis der Anleihe. Anleihen mit langer Laufzeit sind i. d. R. stärker betroffen.



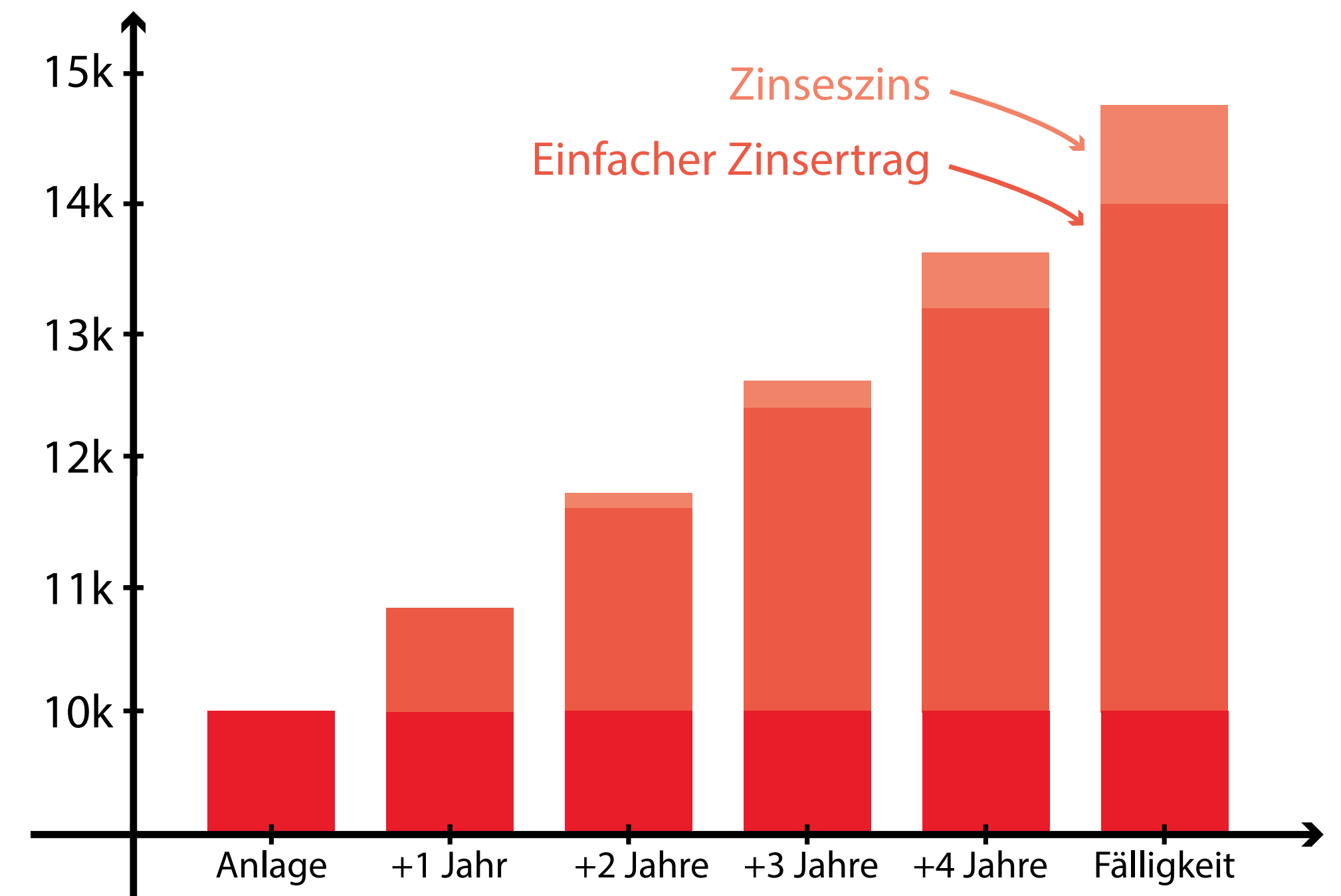
Annuitäten

Bisher betrachten wir nur Investments, die wir auf einen Schlag tätigen. Beispiel: 10.000€ Festgeld mit 8% auf 5 Jahre:

$$C_5 = 10000€ (1 + 0.08)^5 = 14693.28€$$

Wie berechne ich den Endwert von Investments mit regelmäßiger Einzahlung?

Wichtig für Sparpläne und Bausparverträge!



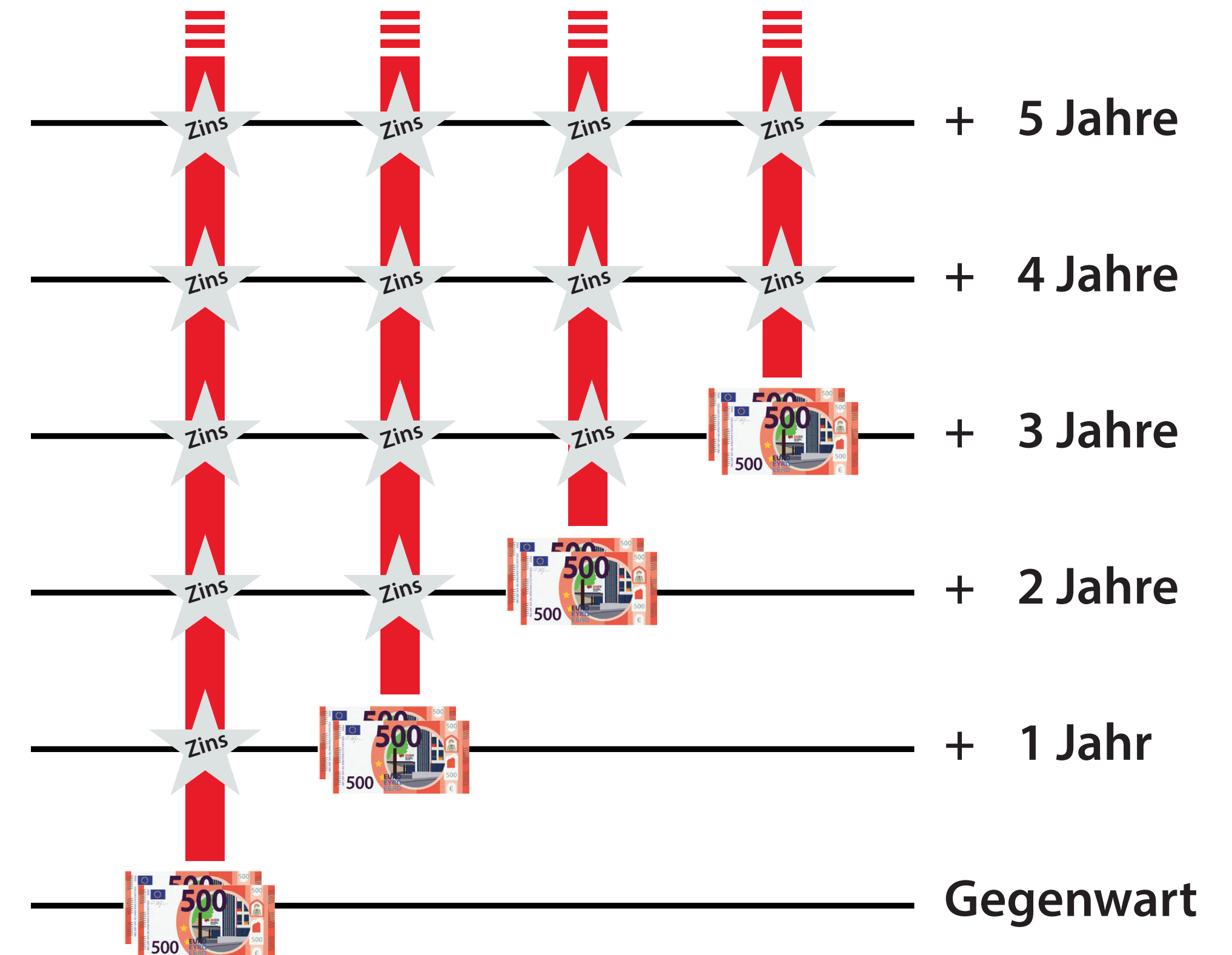
Annuitäten

Beispiel: Sparplan mit 10 Jahren Laufzeit, einer jährlicher Einzahlung von 1.000€ zu Beginn jeden Jahres und einer jährlichen Verzinsung von 2%.

Vermutung: Die frühen Einzahlungen tragen am meisten zur Vermögensbildung bei, da sie öfter verzinst werden.

Die erste Einzahlung wird ganze 10x verzinst.

Die letzte Einzahlung wird nur 1x verzinst.



Annuitäten

Wie berechnen wir die unterschiedlichen Zinserträge?

Wir könnten erneut eine Exceltabelle entwerfen, die für jede Einzahlung Zins und Zinseszins berechnet. Dann zählen wir alle Einzahlungen und Zinserträge zusammen.

Gibt es da keine Formel dafür?

Jahr	Einzahlung	Zinsertrag
1	1.000,00 €	218,99 €
2	1.000,00 €	195,09 €
3	1.000,00 €	171,66 €
4	1.000,00 €	148,69 €
5	1.000,00 €	126,16 €
6	1.000,00 €	104,08 €
7	1.000,00 €	82,43 €
8	1.000,00 €	61,21 €
9	1.000,00 €	40,40 €
10	1.000,00 €	20,00 €
	10.000,00 €	1.168,72 €
	Auszahlung	11.168,72 €

Annuitäten

Mathematische Formel für den Endwert der Anlage:

$$FV = A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right]$$

Mit unseren Zahlenwerten:

$$FV = 1000\text{€} \left[\frac{(1.02)^{11} - 1.02}{0.02} \right]$$

Jahr	Einzahlung	Zinsertrag
1	1.000,00 €	218,99 €
2	1.000,00 €	195,09 €
3	1.000,00 €	171,66 €
4	1.000,00 €	148,69 €
5	1.000,00 €	126,16 €
6	1.000,00 €	104,08 €
7	1.000,00 €	82,43 €
8	1.000,00 €	61,21 €
9	1.000,00 €	40,40 €
10	1.000,00 €	20,00 €
	10.000,00 €	1.168,72 €
	Auszahlung	11.168,72 €

Annuitäten

Diese Formel gilt nur bei Einzahlung zu Beginn der Periode.

$$FV = A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right]$$

Wird zum Ende der Periode gezahlt, wird jede Einzahlung 1x weniger oft verzinst. Dann gilt stattdessen:

$$FV = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Jahr	Einzahlung	Zinsertrag
1	1.000,00 €	218,99 €
2	1.000,00 €	195,09 €
3	1.000,00 €	171,66 €
4	1.000,00 €	148,69 €
5	1.000,00 €	126,16 €
6	1.000,00 €	104,08 €
7	1.000,00 €	82,43 €
8	1.000,00 €	61,21 €
9	1.000,00 €	40,40 €
10	1.000,00 €	20,00 €
	10.000,00 €	1.168,72 €
	Auszahlung	11.168,72 €

Annuitäten

- a) Sie zahlen zu Beginn jedes Jahres 2500€ in einen Sparplan mit jährlicher Verzinsung von 3% ein. Berechnen Sie das Endkapital nach 10 Jahren.
- b) Wie hoch müsste die jährliche Einzahlung sein, wenn Sie ein Endkapital von 100000€ anstreben?
- c) Sie zahlen zum Ende jedes Monats 200€ in einen Bausparvertrag ein. Die Zinsen werden monatlich berechnet. Rechnen Sie den jährlichen Zins von 1.5% in einen monatlichen Zins um. Berechnen Sie danach das Endkapital nach 10 Jahren!

Annuitäten

$$\begin{aligned} \text{a) } FV &= A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right] \\ &= 2500\text{€} \left[\frac{(1.03)^{11} - 1.03}{0.03} \right] \\ &= 29519.49\text{€} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } FV &= A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right] \\ \Leftrightarrow A &= FV \left[\frac{i}{(1+i)^{n+1} - (1+i)} \right] \\ &= 8468.90\text{€} \end{aligned}$$

Annuitäten

$$\begin{aligned} \text{c) } 1+i_b &= \left[1+i_a\right]^{\frac{\text{Länge Zeitraum b}}{\text{Länge Zeitraum a}}} \\ i_b &= \left[1.015\right]^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.124\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FV &= A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \\ &= 200\text{€} \left[\frac{(1.00124)^{120} - 1}{0.00124} \right] \\ &= 25960.31\text{€} \end{aligned}$$

Termingeschäfte

Insbesondere bei Rohstoffen wird zwischen Spot-Geschäften und Termin-Geschäften unterschieden.

Spot-Geschäfte werden sofort zum Spot-Preis (auch Kassakurs genannt) abgewickelt.

Termin-Geschäfte werden zu einem festen Zeitpunkt in der Zukunft abgewickelt. In der Gegenwart werden nur die Konditionen festgelegt ...

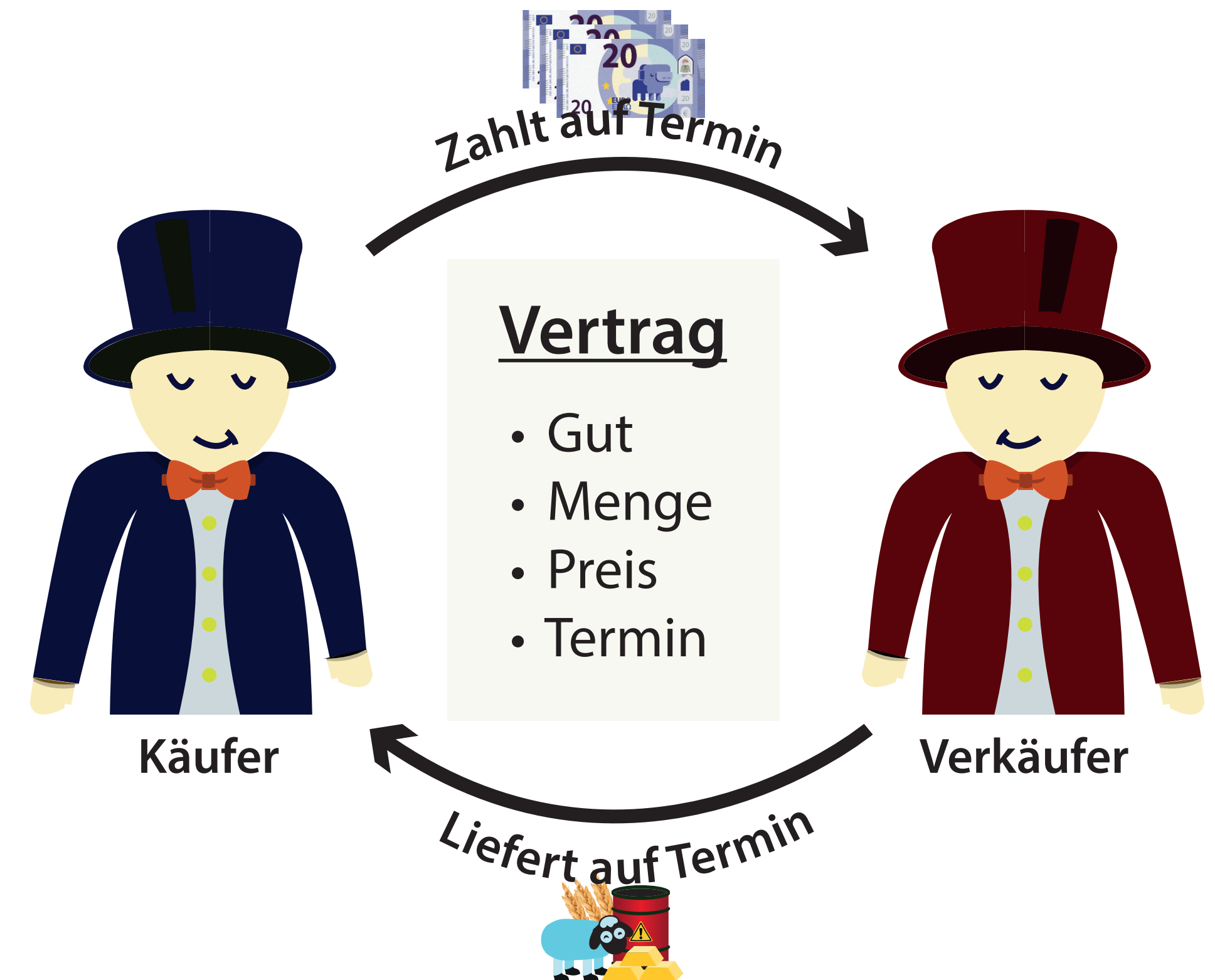


Termingeschäfte

Allgemeine Struktur eines Termingeschäftes:

Ich kaufe/verkaufe eine bestimmte Menge eines bestimmten Guts zu einem bestimmten Preis. Die Lieferung muss zu einem bestimmten Termin erfolgen.

- Gut
- Menge
- Preis
- Liefertermin



Termingeschäfte

Warum und warum gerade bei Rohstoffen? Neben den bereits bekannten Zinseffekten ...

...sind einige Rohstoffe saisonal unterschiedlich verfügbar.

...verursacht das Halten von Rohstoffen Lagerkosten.

...sind einige Rohstoffe nur begrenzt haltbar.

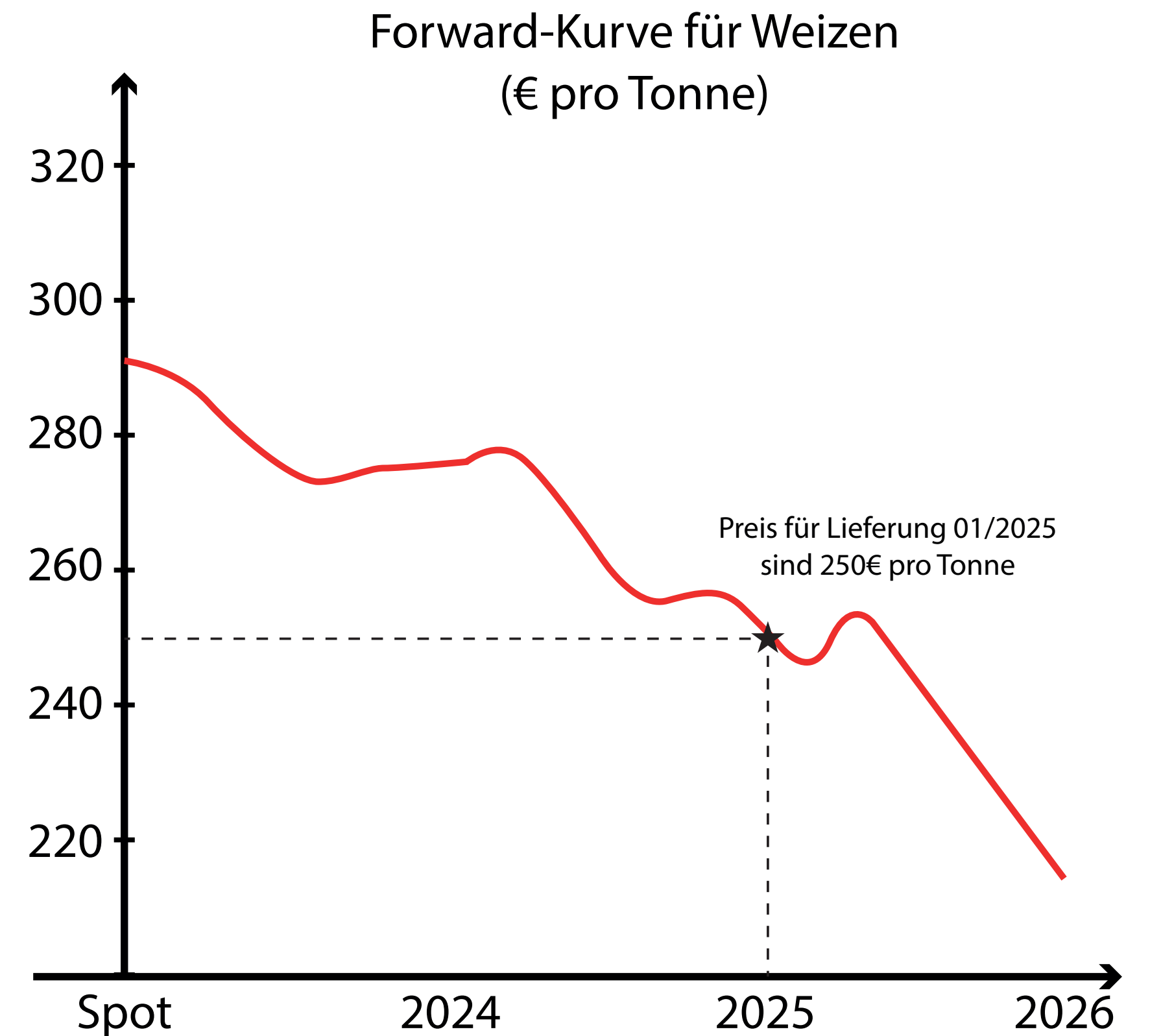
Ziel ist also Versorgung und/oder Preise frühzeitig zu sichern.



Termingeschäfte

Mithilfe von Forward-Kurven erhält man eine schnelle Übersicht, welcher Wert einem bestimmten Gut momentan für einen Zeitpunkt in der Zukunft zugeordnet wird.

Beispiel: Der Weizenpreis steht aktuell bei 290€ pro Tonne. Für eine Lieferung zum September 2025 würde man aktuell jedoch nur 250€ pro Tonne erhalten.



Datenquelle: Finanzen.net mit Stand 2023 (<https://www.finanzen.net/rohstoffe/weizenpreis/chart>)

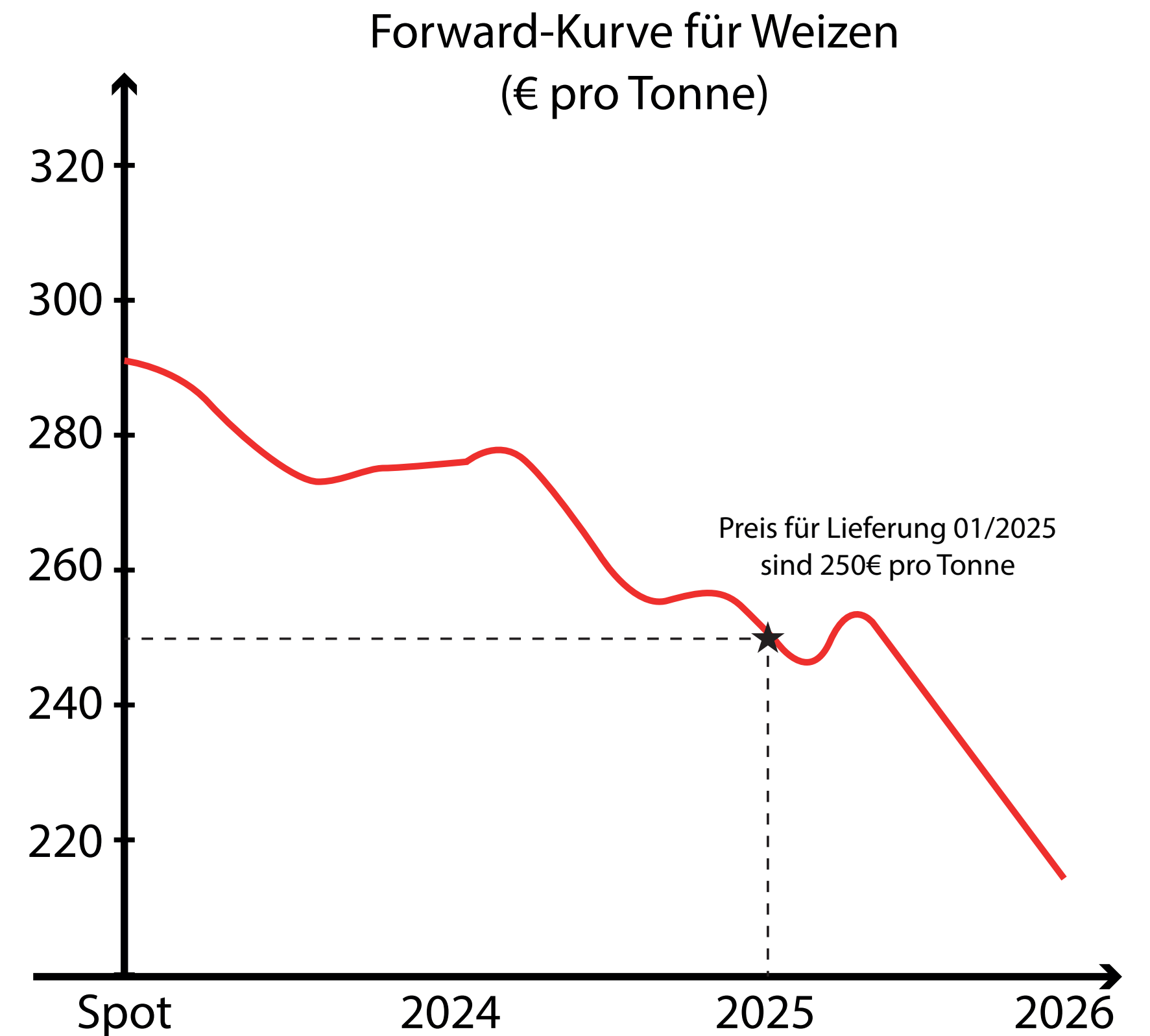
Termingeschäfte

Zeigt die Forward-Kurve nach oben, ist der Markt in **Contango**.

Lieferungen in der Zukunft sind teurer als Lieferungen in der Gegenwart. Der Markt geht also von steigenden Preisen aus.

Zeigt die Kurve nach unten, ist der Markt in **Backwardation**.

Lieferungen in der Zukunft sind günstiger als Lieferungen in der Gegenwart. Der Markt geht also von fallenden Preisen aus.



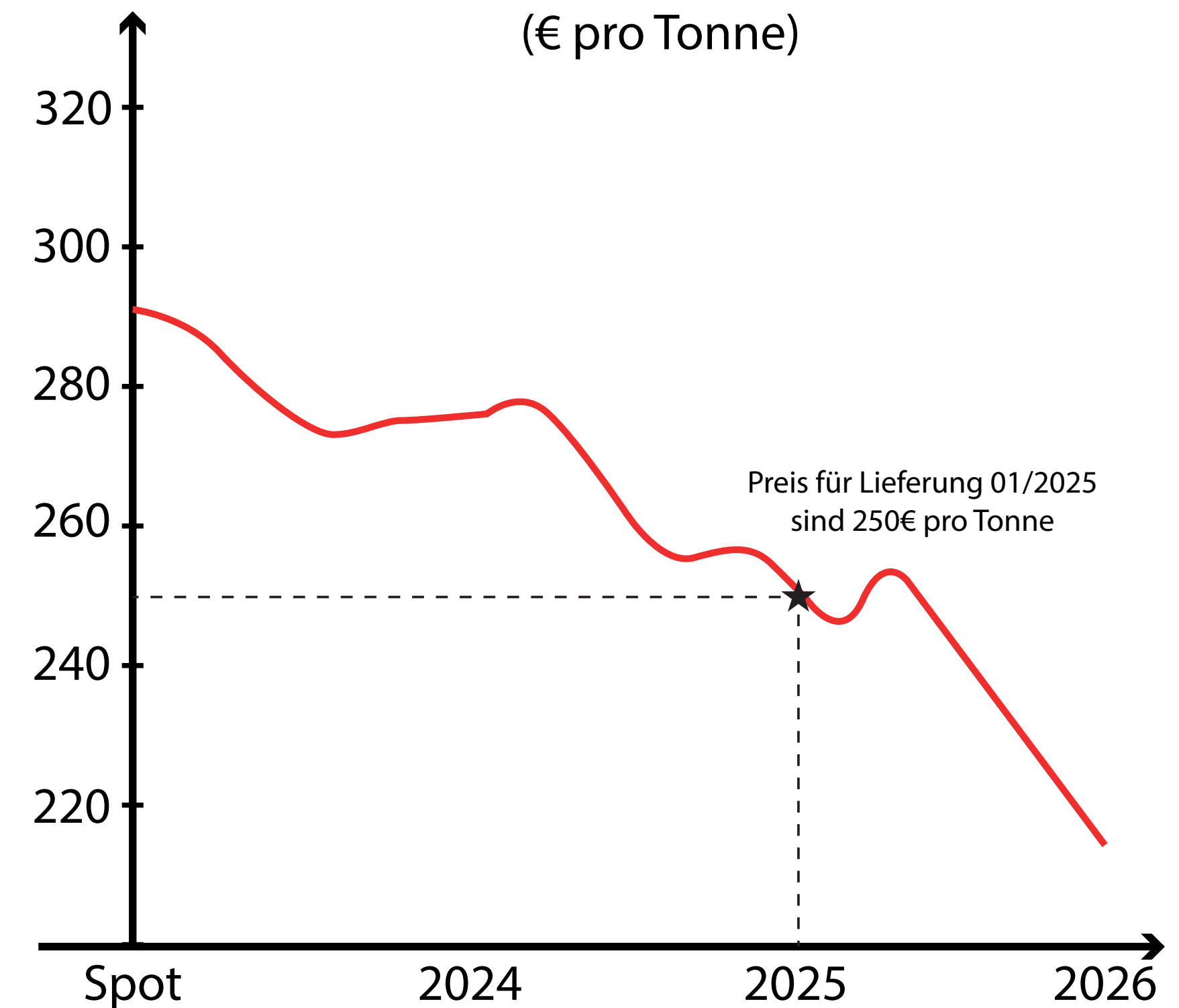
Datenquelle: Finanzen.net mit Stand 2023 (<https://www.finanzen.net/rohstoffe/weizenpreis/chart>)

Termingeschäfte

Der Weizenmarkt ist hier in Backwardation. Die sofortige Lieferung ist mit 290€ pro Tonne teurer als Lieferungen in der Zukunft.

Der Markt geht von fallenden Getreidepreisen aus.

Forward-Kurve für Weizen
(€ pro Tonne)



Datenquelle: Finanzen.net mit Stand 2023 (<https://www.finanzen.net/rohstoffe/weizenpreis/chart>)

Termingeschäfte

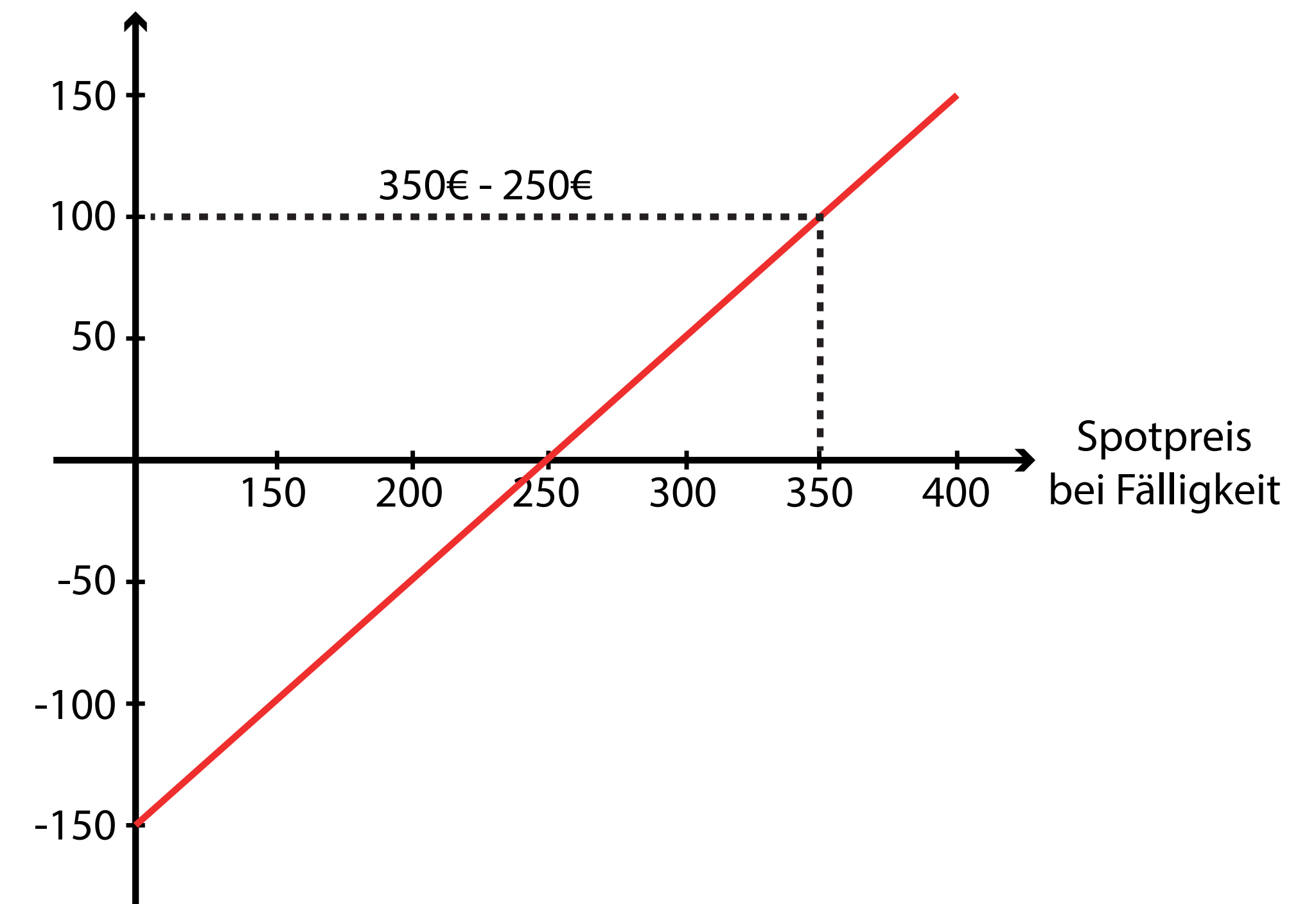
Der Käufer gewinnt am Termingeschäft, wenn der Spotpreis beim Erreichen des Fälligkeitstermins über dem Terminpreis liegt.

Beispiel: Ich kaufe 1t Weizen für 250€ auf Termin.

Am Fälligkeitstermin steht der Spotpreis auf 350€.

Das Termingeschäft lohnt sich! Dank meines Termingeschäfts erhalte ich den Weizen 100€ günstiger.

Gewinn für Käufer, Terminkontrakt 250€ für 1t Weizen



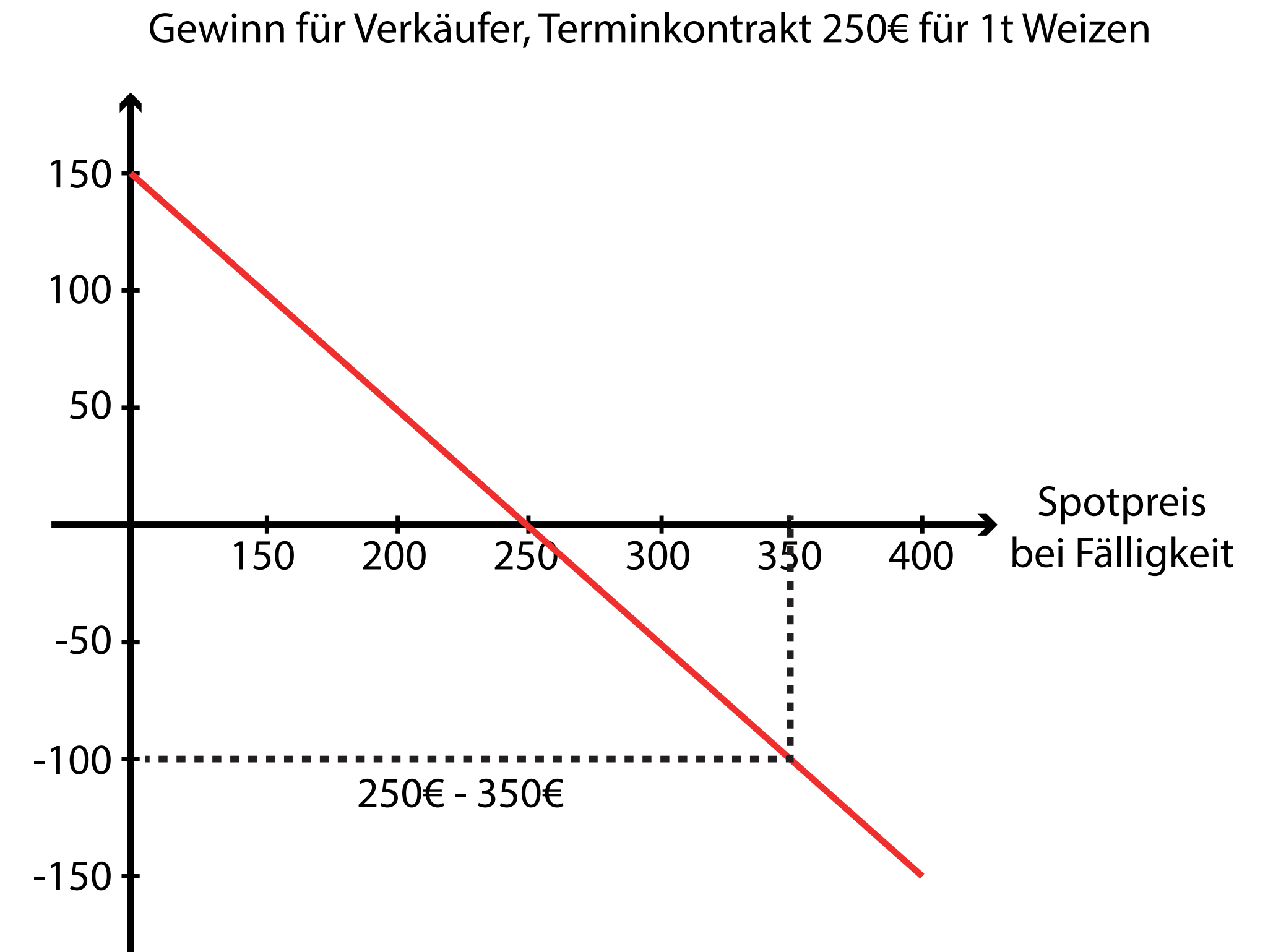
Termingeschäfte

Der Verkäufer gewinnt am Termingeschäft, wenn der Spotpreis beim Erreichen des Fälligkeitstermin unter dem Terminpreis liegt.

Beispiel: Ich verkaufe 1t Weizen für 250€ auf Termin.

Am Fälligkeitstermin steht der Spotpreis auf 350€.

Mein Termingeschäft kostet mich 100€! Ohne das Termingeschäft hätte ich nicht 250€, sondern 350€ bekommen.



Termingeschäfte

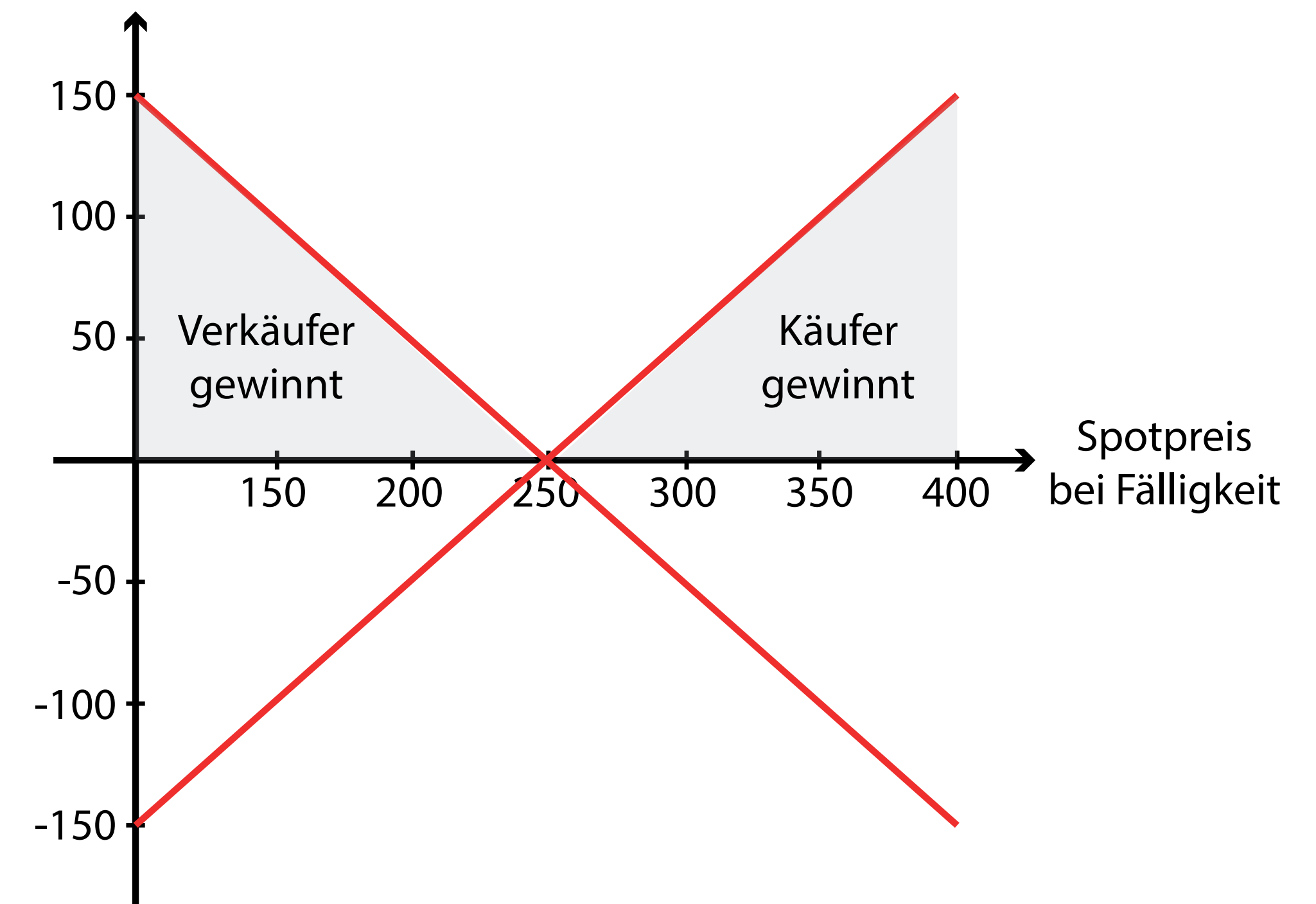
Der Fälligkeitstermin ist erreicht. Der Spotpreis am Markt beträgt 350€, das Termingeschäft schreibt einen Preis von 250€ vor.

Der Verkäufer muss dem Käufer eine Tonne Weizen unterm Marktpreis verkaufen.

Hat der Verkäufer keine Tonne Weizen, muss er diese am Spotmarkt für 350€ kaufen um sie dann für 250€ an den Käufer weiterzuverkaufen.

So oder so macht er 100€ Verlust!

Terminkontrakt 250€ für 1t Weizen



Termingeschäfte

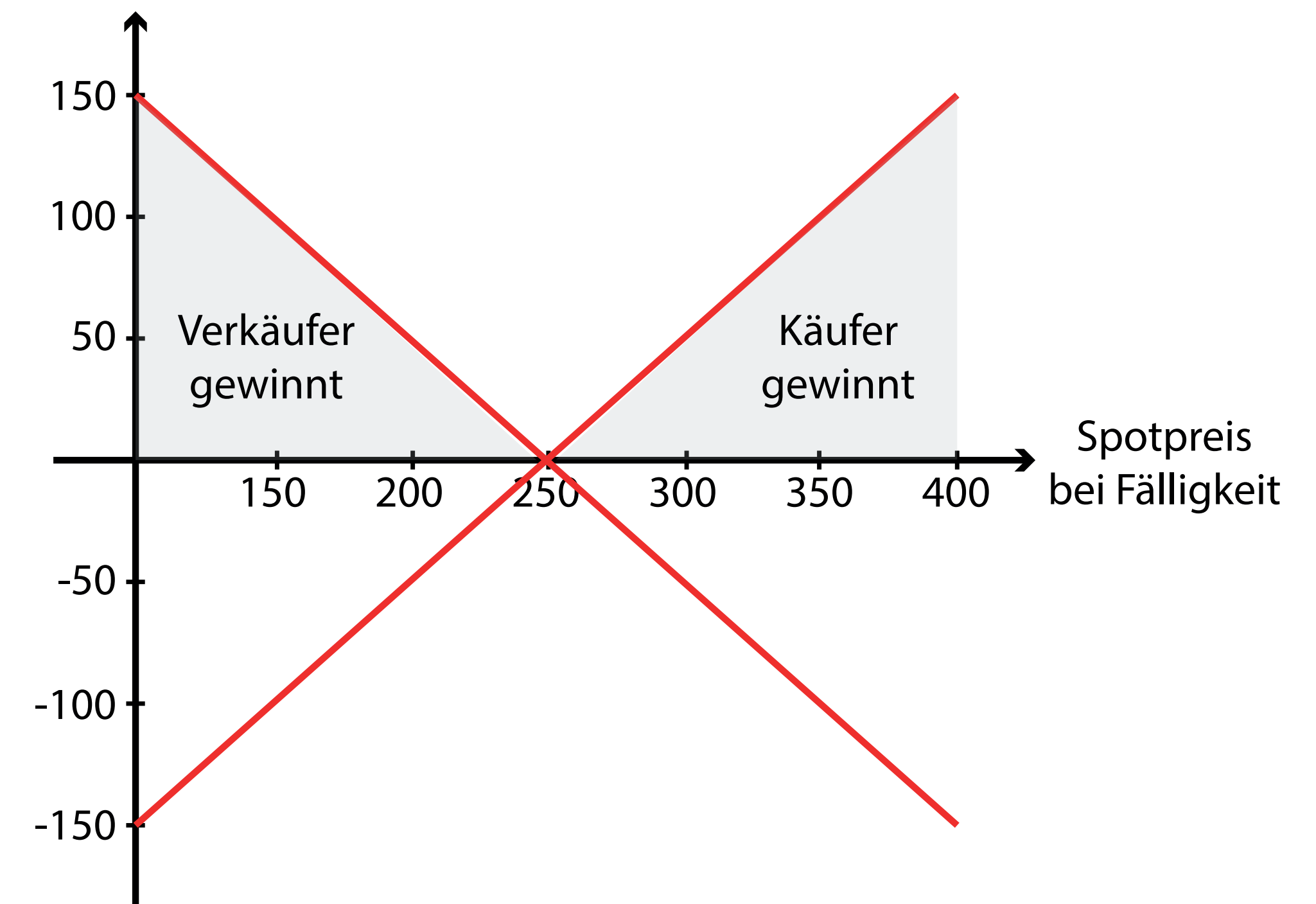
Der Fälligkeitstermin ist erreicht. Der Spotpreis am Markt beträgt 350€, das Termingeschäft schreibt einen Preis von 250€ vor.

Der Käufer erhält eine Tonne Weizen unterm Marktpreis.

Hat der Käufer keinen Bedarf an dem Weizen, kann er ihn direkt am Spotmarkt für 350€ weiterverkaufen.

So oder so macht er 100€ Gewinn!

Terminkontrakt 250€ für 1t Weizen



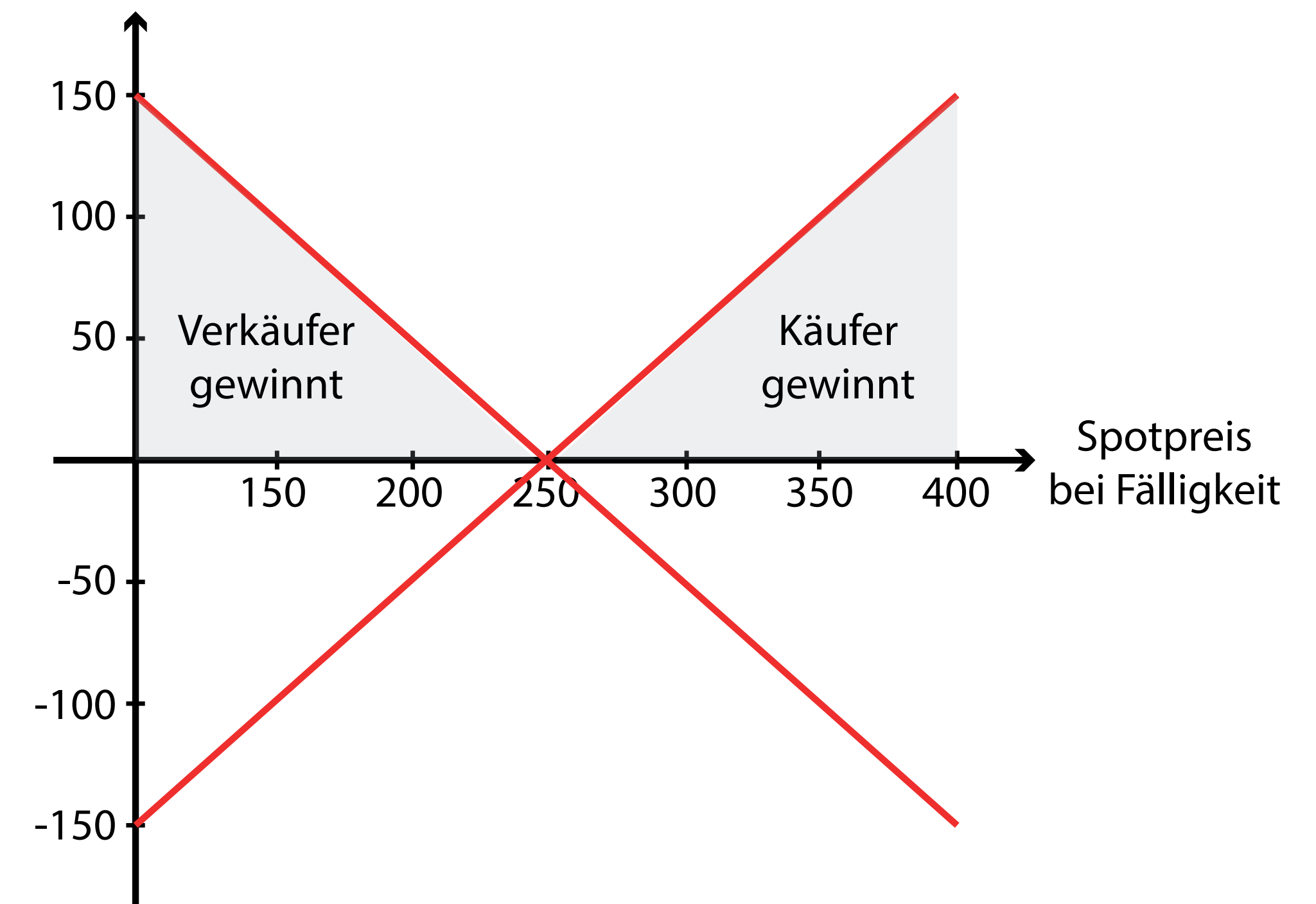
Termingeschäfte

Nicht jedes Termingeschäft wird physisch durchgeführt! Oft wird ein sogenanntes **Cash-Settlement** vereinbart.

Im Beispiel würde der Verkäufer dem Käufer 100€ bezahlen.

Ein Austausch des Weizens findet nicht statt. Vielleicht existiert der gehandelte Weizen auch überhaupt nicht.

Terminkontrakt 250€ für 1t Weizen



Termingeschäfte

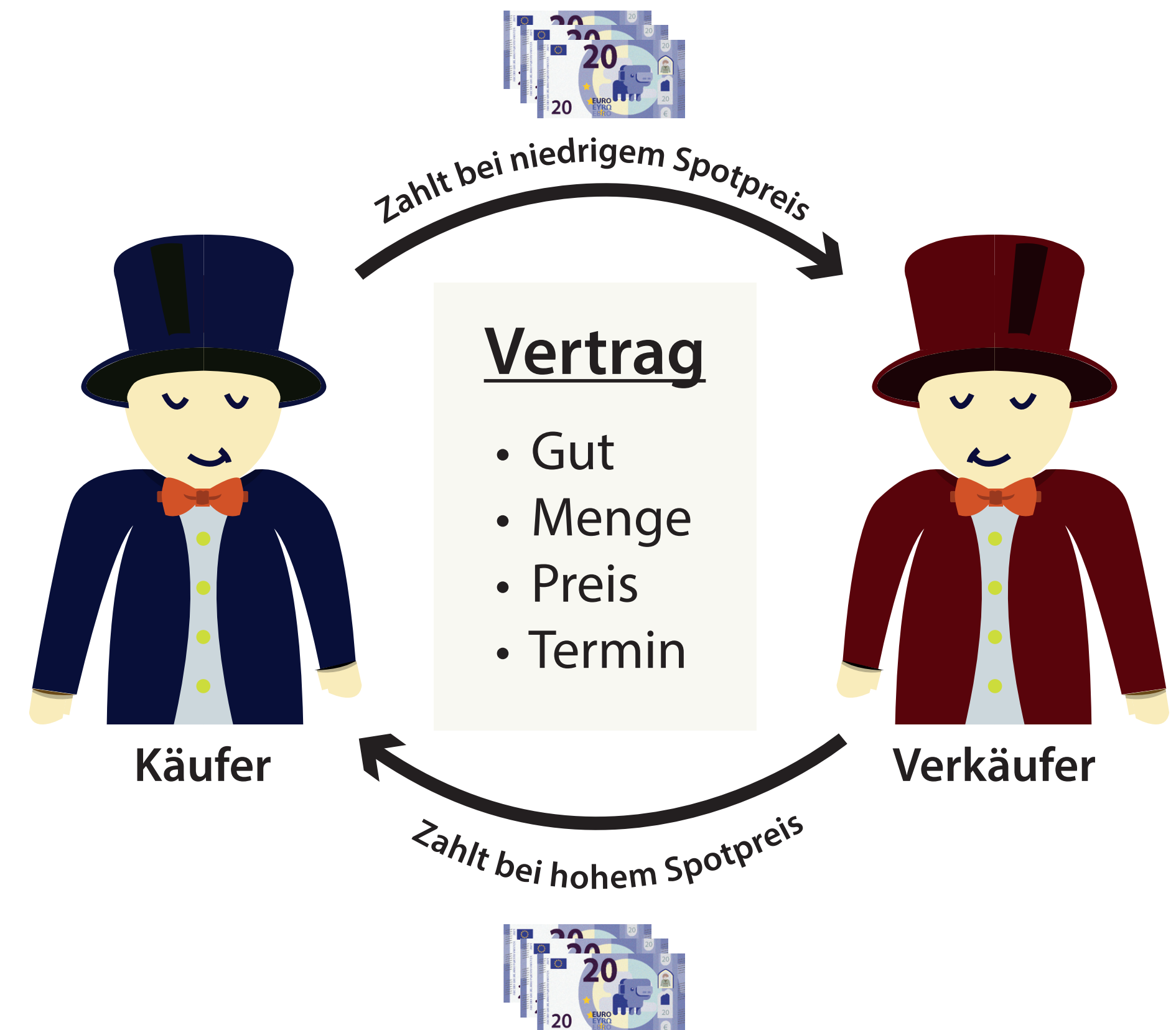
Nicht jedes Termingeschäft wird physisch durchgeführt! Oft wird ein sogenanntes **Cash-Settlement** vereinbart.

Im Beispiel würde der Verkäufer dem Käufer 100€ bezahlen.

Ein Austausch des Weizens findet nicht statt. Vielleicht existiert der gehandelte Weizen auch überhaupt nicht.

Der Käufer spekuliert auf steigende Kurse

Der Verkäufer spekuliert auf fallende Kurse



Optionen

Mit Optionen wird nicht das eigentliche Gut gehandelt, sondern das Recht, eine bestimmte Menge zu einem bestimmten Preis (genannt Strike) zu kaufen/verkaufen ...

Call Optionen berechtigen den Inhaber der Option zum Kauf des Gutes vom Emittenten der Option. Menge und Preis sind festgeschrieben.

Put Optionen berechtigen den Inhaber der Option zum Verkauf des Gutes an den Emittenten der Option. Menge und Preis sind festgeschrieben.



Optionen

Mit Optionen wird nicht das eigentliche Gut gehandelt, sondern das Recht, eine bestimmte Menge zu einem bestimmten Preis (genannt Strike) zu kaufen/verkaufen ...

Amerikanische Optionen können bis zu ihrem Fälligkeitstag ausgeübt werden.

Europäische Optionen können genau an ihrem Fälligkeitstag ausgeübt werden.

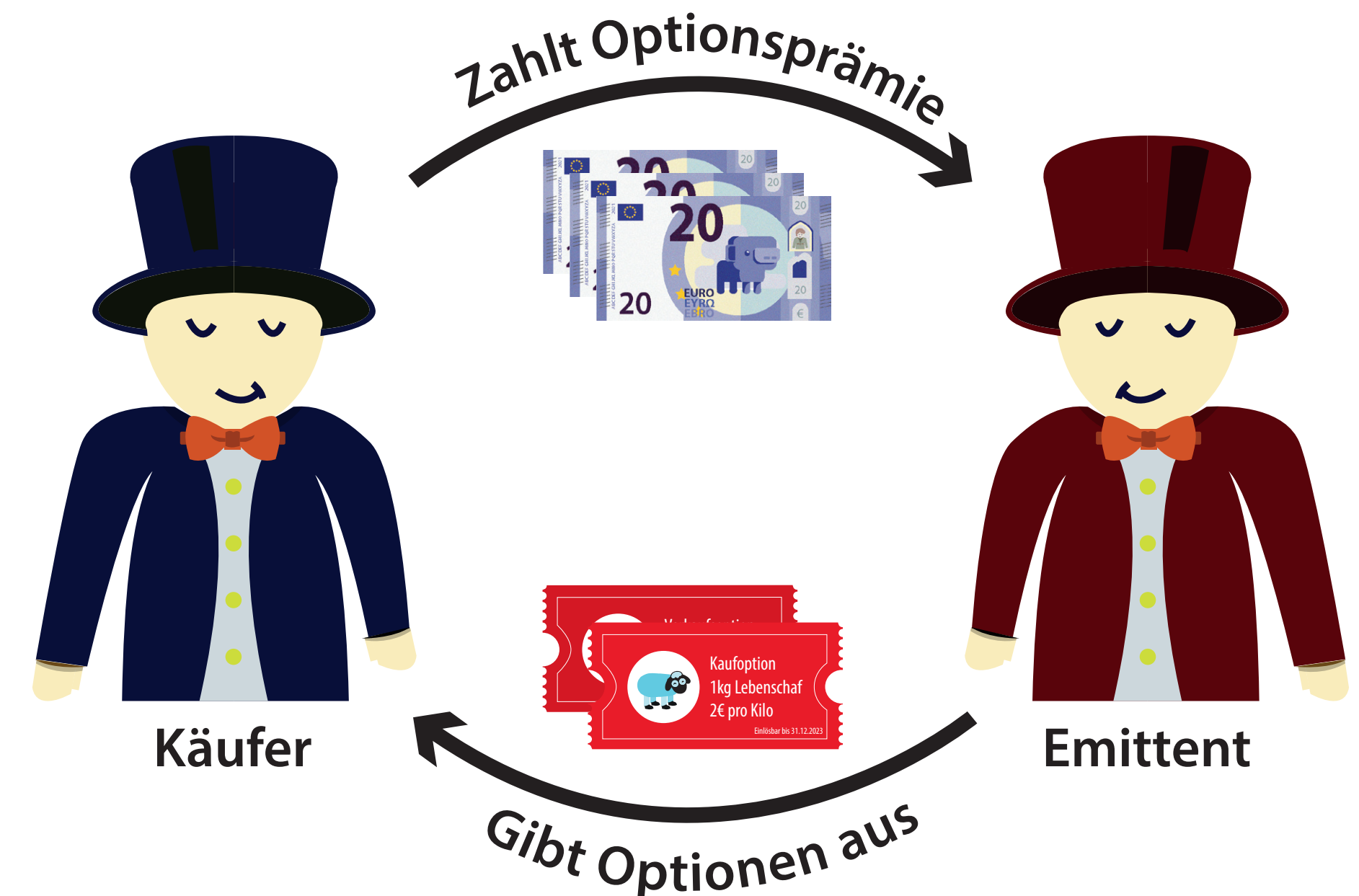


Optionen

Mit Optionen wird nicht das eigentliche Gut gehandelt, sondern das Recht, eine bestimmte Menge zu einem bestimmten Preis (genannt Strike) zu kaufen/verkaufen ...

Käufer von Optionen sichern sich Preise oder spekulieren auf einen möglichst hohen Ausübungswert ihrer Option.

Verkäufer/Emittenten von Optionen erhalten von den Käufern Geld (der Preis der Option) und spekulieren darauf, dass die Option im Idealfall wertlos verfällt.

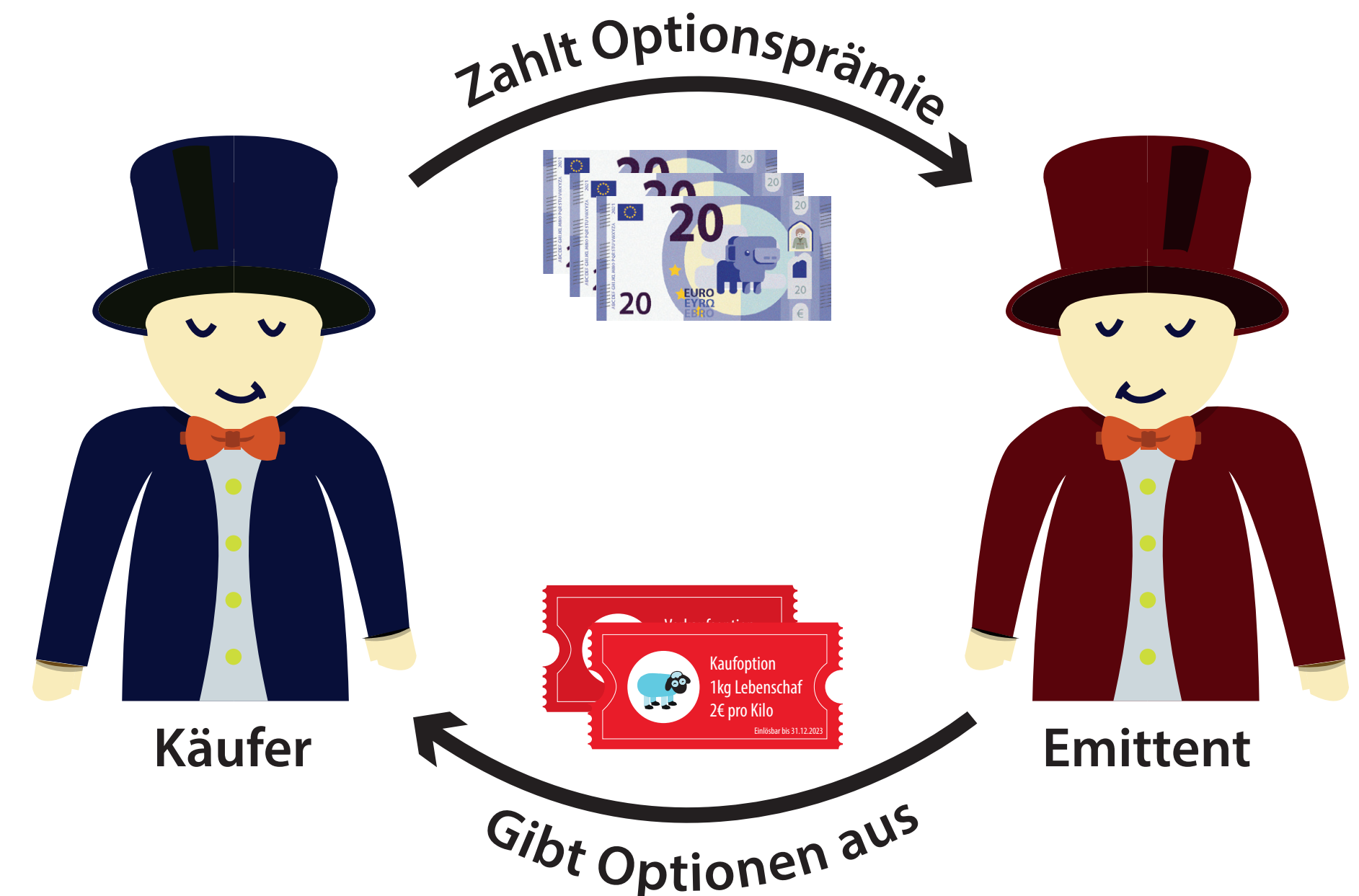


Optionen

Mit Optionen wird nicht das eigentliche Gut gehandelt, sondern das Recht, eine bestimmte Menge zu einem bestimmten Preis (genannt Strike) zu kaufen/verkaufen ...

Physische Ausübung von Optionen sind wie bei den Termingeschäften oft nicht vorgesehen.

Cash Settlement von Optionen bedeutet wie bei den Termingeschäften, dass keine Ware geliefert wird bzw. diese überhaupt nicht existiert.



Optionen

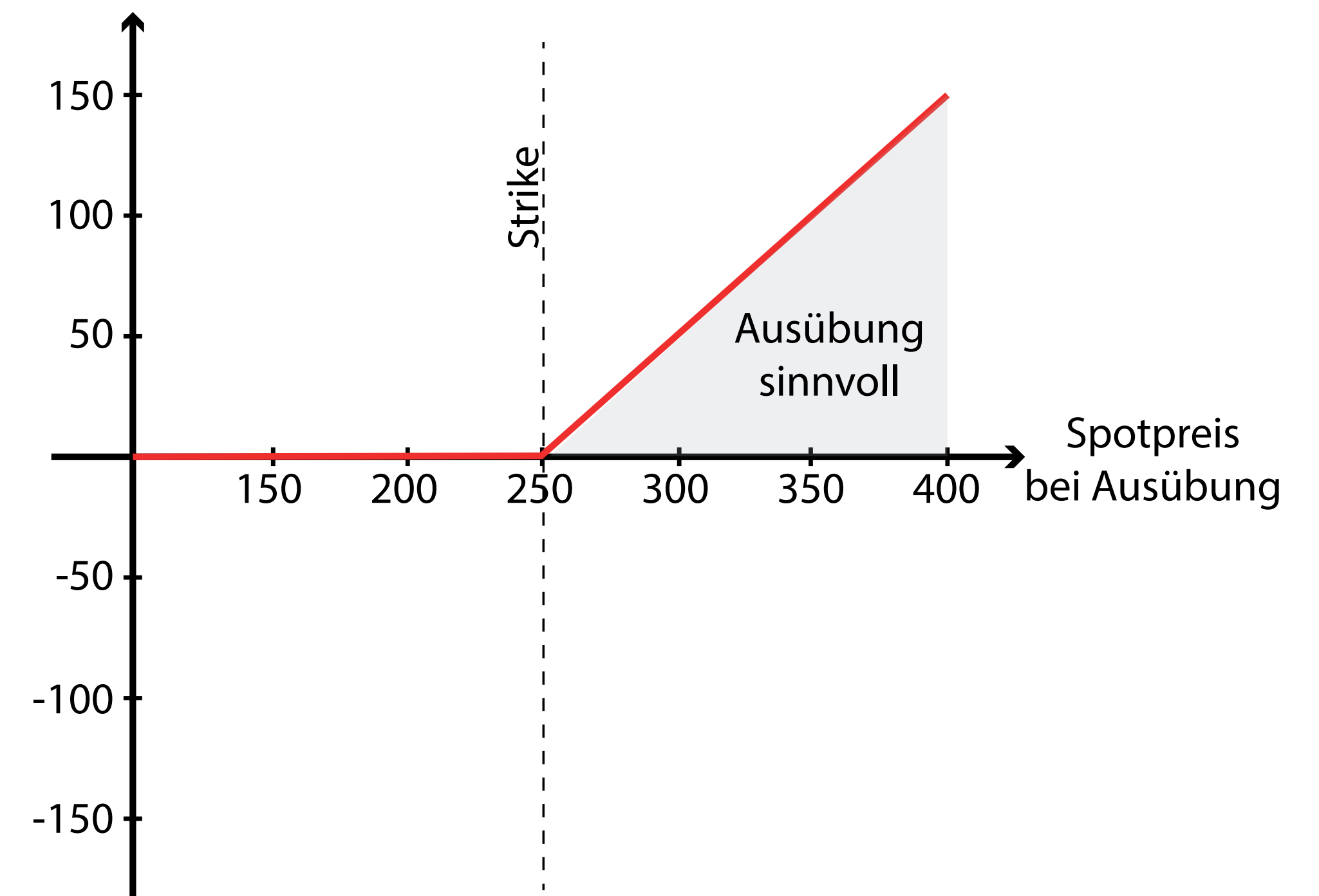
Käufersicht Call-Option für eine Tonne Weizen mit Strike 250€

Ist der Spotpreis unter 250€ ist eine Ausübung nicht sinnvoll. Bleibt der Spotpreis bis zur Fälligkeit unter dem Strike, verfällt die Option wertlos.

Ist der Spotpreis über 250€ kann ich die Option ausüben und verdiene durch den günstigeren Kaufpreis.

Die Auszahlung fällt nie unter 0! Bedeutet das, dass ich bei Optionsgeschäften kein Geld verlieren kann?

Auszahlung Call-Option auf 1t Weizen, Strike 250€



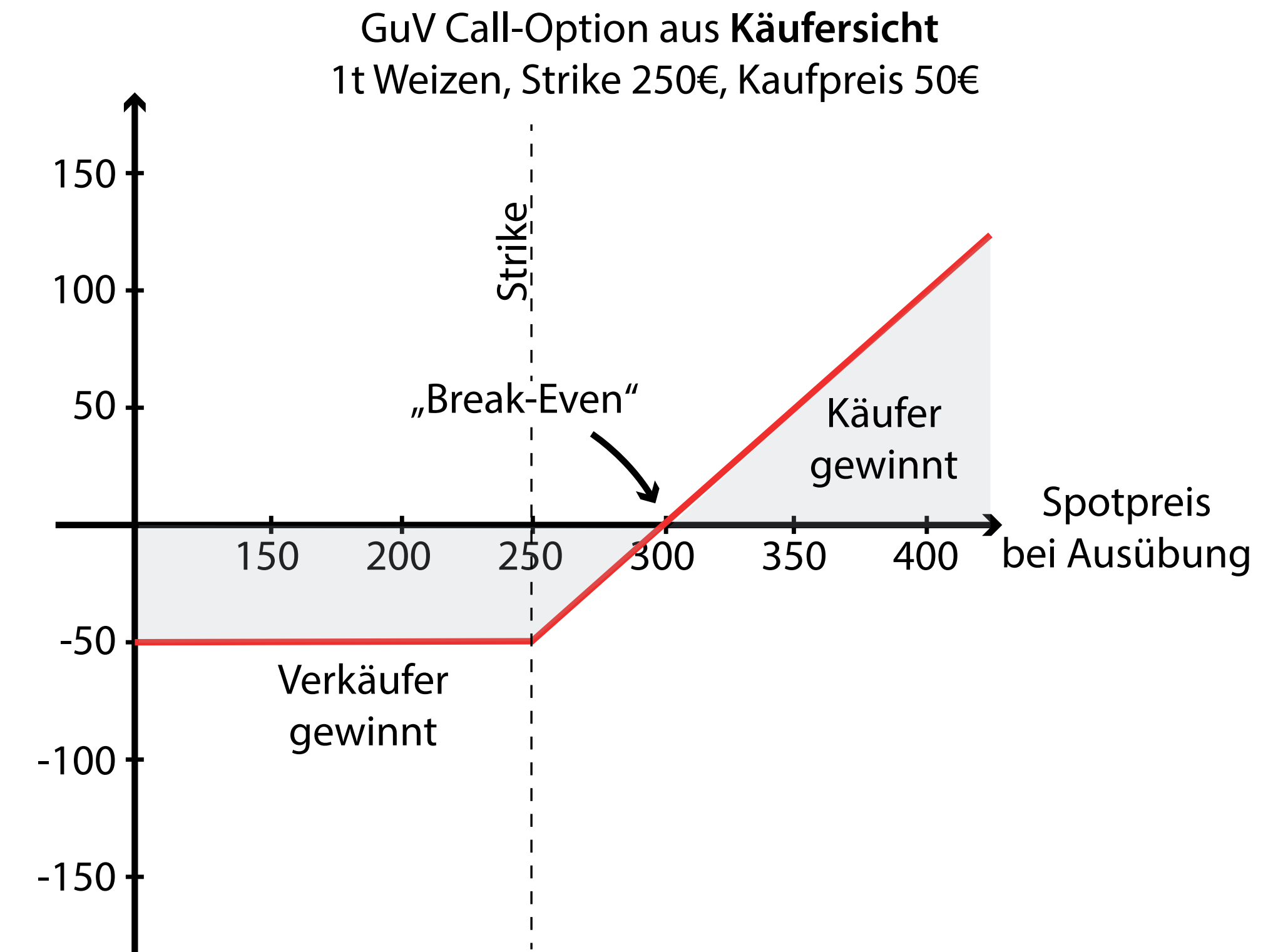
Optionen

Käufersicht Call-Option für eine Tonne Weizen mit Strike 250€

Ist der Spotpreis unter 250€ ist eine Ausübung nicht sinnvoll. Bleibt der Spotpreis bis zur Fälligkeit unter dem Strike, verfällt die Option wertlos.

Ist der Spotpreis über 250€ kann ich die Option ausüben und verdiene durch den günstigeren Kaufpreis.

Nein, da der Verkäufer der Option einen Preis für diese verlangt. Verfällt die Option wertlos, verliere ich den Kaufpreis.



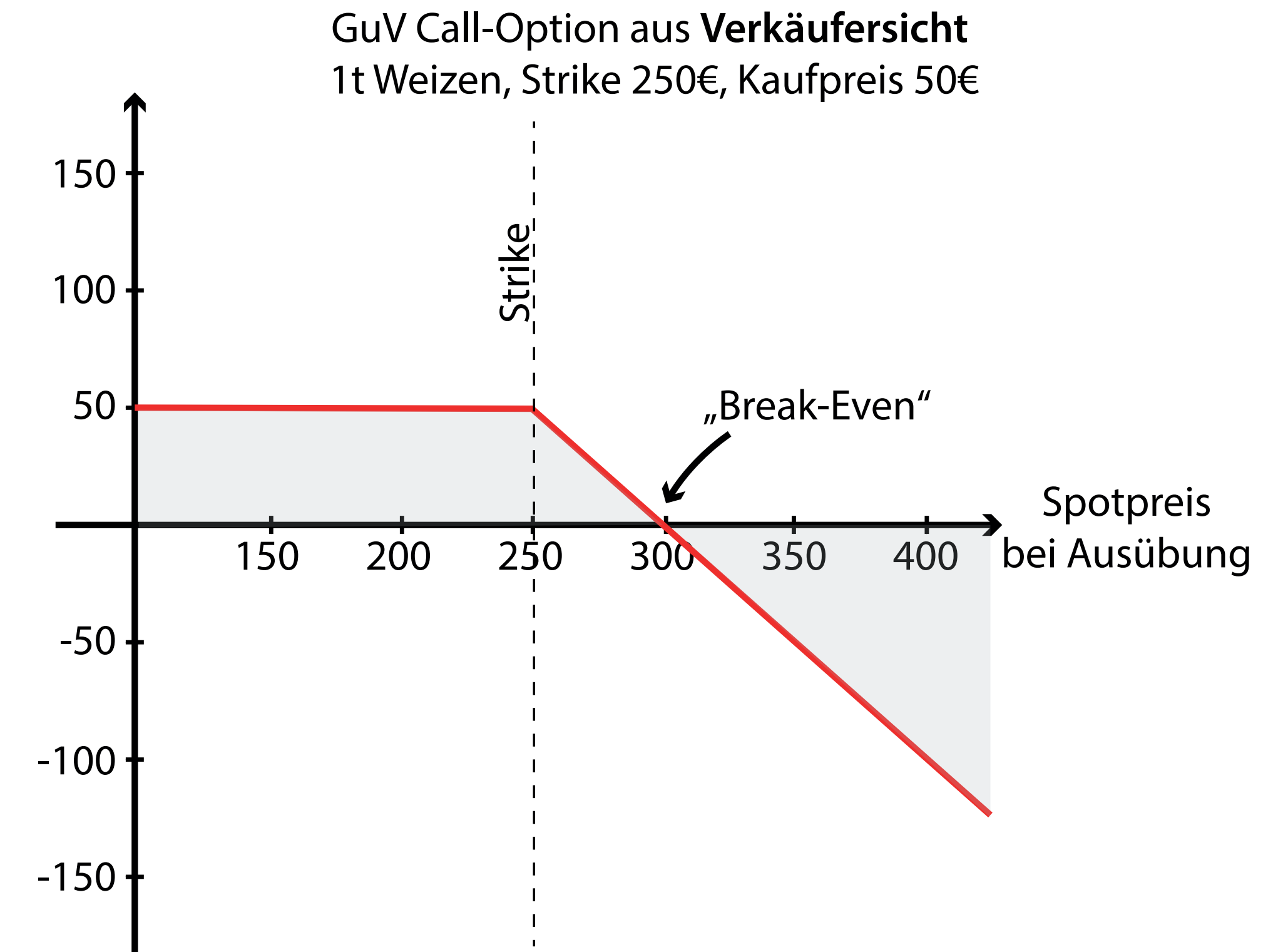
Optionen

Verkäufersicht Call-Option für eine Tonne Weizen mit Strike 250€

Bleibt der Spotpreis unter 250€ übt der Käufer nicht aus. Der Preis zu dem ich die Option verkauft habe, ist mein Gewinn.

Übt der Käufer die Option bei einem Spotpreis über 250€ aus, muss ich ihm die Differenz ausbezahlen. Mein Gewinn fällt ...

...und wird zu einem Verlust, wenn ich mehr auszahlen muss, als ich für die Option verlangt habe!



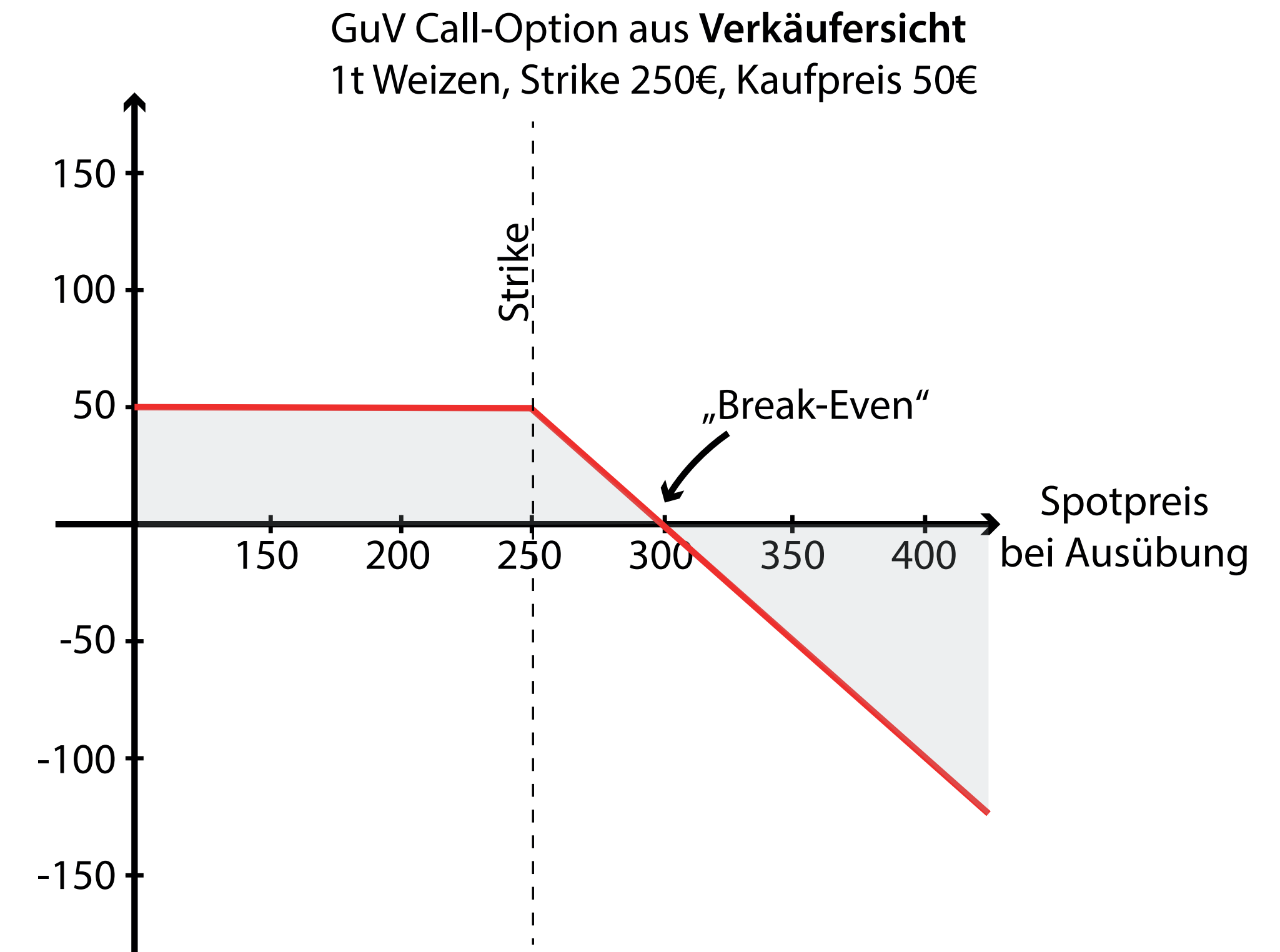
Optionen

Übersicht Call-Option für eine Tonne Weizen mit Strike 250€

Gewinn des Käufers ist die Differenz aus Strike und Spotpreis, abzüglich dem Kaufpreis der Option.

Gewinn des Verkäufers ist der Kaufpreis der Option minus dem Betrag was er dem Käufer auszahlen muss.

Der Verlust des Verkäufers ist theoretisch unbegrenzt!

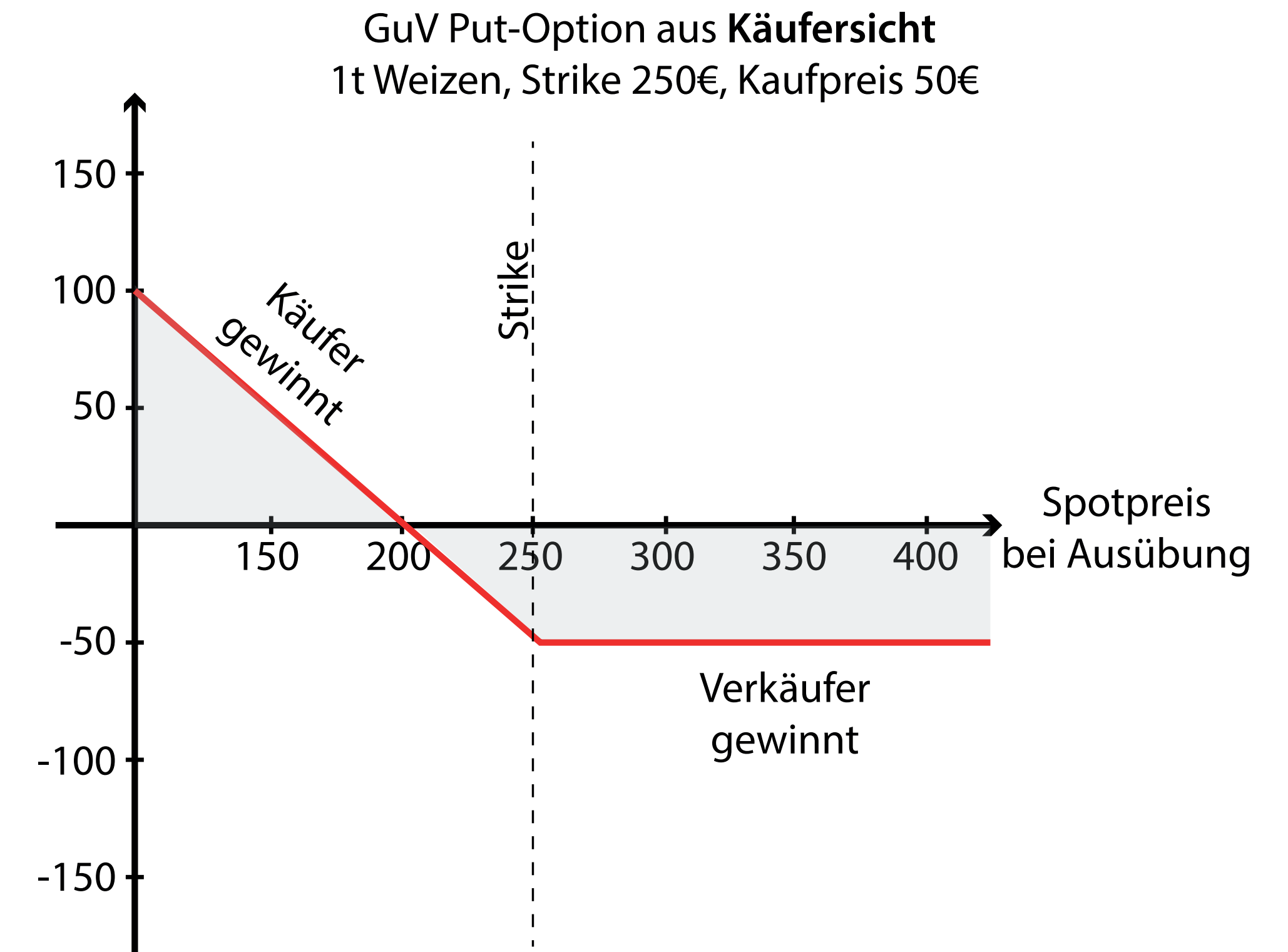


Optionen

Käufersicht Put-Option für eine Tonne Weizen mit Strike 250€

Ist der Spotpreis über 250€ ist eine Ausübung nicht sinnvoll. Bleibt der Spotpreis bis zur Fälligkeit über dem Strike, verfällt die Option wertlos.

Ist der Spotpreis unter 250€ kann ich die Option ausüben und verdiene durch den höheren Verkaufspreis.



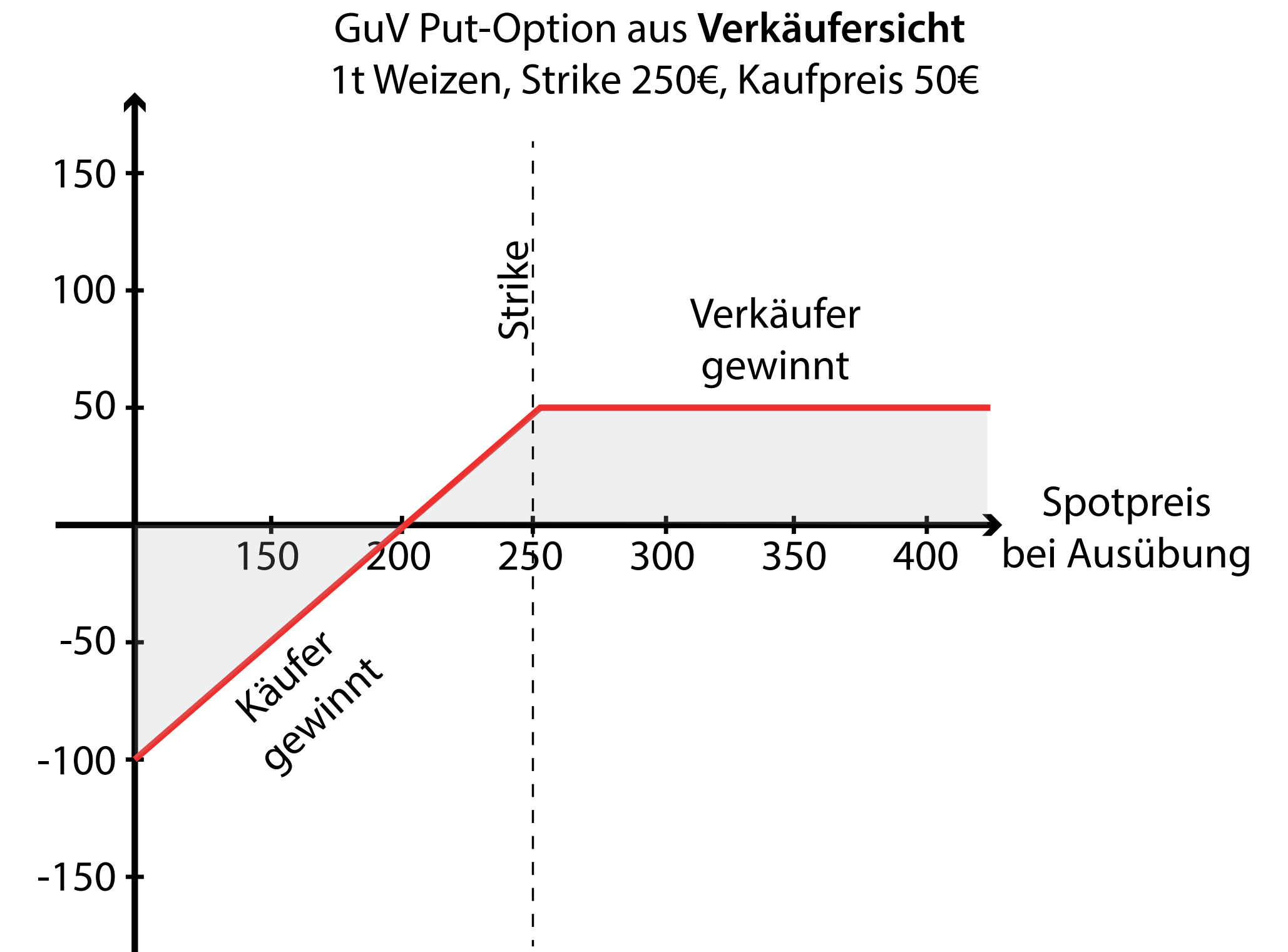
Optionen

Verkäufersicht Put-Option für eine Tonne Weizen mit Strike 250€

Bleibt der Spotpreis über 250€ übt der Käufer nicht aus. Der Preis zu dem ich die Option verkauft habe, ist mein Gewinn.

Übt der Käufer die Option bei einem Spotpreis unter 250€ aus, muss ich ihm die Differenz ausbezahlen. Mein Gewinn fällt ...

...und wird zu einem Verlust, wenn ich mehr auszahlen muss, als ich für die Option verlangt habe!



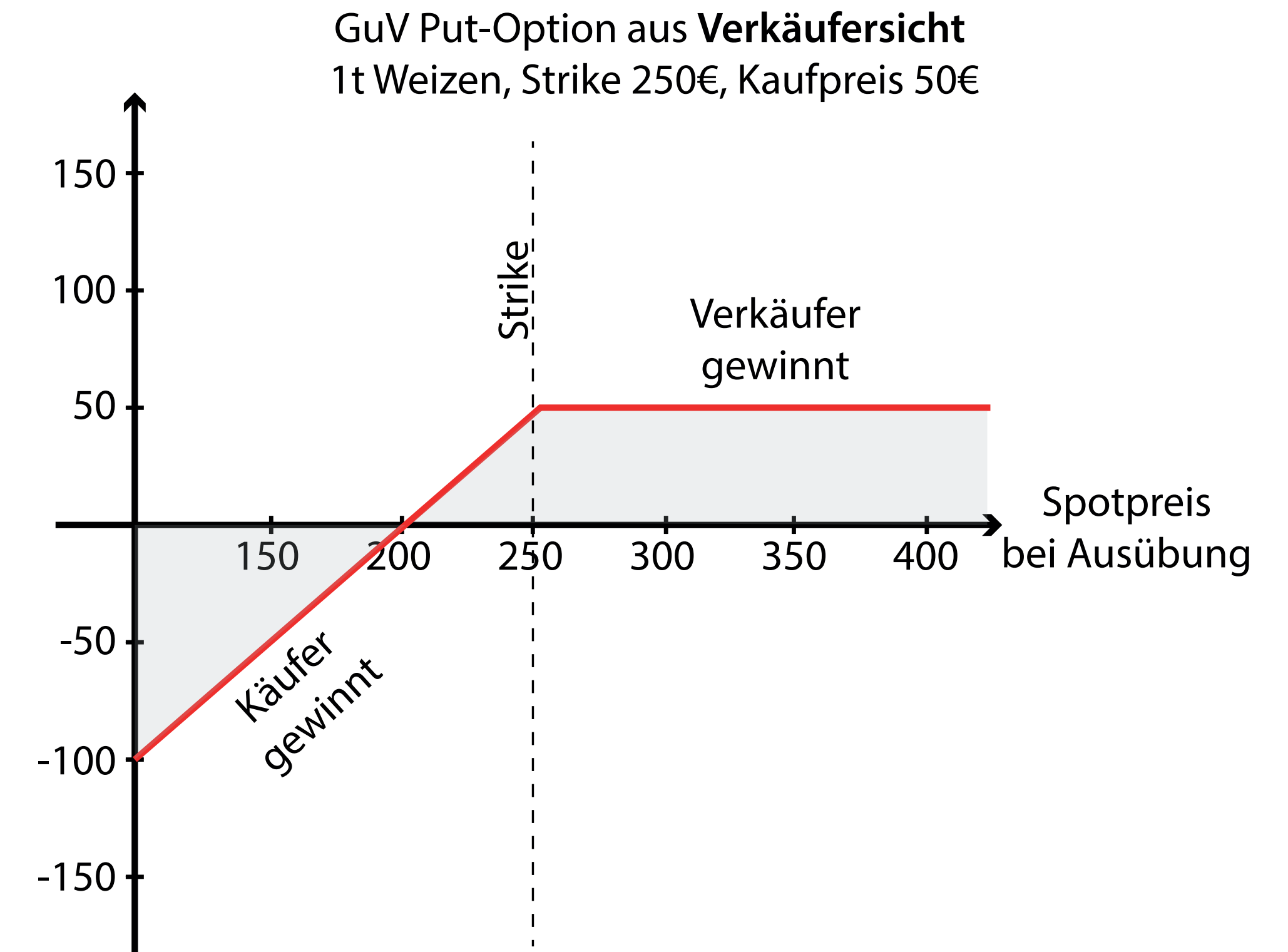
Optionen

Übersicht Put-Option für eine Tonne Weizen mit Strike 250€

Gewinn des Käufers ist die Differenz aus Strike und Spotpreis, abzüglich dem Kaufpreis der Option.

Gewinn des Verkäufers ist der Kaufpreis der Option minus dem Betrag den er dem Käufer auszahlen muss.

Der Verlust des Verkäufers ist auf den Strike begrenzt!



Optionen

Wie wird der Preis einer Option bestimmt? Abhängig von vielen Faktoren wie z.B.

Erwartete Preisentwicklung
 Preisschwankungen (Volatilität)
 Zinsen
 Liquidität des Marktes

Für europäische Optionen gibt es die Black-Scholes Gleichung, die allerdings einiges an Statistik voraussetzt ...

$$C(S_t, t) = N(d_1)S_t - N(d_2)Ke^{-r(T-t)}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-0.5z^2} dz$$

Optionen

Privatanleger haben keinen Zugang zu Terminkontrakten und Optionen, allerdings zu Zertifikaten, die diese nachbilden.

Zertifikate sind Inhaberschuldverschreibungen, deren Wert von Kurswerten anderer Assets (Aktien, Rohstoffe usw.) abgeleitet (engl. derive) werden.

Optionsscheine bilden die Optionen nach. Es gibt aber duzende weitere Arten von Zertifikaten.



Terminkontrakte & Optionen

- a) Sie kaufen eine Call-Option auf Öl mit einem Strike von 100\$ für 5\$. Wie hoch muss der Spot-Preis sein, damit sie bei Ausübung 25\$ Gewinn machen?
- b) Sie verkaufen eine Put-Option auf Öl mit einem Strike von 80\$ für 10\$. Welche Bedingung muss der Spot-Preis bei Ausübung erfüllen, damit sie keinen Verlust machen?
- c) Sie kaufen eine Call und eine Put-Option für jeweils 20€ auf Weizen mit einem Strike von 250€ pro Tonne. Welche Bedingung muss der Spot-Preis bei Ausübung erfüllen, damit sie keinen Verlust machen?

Terminkontrakte & Optionen

a) Spot-Preis: $100\$ + 25\$ + 5\$ = 130\$$

b) Der Spot-Preis darf nicht 70\$ fallen, da ich sonst mehr als den Optionspreis von 10\$ ausbezahlen muss.

c) Der Spot-Preis darf nicht zwischen 210€ und 290€ liegen, da ich sonst weniger ausbezahlt bekomme, als ich insgesamt für beide Optionen bezahlt habe.

Die Kombination ist auch als long straddle bekannt und wettet auf hohe Preisschwankungen.

Devisen

Der Markt für Devisen (oft als **FOREX** oder **FX-Markt** bezeichnet) ist der größte Finanzmarkt der Welt mit einem Handelsvolumen von ca. 5 Billionen Euro pro Tag.

Die wichtigsten Währungen am FOREX-Markt sind:

US-Dollar	USD	88.4% Anteil am Handelsvolumen
Euro	EUR	30.5% Anteil am Handelsvolumen
Yen	JPY	16.7% Anteil am Handelsvolumen
Pfund	GBP	12.9% Anteil am Handelsvolumen

Datenquelle: https://www.bis.org/statistics/rpfx22_fx.pdf



Devisen

Zusammengenommen kommen diese vier Währungen auf 148.5%. Ein Fehler im Skript oder bei der BIS?

Nein, eine Besonderheit des Währungshandels! Währungen werden in **Währungspaaren** gehandelt. Die Bezeichnungen dieser Paarungen folgen einem festen Schema:

$$\frac{\text{BASIS WÄHRUNG}}{\text{KURS WÄHRUNG}} = \text{KURS}$$
$$\text{EUR} / \text{USD} = 1.0408$$



Devisen

Vorsicht! Der Schrägstrich eines Währungspaares wird oft irr-

$$\text{EUR} / \text{USD} = 1.0408$$

tümlich als Bruchstrich gelesen.

Die Logik geht aber in genau die andere Richtung. Der oben gezeigte Kurs bedeutet:

- Ich bekomme 1.0408 US-Dollar pro Euro
- 1 EURO entspricht 1.0408 US-Dollar

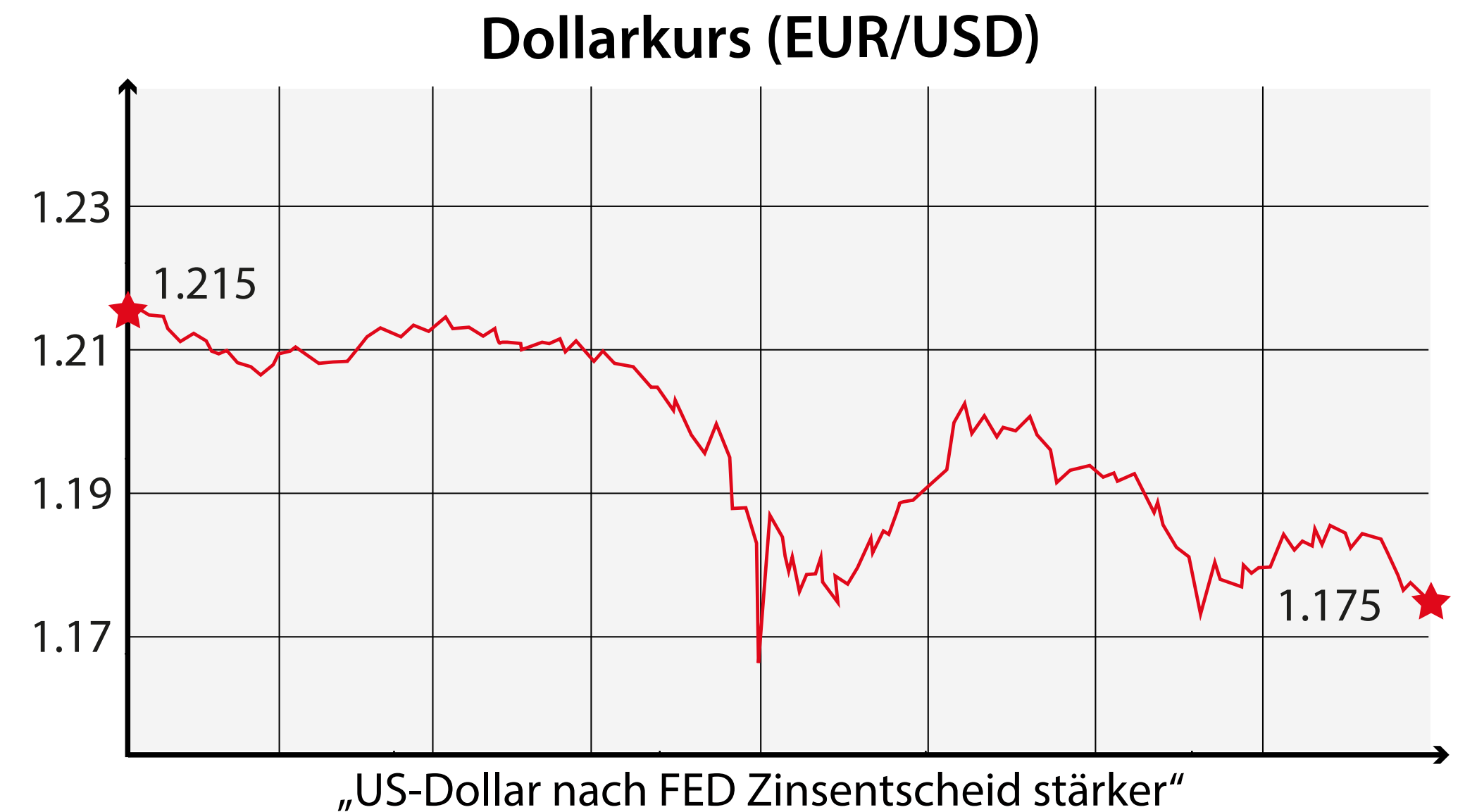


Devisen

Aus dem gleichen Grund können FOREX-Charts verwirrend sein. Rechts haben wir den Dollarkurs des Euros (EUR/USD).

Die Schlagzeile zum gezeigten Handelstag ist „US-Dollar nach FED Zinsentscheid stärker“, aber das Chart zeigt nach unten.

Das ist kein Fehler: Der Kurs dieser Paarung EUR/USD muss bei einem stärkeren US-Dollar fallen!



Devisen

Kurse zwischen weniger bedeutenden Währungen werden als **Kreuzkurs (Crossrate)** über ihre Dollar- oder Eurokurse berechnet. Beispiel NOK/ILS ...

$$\text{USD/NOK} = 8.61$$

Ein US-Dollar entspricht 8.61 Norwegischen Kronen.

$$\text{USD/ILS} = 3.28$$

Ein US-Dollar entspricht 3.28 neuen israelischen Schekeln.



Devisen

Wie berechnen wir den Kreuzkurs NOK/ILS aus den Dollarkursen?

$$\text{USD/NOK} = 8.61$$

$$\text{USD/ILS} = 3.28$$

Wir wollen wissen wie viele Schekel (ILS) ich für eine Krone (NOK) bekomme. Also teile ich Dollarkurs ILS durch Dollarkurs NOK.

$$3.28 / 8.61 = 0.38 \text{ Schekel pro Krone}$$



Devisen

Neben den Wechselkursen sind bei Devisengeschäften auch Realzinsen ein wichtiger Faktor.

Die Realzinsen r zeigen den Zins nach Berücksichtigung der Inflationsrate π .

$$i = r + \pi + r \pi$$



Die Inflationsrate wird in dieser Gleichung tatsächlich mit π bezeichnet. Damit ist dann natürlich nicht die Kreiszahl 3.1415 gemeint.

Devisen

Beispiel: Wechsle ich EUR in TRY und lege diese bei einer türkischen Bank an, erhalte ich 20% Zinsen. Die Währung ist allerdings mit 80% Inflation geplagt.

$$i = r + \pi + r \pi$$

$$0.2 = r + 0.8 + 0.8r$$

$$-0.6 = 1.8r$$

$$r = -33.3\%$$



Devisen

- a) Wie viel Euro sind 1 Mio. Yen Wert? Verwende einen Wechselkurs von $\text{EUR/JPY} = 140$
- b) Verwende die Eurokurse $\text{EUR/JPY} = 140$ und $\text{EUR/KRW} = 1400$ und die Kreuzkurse JPY/KRW und KRW/JPY zu berechnen.
- c) Wie hoch sind die Realzinsen, wenn eine risikolose Verzinsung von 4.0% einer Inflationsrate von 6.5% gegenübersteht?
- d) Wie hoch darf die Inflation sein, damit wir bei einem risikolosen Zins von 8% noch einen realen Zins von 2% erzielen?

Devisen

$$\text{a) } 1000000 \text{ JPY} \cdot \frac{1 \text{ EUR}}{140 \text{ JPY}} = 7142.86 \text{ EUR}$$

$$\text{b) } \text{KRW/JPY} = \frac{140 \text{ EUR/JPY}}{1400 \text{ EUR/KRW}} = 0.1 \quad \text{JPY/KRW} = \frac{1400 \text{ EUR/KRW}}{140 \text{ EUR/JPY}} = 10$$

Devisen

$$c) \quad i = r + \pi + r \pi$$

$$\Leftrightarrow i = \pi + (1+r)\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{i - \pi}{1 + \pi} \\ = \frac{0.04 - 0.065}{1.065} = -2.35\%$$

$$d) \quad i = r + \pi + r \pi$$

$$\Leftrightarrow i = r + (1+r)\pi$$

$$\Leftrightarrow \pi = \frac{i - r}{1 + r} \\ = \frac{0.08 - 0.02}{1.02} = 5.88\%$$

Tilgungsrechnung

Wir wechseln die Perspektive vom Investor zum Schuldner. Wir schauen uns folgende Möglichkeiten an, mit denen wir Fremdkapital aufnehmen können:

Kredit mit endfälliger Tilgung
Kredit mit Ratentilgung
Kredit mit Annuitätentilgung



Tilgung

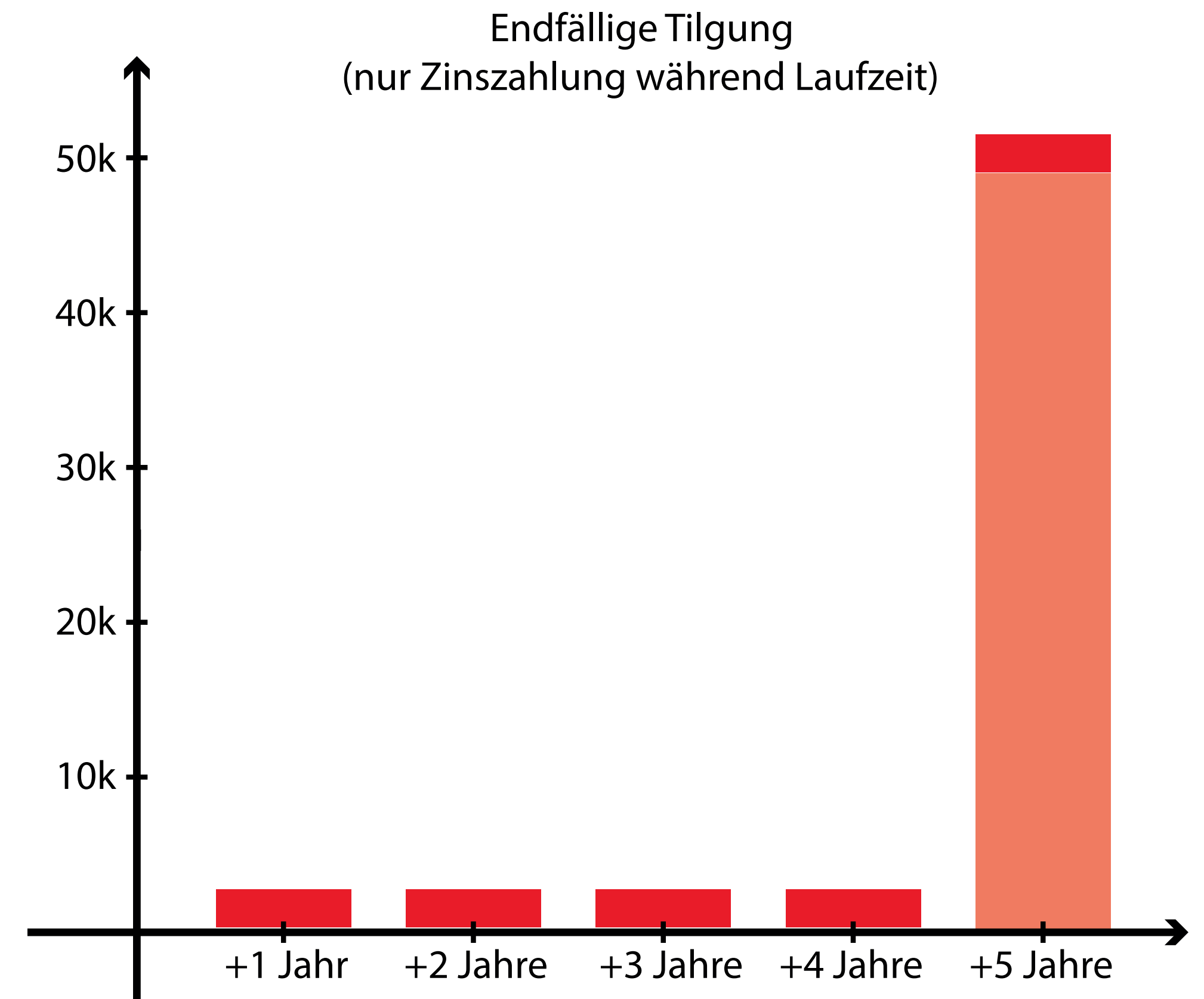
-
- Endfälliger Kredit
 - Ratenkredit
 - Annuitätenkredit
-

Tilgungsrechnung

Bei der endfälligen Tilgung werden über die gesamte Kreditlaufzeit nur Zinsen gezahlt.

Am Ende der Laufzeit wird die volle Kreditsumme zurückgezahlt.

Der Kredit mit endfälliger Tilgung ist damit mathematisch ähnlich zur Emission von Anleihen.



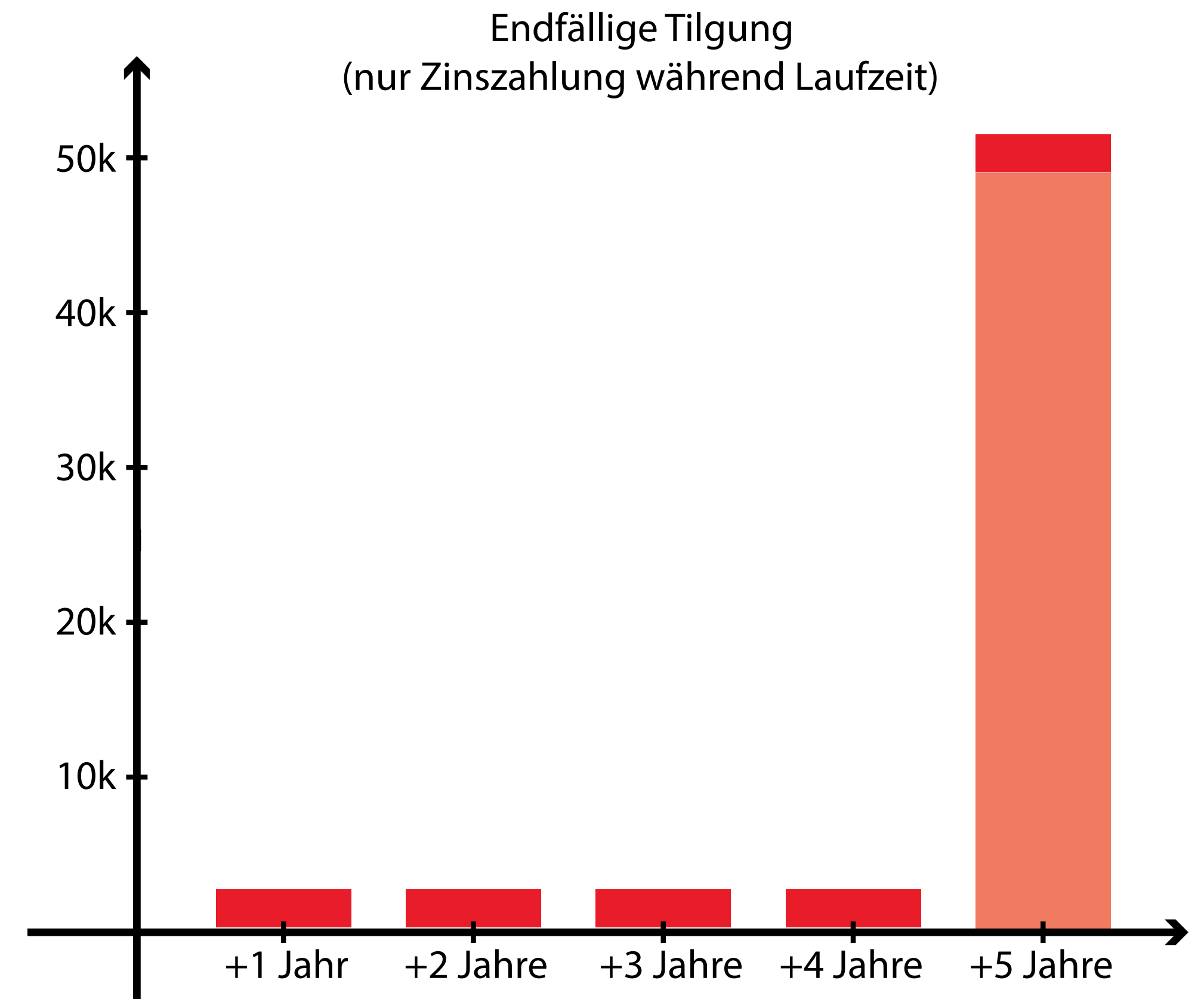
Tilgungsrechnung

Sei S die Höhe des Kredits, i der jährliche Zinssatz und n die Laufzeit in Jahren. Die Zinskosten Z sind die Summe aller Zinszahlungen:

$$Z = S \cdot i \cdot n$$

Beispiel: 50.000€ zu 5% über 5 Jahre

$$Z = 50000\text{€} \cdot 0.05 \cdot 5 = 12500\text{€}$$

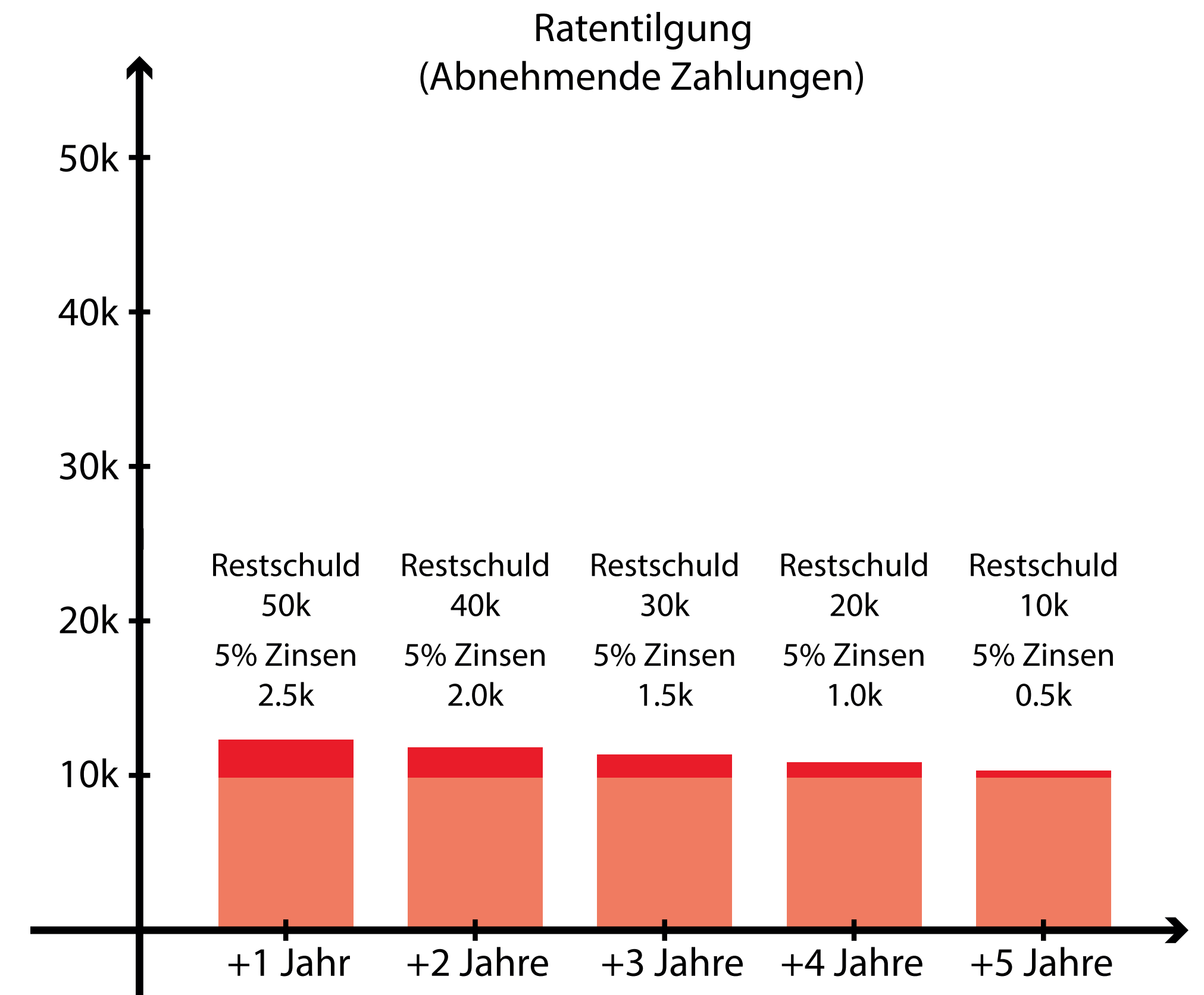


Ratentilgung

Bei der Ratentilgung werden über die gesamte Kreditlaufzeit Zins und Tilgung geleistet.

Die Höhe der Tilgung pro Jahr berechnet sich über den Quotienten Kreditbetrag durch Laufzeit.

Die Höhe der Zinszahlung hängt von der noch ausstehenden Restschuld ab, wird also mit der Zeit kleiner!



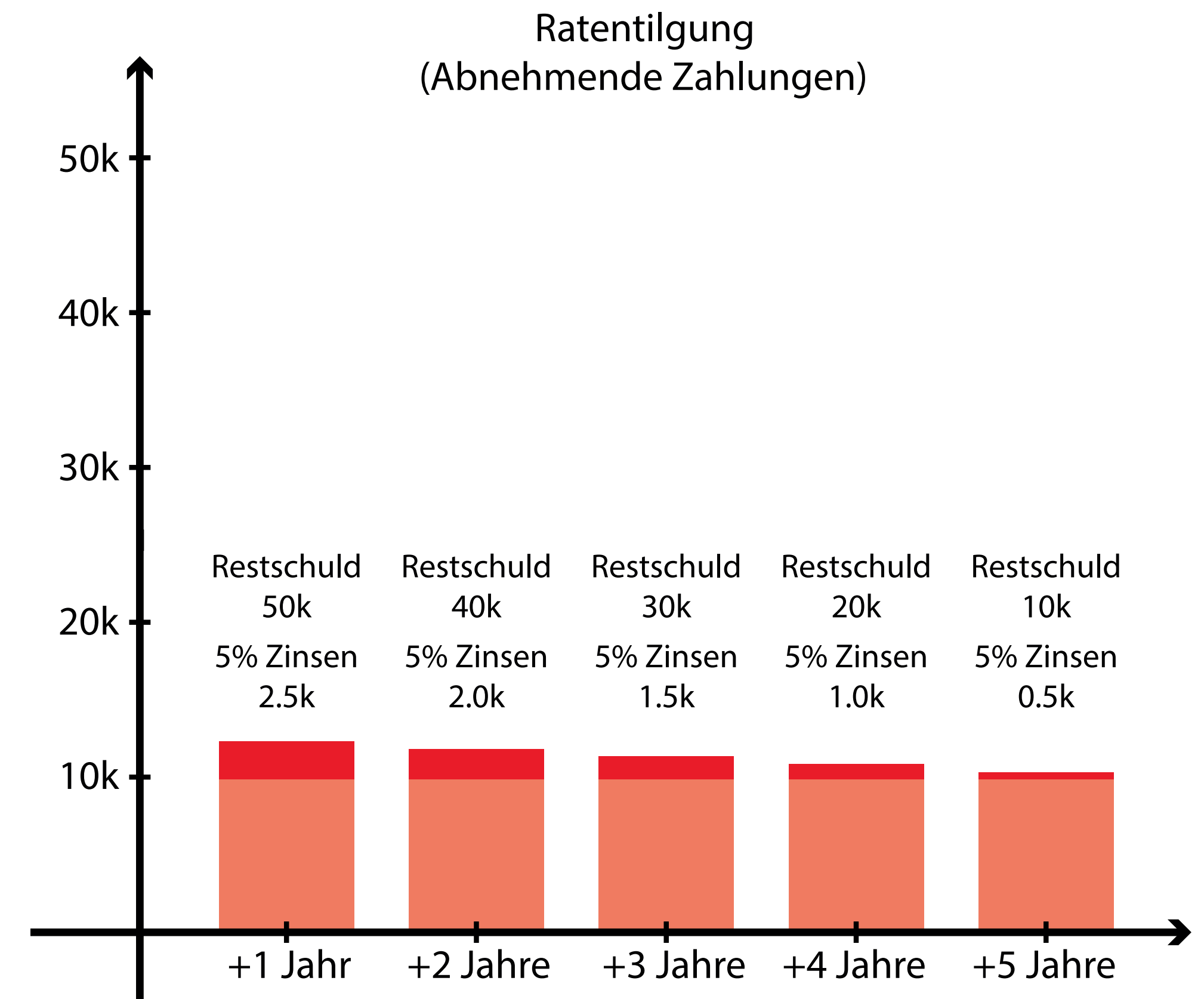
Ratentilgung

Vermutung: die Zinszahlung entspricht:

$$Z = S \cdot i \cdot \left[\frac{5}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \right]$$

In unserem Zahlenbeispiel also:

$$Z = 2500\text{€} \cdot 15/5 = 7500\text{€}$$



Ratentilgung

Für die allgemeine Berechnung der Zinskosten Z benötigen wir eine neue Reihe: die arithmetische Reihe ...

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{k=1}^n S \frac{k}{n} i \\ &= \frac{S \cdot i}{n} \sum_{k=1}^n k \end{aligned}$$

Arithmetische Reihe

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ratentilgung

Für die Berechnung der Zinskosten Z benötigen wir eine neue Reihe: die arithmetische Reihe ...

$$\begin{aligned} &= \frac{S \cdot i}{n} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{S \cdot i}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{S \cdot i \cdot (n+1)}{2} \end{aligned}$$

Arithmetische Reihe

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

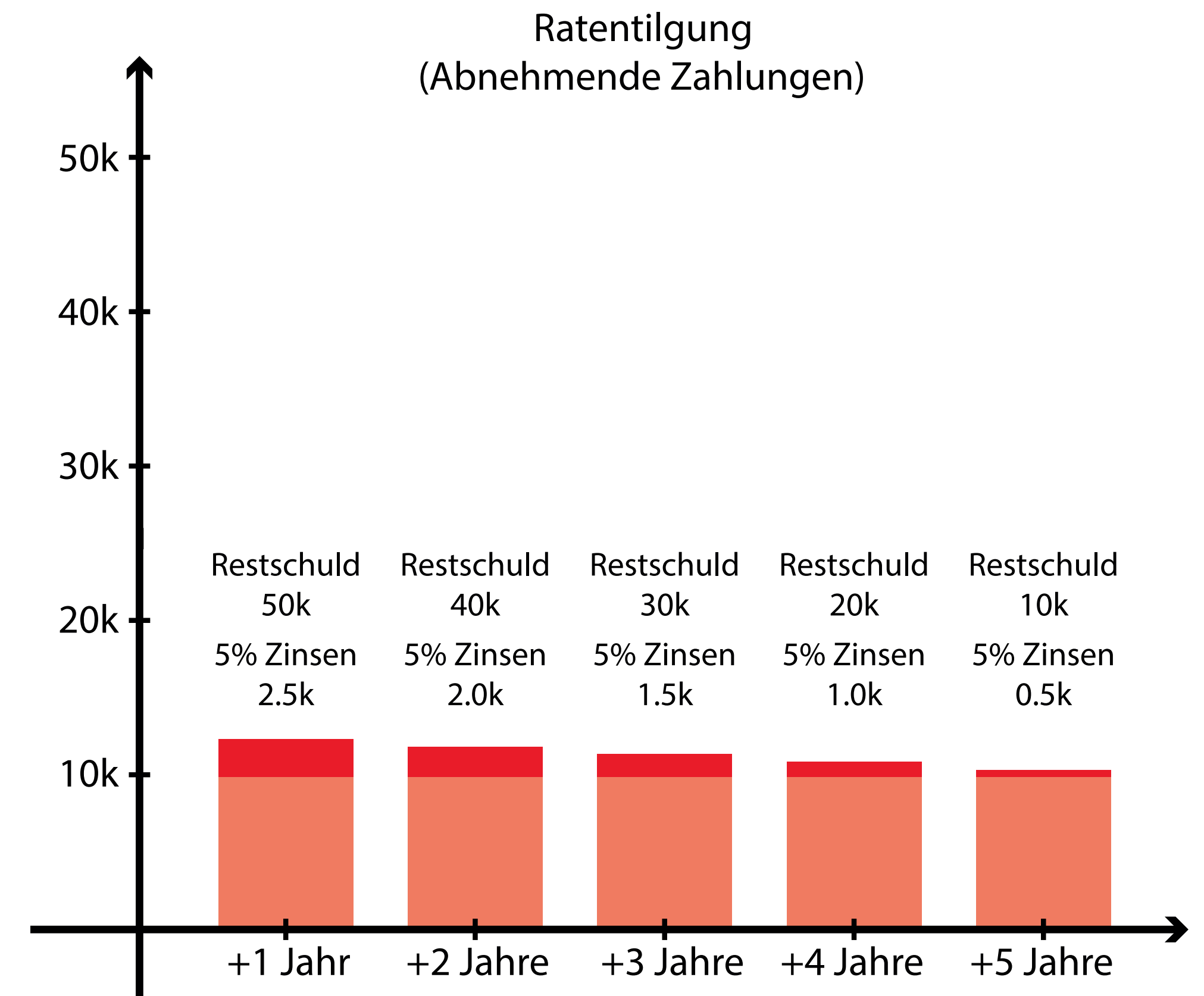
Ratentilgung

Wir finden die Formel:

$$Z = \frac{S \cdot i \cdot (n+1)}{2}$$

Mit den Beispielzahlen erhalten wir:

$$Z = \frac{50000\text{€} \cdot 0.05 \cdot (5+1)}{2} = 7500\text{€}$$

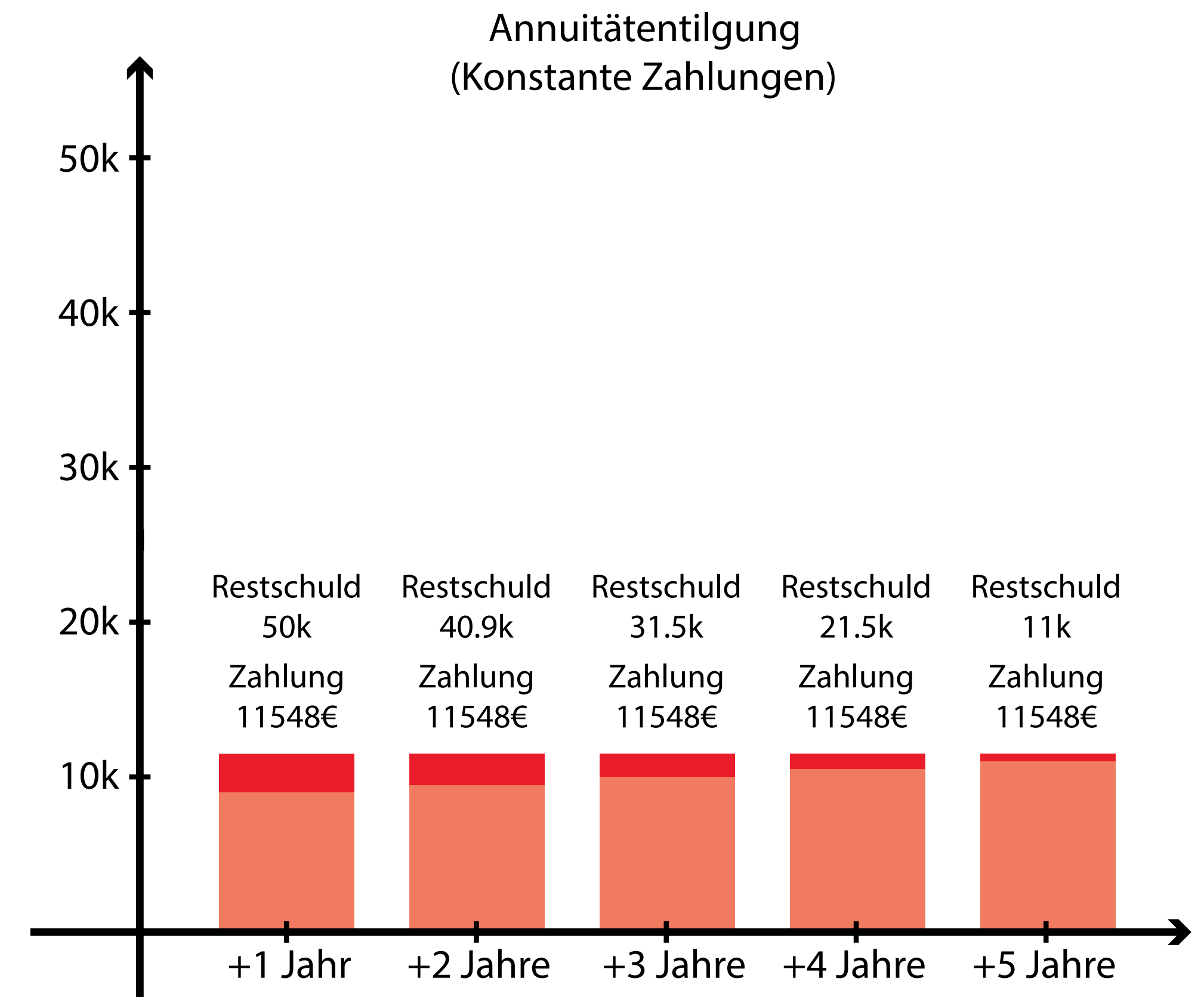


Annuitätentilgung

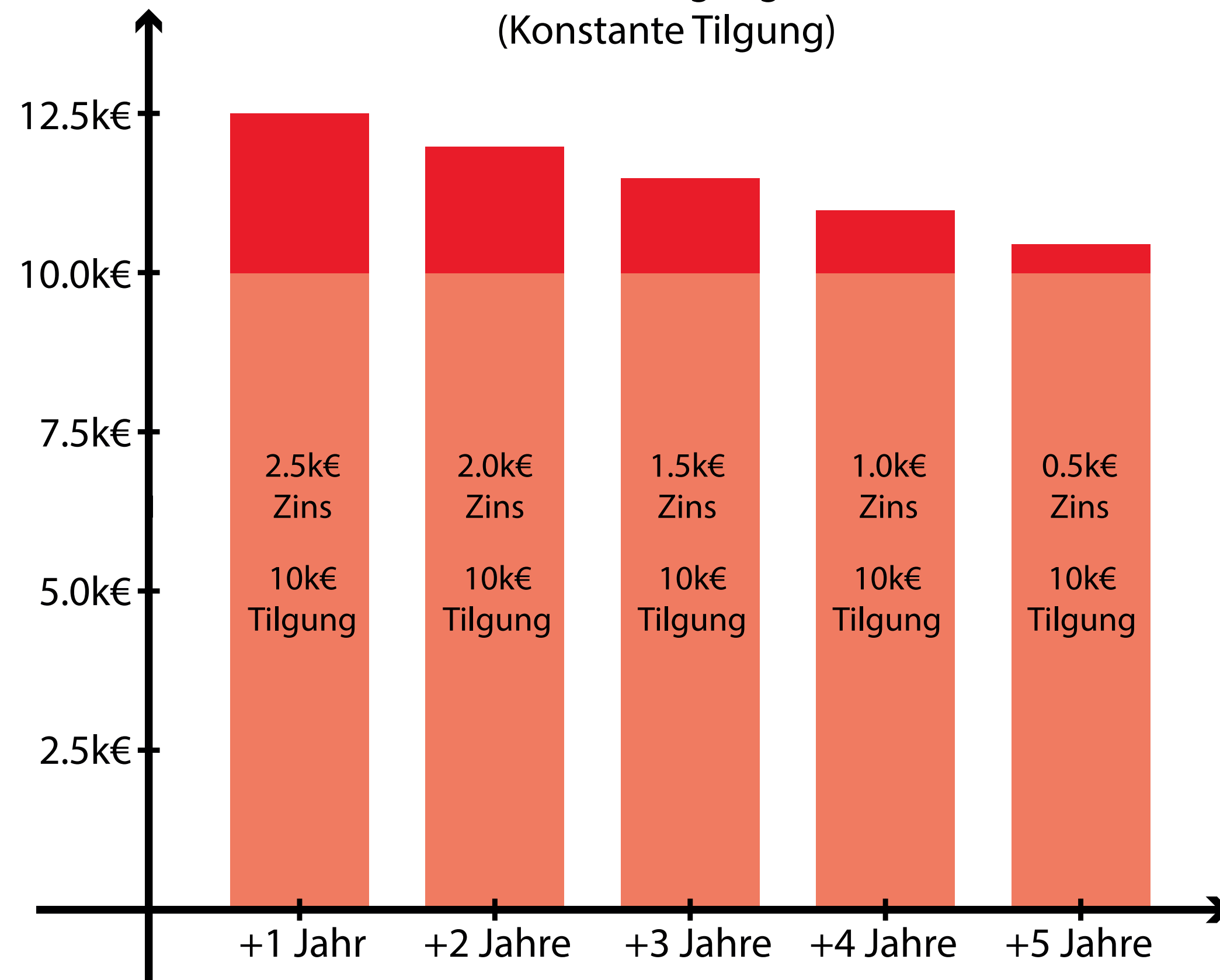
Bei der Annuitätentilgung werden über die gesamte Kreditlaufzeit Zins und Tilgung geleistet.

Die Höhe der Zinszahlung hängt von der noch ausstehenden Restschuld ab, wird also mit der Zeit kleiner.

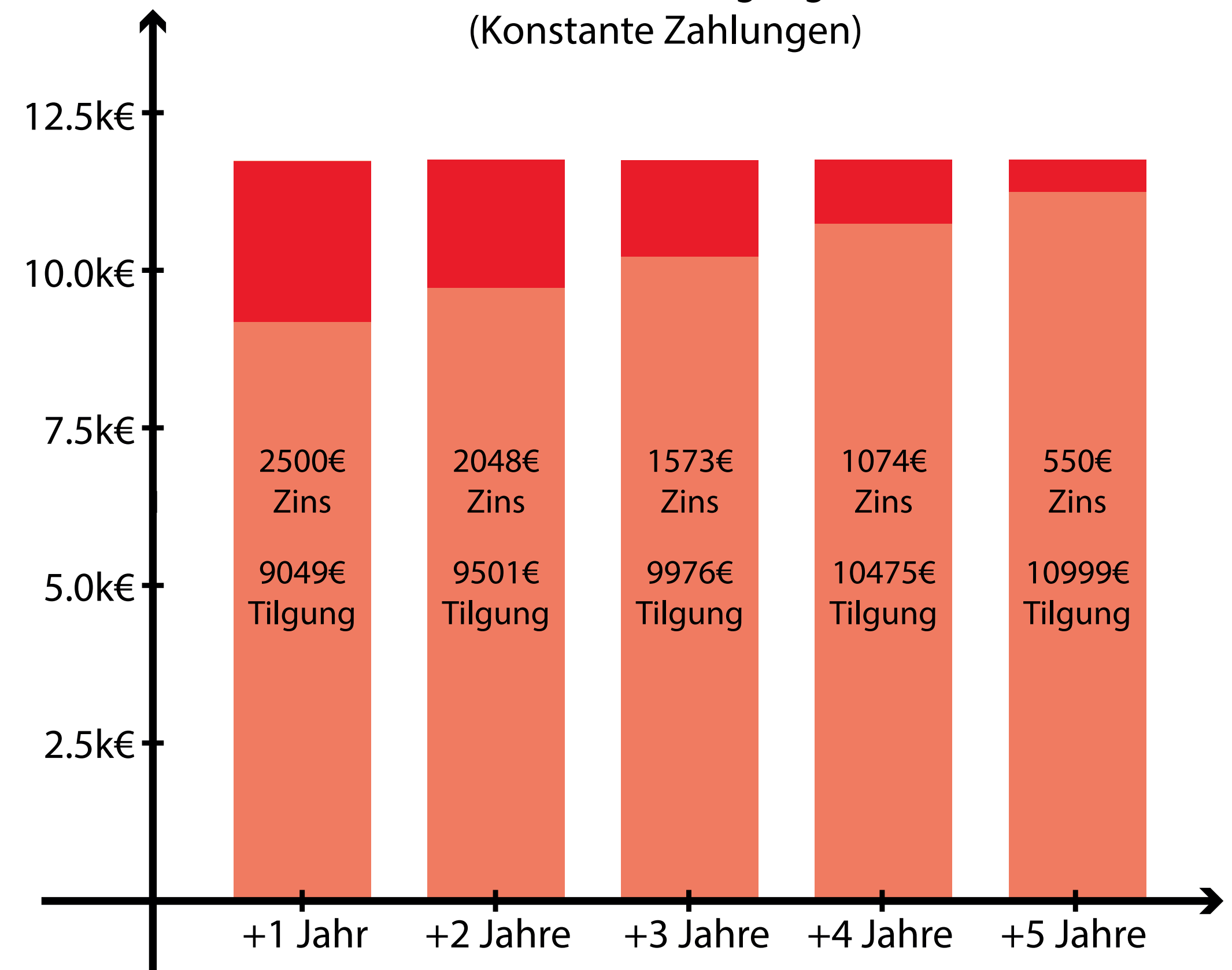
Der regelmäßig zu zahlende Betrag wird jedoch bis zum Ende konstant gehalten. Wir tilgen gegen Ende dadurch schneller!



Ratentilgung
(Konstante Tilgung)



Annuitätentilgung
(Konstante Zahlungen)



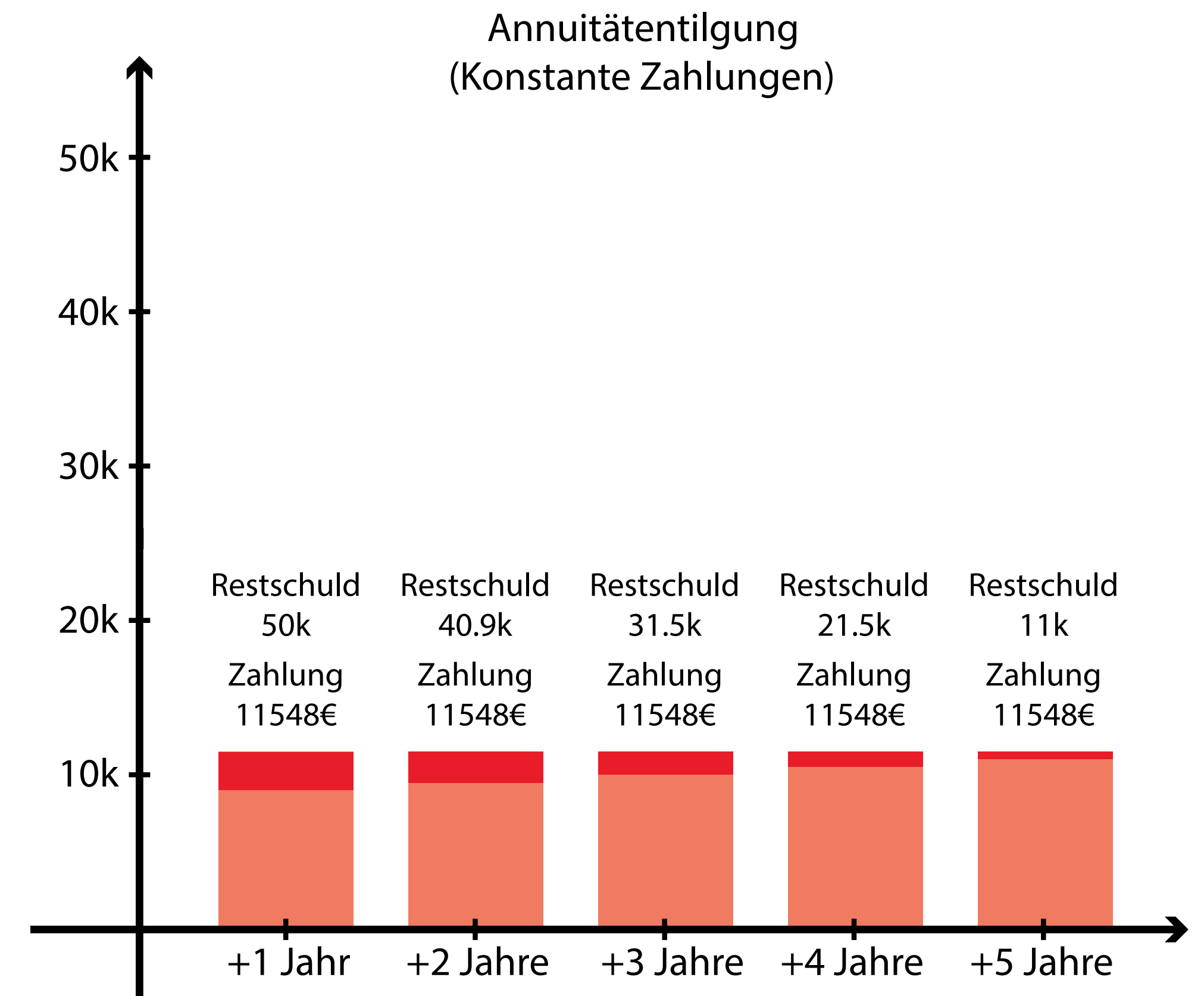
Annuitätentilgung

Die Formel zur Berechnung der Annuität ist:

$$A = S \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Mit unseren Zahlenwerten erhalten wir:

$$A = 50000\text{€} \frac{0.05(1.05)^5}{(1.05)^5 - 1} = 11548.74\text{€}$$

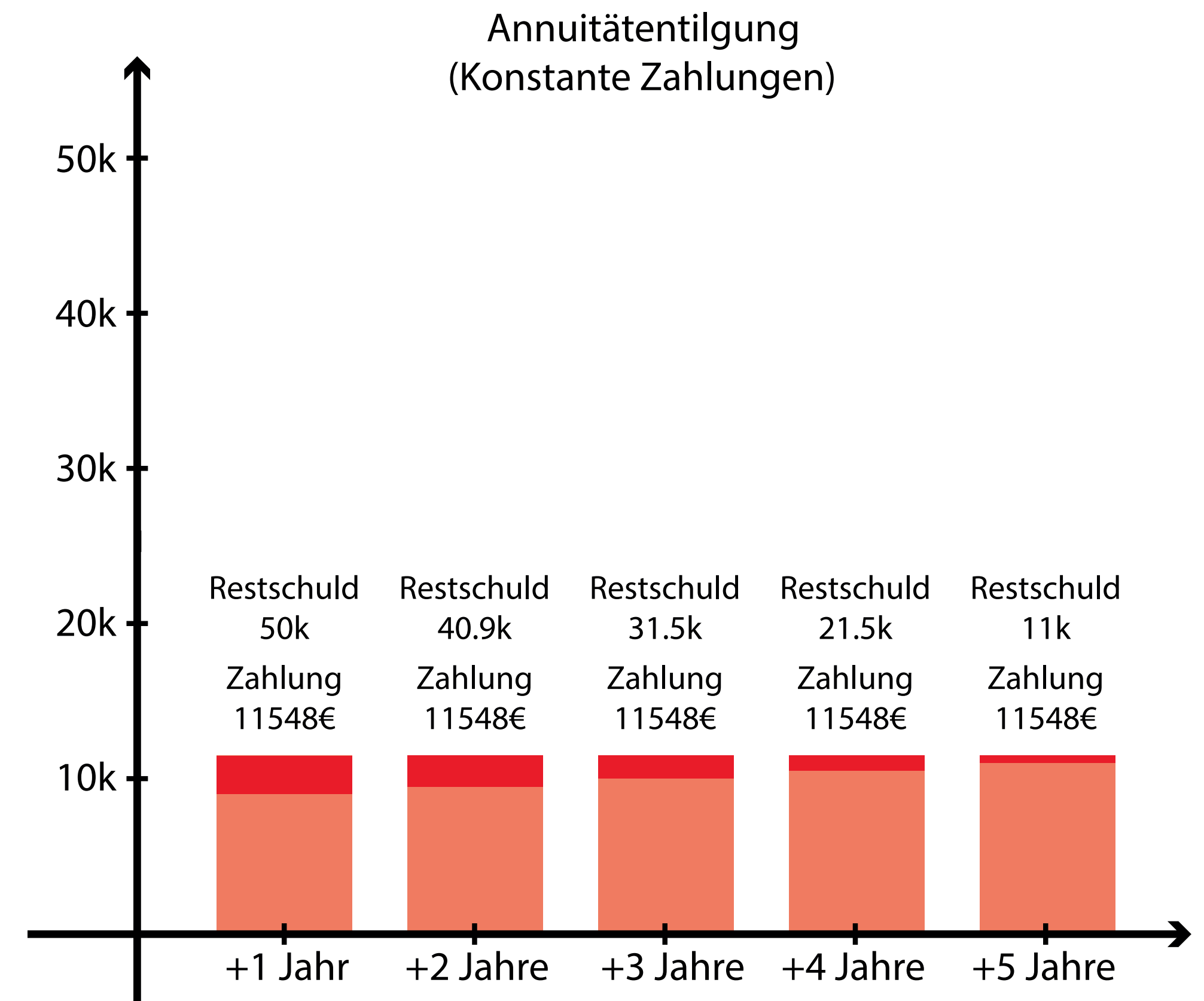


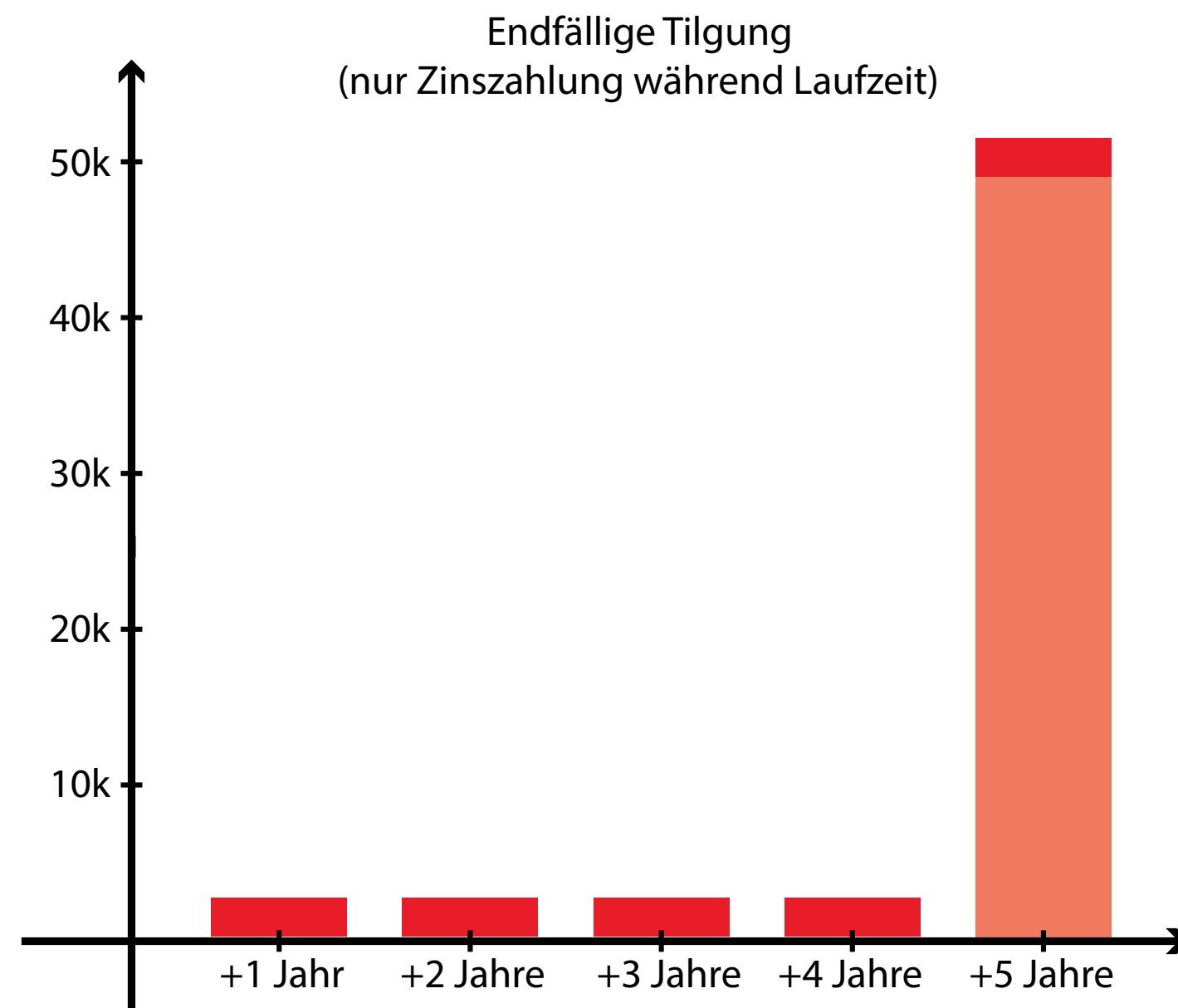
Annuitätentilgung

Damit erhalten wir auch die Zinskosten:

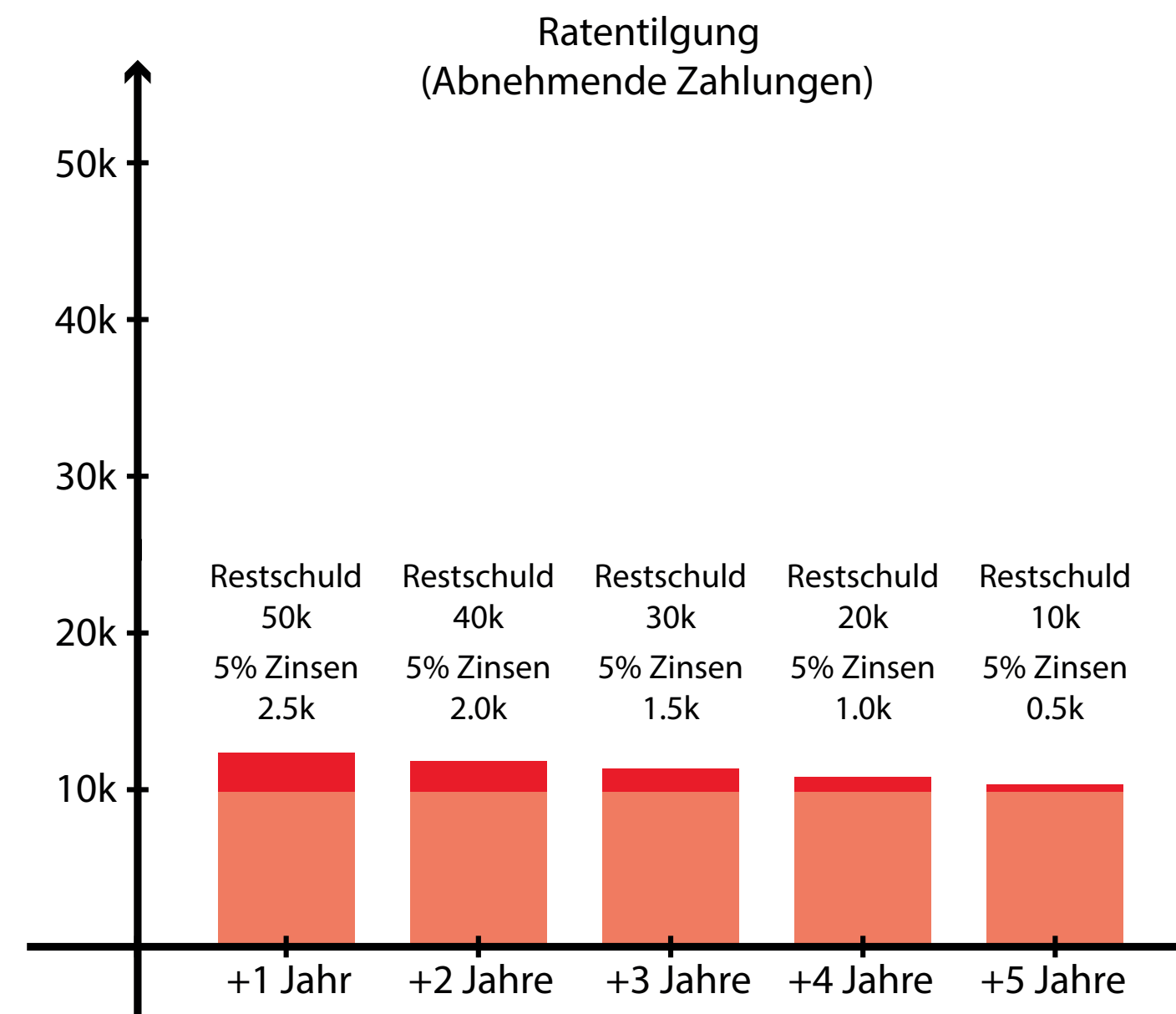
$$Z = nA - S$$

$$Z = 57744\text{€} - 50000\text{€} = 7744\text{€}$$

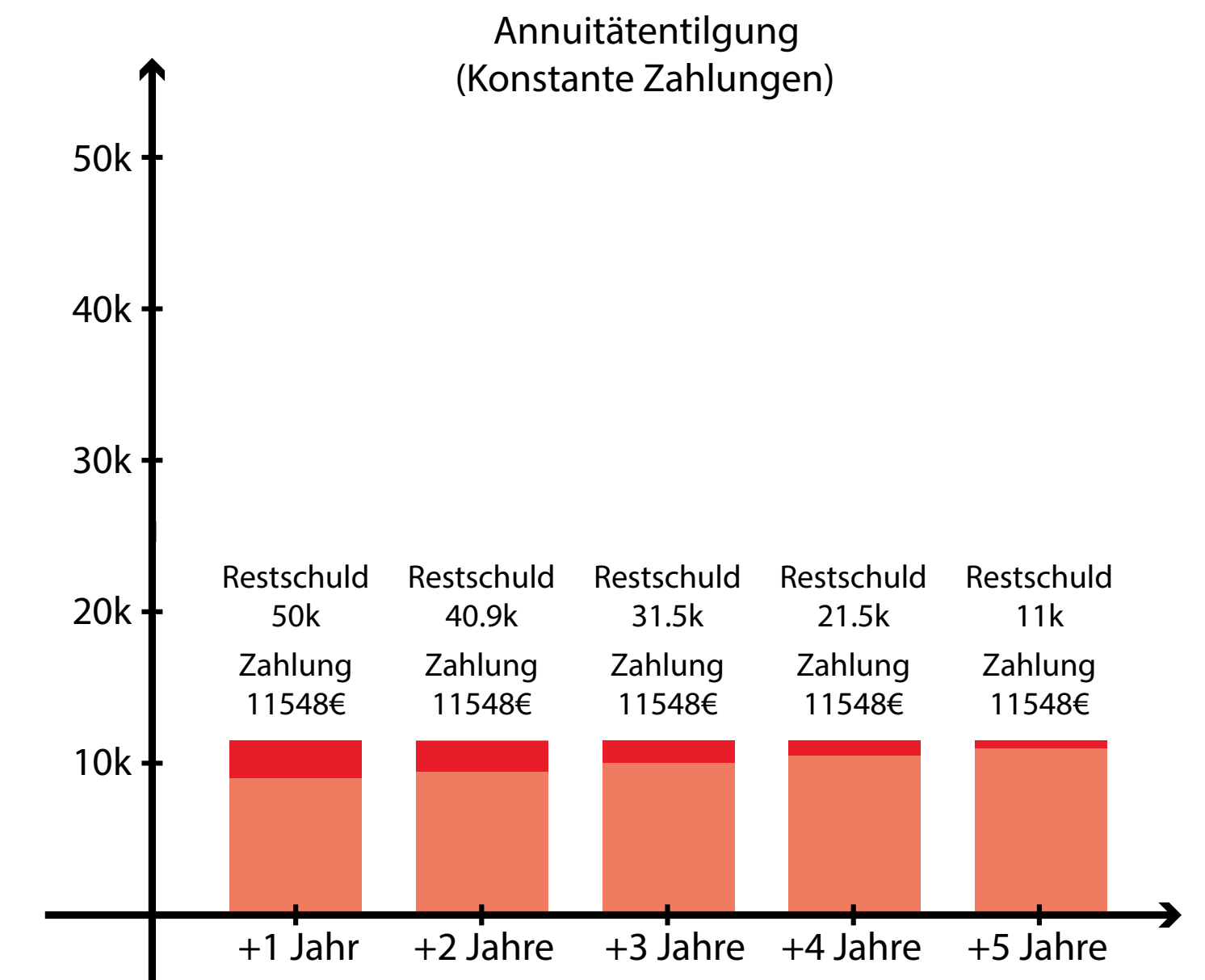




Endfällige Tilgung
 $Z=12500\text{€}$



Ratentilgung
 $Z=7500\text{€}$



Annuitätentilgung
 $Z=7744\text{€}$

Tilgungsrechnung

Neben Zins, Zinstermen und Tilgungsart gibt es in der Realität etliche Parameter die einen Kredit attraktiv oder unattraktiv machen können:

Agio & Disagio (Auszahlung entspricht nicht Schuldbetrag)

Recht der Sondertilgung

Tilgungspausen

Steuerliche Absetzbarkeit

Fördergelder (z. B. bei KfW Krediten)

Kommt in den BWL-Veranstaltungen ggf. dran!



Tilgungsrechnung

Sie nehmen ein 20 jähriges Darlehn über 120000€ mit einem jährlichen Zinssatz von 2% auf.

- a) Berechnen Sie die Zinslast bei endfälliger Tilgung.
- b) Berechnen Sie die Zinslast und die Höhe der Tilgungsrate bei jährlicher Ratentilgung.
- c) Berechnen Sie die Zinslast bei jährlicher Annuitätentilgung. Berechnen Sie dabei zuerst die Höhe der Annuität.

Tilgungsrechnung

a) $Z = S \cdot i \cdot n = 120000\text{€} \cdot 0.02 \cdot 20 = 48000\text{€}$

b) $\text{Tilgung} = \frac{120000\text{€}}{20} = 6000\text{€}$

$$Z = \frac{S \cdot i \cdot (n+1)}{2} = \frac{120000\text{€} \cdot 0.02 \cdot 21}{2} = 25200\text{€}$$

c) $A = S \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 120000\text{€} \frac{0.02 \cdot 1.02^{20}}{1.02^{20} - 1} = 7338.81\text{€}$

$$Z = nA - S = 26776.20\text{€}$$