

## Übersicht und Hilfsmittel

Diese Übungsklausur und die dazugehörige Lösungsskizze dient Ihrer Klausurvorbereitung. Versuchen Sie die Klausur innerhalb von 60 Minuten mit den folgenden Hilfsmitteln zu lösen: Stifte, Lineale/Geodreiecke, nicht internetfähiger Taschenrechner, und gedruckte oder handschriftliche Unterlagen in beliebiger Menge

Korrigieren Sie anschließend ihre Antworten mithilfe der Lösungsskizze.

Mengen	Analysis I	Analysis II	Investition	Tilgung	Gesamt
von 5	von 15	von 10	von 15	von 5	von 50

## Aufgabe 1 Mengenlehre

**5 Punkte**

a) Berechnen Sie die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} & \{1,2,3\} \setminus (\{2,3,4\} \setminus \{3,4,5\}) \\ &= \{1,2,3\} \setminus \{2\} & [0.5 \text{ Punkte}] \\ &= \{1,3\} & [0.5 \text{ Punkte}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{1,2,5\} \cup (\{4,6,8\} \setminus \{1,2,3,4\}) \\ &= \{1,2,5\} \cup \{6,8\} & [0.5 \text{ Punkte}] \\ &= \{1,2,5,6,8\} & [0.5 \text{ Punkte}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{2,4,6\} \setminus (\{1,2,3\} \cap \{1,4,7\}) \\ &= \{2,4,6\} \setminus \{1\} & [0.5 \text{ Punkte}] \\ &= \{2,4,6\} & [0.5 \text{ Punkte}] \end{aligned}$$

b) Nennen Sie eine Menge M die folgende Aussage erfüllt:

$$\{1,2,3\} \setminus M = \{1,2,3\} \text{ richtig ist jede Menge ohne 1,2 und 3} \quad [1 \text{ Punkt}]$$

c) Nennen Sie eine Menge die eine Teilmenge, aber keine echte Teilmenge von  $N = \{2,4,7\}$  ist!

$$\text{Es gibt nur eine richtige Antwort: } \{2,4,7\} \quad [1 \text{ Punkt}]$$



Aufgabe 2 Analysis I

15 Punkte

a) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der folgenden Funktion an. Berechnen Sie anschließend ihre Nullstellen, d.h. alle Werte für welche die Gleichung  $f(x)=0$  gilt. Geben Sie abschließend die Grenzwerte für  $x$  gegen minus und plus unendlich an!

$$f(x) = x^2 - x + 0.25 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

[je 0.5 Punkte für Definitions- und Wertebereich]

$$f(x) = x^2 - x + 0.25 \stackrel{!}{=} 0$$

[0.5 Punkte]

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-1}}{2} = \frac{1 \pm 0}{2}$$

[1 Punkt]

Nur eine Nullstelle bei  $x = 0.5$

[0.5 Punkte]

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

[je 1 Punkt]

b) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der folgenden Funktion an. Berechnen Sie alle Extremstellen und Wendepunkte und unterscheiden Sie bei den Extrema in lokal und global. Argumentieren Sie bei letzterem mit Grenzwerten!

$$g(x) = 4x^3 - 3x^2 \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

[je 0.5 Punkte für Definitions- und Wertebereich]

$$g'(x) = 12x^2 - 6x$$

[1 Punkt]

$$g''(x) = 24x - 6$$

[1 Punkt]

$$g'(x) = 12x^2 - 6x \stackrel{!}{=} 0$$

[0.5 Punkte]

$$\iff x(12x - 6) = 0$$

[0.5 Punkte]

$$\implies x_1 = 0, x_2 = 0.5$$

[je 0.5 Punkte]

$$g''(0) = 24 \cdot 0 - 6 = -6 \quad \text{Maximum!}$$

[0.5 Punkte]

$$g''(0.5) = 24 \cdot 0.5 - 6 = 6 \quad \text{Minimum!}$$

[0.5 Punkte]

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

[je 0.5 Punkte]

Extrema müssen lokal sein!

[1 Punkt]

c) Geben Sie den Grenzwert für  $x$  gegen minus und plus unendlich an! Wir haben einen Polynombruch, wobei Zähler und Nenner die gleiche stärkste Potenz haben. Die Grenzwerte sind daher beide....

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 3/8 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 3/8$$

[je 1 Punkt]



Aufgabe 3 Analysis II

10 Punkte

a) Berechne alle partiellen Ableitung der folgenden Funktionen

Funktion  $f(x,y,z) = 3x^2y - \sqrt{z^2x} = 3x^2y - z\sqrt{x}$  [je 1 Punkt]

Partielle Ableitung nach x

Partielle Ableitung nach y

Partielle Ableitung nach z

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - \frac{z}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sqrt{x}$$

Funktion  $g(x,y) = \ln(xy^2) + x \ln(x)$  [je 1.5 Punkte]

Partielle Ableitung nach x

Partielle Ableitung nach y

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x} + \ln(x) + 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2xy \frac{1}{xy^2} = \frac{2}{y}$$

b) Stelle die Lagrangefunktion und die notwendigen Bedingungen für folgendes Optimierungsproblem auf. Das Gleichungssystem das dabei entsteht müssen Sie NICHT lösen.

$$\max h(x,y) = 5x + 2xy$$

$$\text{s.t. } 4x+8y \leq 100$$

$$4x+8y \leq 100$$

$$\iff 4x+8y - 100 \leq 0$$

$$\iff \lambda[4x+8y - 100] \leq 0$$

$$L(x,y,\lambda) = 5x + 2xy + \lambda[4x+8y - 100]$$
 [1.5 Punkte]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5 + 2y + 4\lambda \stackrel{!}{=} 0$$
 [1 Punkt]

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 8\lambda \stackrel{!}{=} 0$$
 [1 Punkt]

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 4x+8y - 100 \stackrel{!}{=} 0$$
 [0.5 Punkte]



**Aufgabe 4 Zins- & Investitionsrechnung**

**15 Punkte**

a) Sie zeichnen eine Anleihe über 10.000€ mit 8 Jahren Laufzeit und 3% jährlichem Couponzins zum Nennwert. Berechnen Sie das Endkapital. Wie hoch müsste der Couponzins sein, damit das Endkapital 15.000€ erreicht?

$$C_n = 10000€ \cdot (1 + 0.03 \cdot 8) = 10000€ \cdot 1.24 = 12400€ \quad [2 \text{ Punkte}]$$

$$10000€ \cdot (1 + i \cdot 8) = 15000€ \Rightarrow i = 6.25\% \quad [2 \text{ Punkte}]$$

b) Sie legen 20.000€ für 2 Jahre als Festgeld an und erhalten quartalsweise 0.5% Zinsen. Berechnen Sie das Endkapital! Wie hoch müsste eine jährliche Verzinsung sein, damit sie dasselbe Endkapital erhalten?

$$C_n = 20000€ \cdot (1 + 0.005)^8 = 20814.14€ \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$20814.14€ = 20000€ \cdot (1 + x)^2 \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$1.0407 = (1 + x)^2$$

$$0.0407 = 2x + x^2$$

$$x^2 + 2x - 0.0407 = 0 \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$x = 0.02015 = 2.015\% \quad [1 \text{ Punkt}]$$

c) Eine Stiftung steht vor der Wahl zwischen einer Einmalzahlung von 1 Mio € und einer ewigen Rente von 25.000€ pro Jahr. Wie hoch müsste der Zins sein, damit beide Optionen gleich attraktiv sind?

$$1.000.000 = \frac{25.000}{i} \Rightarrow i = 2.5\% \quad [2 \text{ Punkte}]$$

d) Sie zahlen 10 Jahre lang vorschüssig 2500€ pro Jahr in einen Bausparvertrag mit 1.5% Guthabenzins ein. Berechnen Sie das Endkapital! Begründen Sie kurz (ohne Rechnung) ob Sie bei nachschüssiger Einzahlung ein höheres, gleiches oder niedrigeres Endkapital hätten.

Bei nachschüssiger Einzahlung würden jede Annuität einmal weniger verzinst werden. Das Endkapital wäre daher niedriger als bei der vorschüssigen Einzahlung **[1 Punkt]**

$$FV = A \left[ \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right] = 2500€ \left[ \frac{(1.015)^{11} - (1.015)}{0.015} \right] = 27158€ \quad [2 \text{ Punkte}]$$



e) Sie kaufen für 60€ eine Call-Option für eine Tonne Raps mit einem Strike von 420€. Sie üben die Option bei einem Spotpreis von 440€ aus. Wie hoch ist ihr Gewinn/Verlust? Wie hoch müsste der Rapspreis (Spot) sein, damit Sie genau null auf null heraus kommen?

Meine Auszahlung wäre  $440€ - 420€ = 20€$

[1 Punkt]

Mein Gewinn wäre  $20€ - 60€ = -40€$ , d.h. ich mache Verlust

[1 Punkt]

Der Spotpreis müsste bei 480€ stehen.

[1 Punkt]

### Aufgabe 5 Tilgungsrechnung

5 Punkte

a) Sie nehmen ein 20 jähriges Darlehn mit 1.2% jährlichem Sollzins über 250.000€ auf. Wie hoch sind Ihre Zinskosten, wenn das Darlehn endfällig getilgt wird?

$$Z = S \cdot i \cdot n = 250000€ \cdot 0.012 \cdot 20 = 60000€$$

[1.5 Punkte]

b) Wie hoch wären die Zinskosten und die monatliche Tilgung, wenn Sie stattdessen einen Ratenkredit mit monatlichen Raten nehmen würden? Nehmen Sie bei ihren Rechnungen einen monatliche Zins von 0.1% an.

250000€ geteilt durch 240 Monate ergibt 1041.67€ Tilgung

[1.5 Punkte]

$$Z = \frac{S \cdot i \cdot (n+1)}{2} = \frac{250000€ \cdot 0.001 \cdot 241}{2} = 30125€$$

[2 Punkte]