



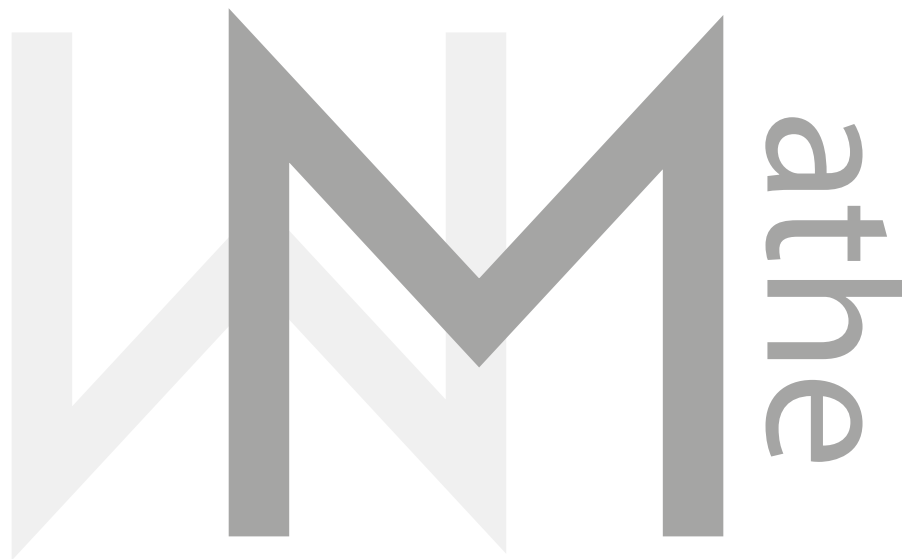
DHBW

Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg



Wirtschaftsmathe

- Übungsbuch -



Dieses Übungsbuch wird durch das Zentrum für Ökonomik der DHBW Ravensburg bereitgestellt.

Autoren: Prof. Dr. Daniel Blochinger
Illustration: Prof. Dr. Daniel Blochinger
Lizenz: [CC BY-NC-SA 4.0](#)

Weitere Lehr- und Lernmaterialien finden Sie auf unserer [Webseite](#).

Fehler gefunden? E-Mail an blochinger@dhbw-ravensburg.de!

Aufgabe 1 Zahlenbereiche und ihre Elemente

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- a) $5.25 \notin \mathbb{N}_0$
- b) $-3 \in \mathbb{Q}$
- c) $-15 \notin \mathbb{Z}$
- d) $3.33 \notin \mathbb{R}$

Aufgabe 2 Zahlenbereiche und ihre Elemente II

Welche unserer fünf Zahlenbereiche können wir in X einsetzen, sodass alle Bedingungen erfüllt sind?

- a) $0 \notin X$
- b) $0 \in X$
- c) $2 \in X \wedge \pi \notin X$
- d) $2.75 \in X \wedge \pi \notin X$

Aufgabe 3 Teilmengen

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- a) $\{1,2,3\} \supseteq \{1,2,3\}$
- b) $\{2,4,6\} \supset \{4,6\} \supset \{4,6\}$
- c) $\{1,7,5\} \neq \{7,5,1\}$
- d) $\{1\} \subset \{-1,0,1\} \supseteq \{0\}$

Aufgabe 4 Teilmengen II

Ergänze die {...} Mengen, sodass die vorgegebenen Teilmengenoperatoren passen:

- a) $\{10, 15, 20\} \supset \{...\}$
- b) $\{4, 17, 21\} \subset \{...\}$
- c) $\{3, 8, 2\} \supset \{...\} \supseteq \{3\}$
- d) $\{1, 5\} \subset \{...\} \supset \{2, 6\}$

Aufgabe 5 Bedingungen

Verwende Bedingungen und boolesche Operatoren, um die folgenden Mengen zu definieren:

- a) Eine Menge die alle natürlichen Zahlen ab einschließlich 5 enthält.
- b) Eine Menge die alle reellen Zahlen außer die 2 enthält.
- c) Eine Menge die alle ganzen Zahlen außer die 1 und die -1 enthält.
- d) Eine Menge die alle natürlichen Zahlen enthält, die nicht genau 2 Ziffern haben.
- e) Eine Menge die alle reellen Zahlen enthält, die mindestens eine Nachkommastelle haben.
- f) Eine Menge die alle rationalen Zahlen enthält, die zwischen -10 und 5 liegen, aber nicht 0 sind.
- g) Eine Menge die alle natürlichen Zahlen enthält, die durch 2, aber nicht durch 4 teilbar sind.
- h) Eine Menge die alle natürlichen Zahlen enthält, die entweder durch 2 oder durch 3 teilbar sind, aber nicht durch 2 und 3.

Aufgabe 6 Kombinationen von Mengen

Berechne die folgenden Kombinationen von Mengen:

- a) $\{1,2,3,4,5\} \cup \{2,3,5,7\} =$
- b) $\{1,2,3,4,5\} \cap \{2,3,5,7\} =$
- c) $\{1,2,3,4,5\} \setminus \{2,3,5,7\} =$
- d) $\{1,2,3,4,5\} \Delta \{2,3,5,7\} =$
- e) $\{2,4,6\} \setminus (\{1,2,3,4,5\} \cap \{1,3,5\})$
- f) $\{3,4,5\} \cap (\{1,2\} \cup \{4,5\})$

Aufgabe 7 Kombinationen von Mengen II

Ergänze die {...} Mengen, sodass folgende Aussagen korrekt sind:

- a) $\{2, 20, 40\} \cup \{...\} = \{2, 4, 20, 40\}$
- b) $\{1,3,5\} \cup (\{0,2,4,6\} \cap \{...\}) = \{1,2,3,4,5\}$
- c) $\{1,2,3,4,5\} \setminus \{...\} = \{0,1,2,3,4,5,6\} \cap \{3,5\}$
- d) $(\{10,100,1000\} \Delta \{...\}) \subset \{10,100,1000\}$
- e) $\{12,17\} \cup (\{1,2,3,4,5\} \setminus \{...\}) \subseteq \{1,4,12,17\}$

Aufgabe 8 Intervalle

Schreibe folgende Mengen in Intervalle um:

- a) $I_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- b) $I_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x < 1\}$
- c) $I_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \wedge x \leq 100\}$
- d) $I_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5 \vee x < 2\}$

Aufgabe 9 Intervalle II

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- a) $[-12, 12] \supset (-12, 12)$
- b) $(-15, 15] \supset [-15, 15)$
- c) $(-4, 8) \subset (-\infty, 8)$
- d) $[-4, \infty) \supseteq (-\infty, 8] \setminus [4, \infty)$

Aufgabe 10 Potenzrechnen

Vereinfache die folgenden Potenzen so weit wie möglich:

- a) $x^4 \cdot (x^2 / x^3)$
- b) $\sqrt{(x^2)^3}$
- c) $x^{3/2} \cdot \sqrt{x} \cdot (y^4 / y^2)$
- d) $x^{2/5} \cdot \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{x}$
- e) $(3x)^2 \cdot (9x^2)^2 \cdot (1/3x)^6$
- f) $(kx)^{z-x} \cdot k^x \sqrt{x^{2x}}$
- g) $(yz)^{1.5} \cdot (x^{0.5} - x^{0.5}) \cdot \sqrt[2]{xyz} - y^2 z^2$

Aufgabe 11 Ausklammern & Binomische Formeln

Wende die binomischen Formeln auf folgende Ausdrücke an:

- a) $(16ab - c)^2$
- b) $(5x+2)(-5x+2)$
- c) $(2x-6)^3 / (6-2x)$
- d) $100x^2 + 25y^2 - (10x-5y)^2 - 100xy$
- e) $(3-x)(3+2x) - 3x + x^2$

Aufgabe 12 Bruchrechnen

Vereinfache die folgenden Brüche so weit wie möglich:

- a) $\frac{78}{162} + \frac{28}{54}$
- b) $\frac{3 + 2x^2}{x} + \frac{2 - 4x}{2}$
- c) $\frac{7 + x}{5} \cdot 3x - \frac{42x + 6x^2}{10}$
- d) $\frac{4x - 7}{17} \cdot 3x + \frac{10x^2 + 8x + 2}{34}$
- e) $\frac{5x + 2}{\sqrt{5x + 2}} + \frac{25x^2 + 20x + 4}{(5x + 2)^{1.5}}$
- f) $\frac{64x^2 y^2}{(8xy)^3} \cdot \frac{(2x+2y)(4x-4y)}{x^2 - y^2}$

Aufgabe 13 Prozentrechnen

Berechne die folgenden Änderungen in Prozent und falls sinnvoll auch in Prozentpunkten.

Das nominale BIP Deutschlands im Jahr 2022 beträgt 3.858 Mrd €. Im Jahr davor waren es 3602 Mrd. €.

Die Arbeitslosigkeit in Deutschland ist im Jahr 2022 von 5.7% auf 5.3% gefallen.

Der Kraftstoff Super E10 enthält 10% statt 5% Bioethanol.

Aufgabe 14 Logarithmus

Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

- a) $\log_{10}(2.5) + 2 \log_{10}(2)$
- b) $\ln(xy) + \ln(e) - 0.5 \ln(y^2)$
- c) $2 \ln(3) + \log_{1.5}(5) \cdot (\ln(3) - \ln(2))$
- d) $e^{2 \ln(x) - \ln(0.5)}$

Aufgabe 15 Gleichungen umformen

Löse folgende Gleichungen nach x auf:

- a) $25x - 16 = 59$
- b) $225 + x^{-1} = 100$
- c) $x(x-5) + x = x$
- d) $\log_{10}(x+1) - 75 = -73$
- e) $e^{(x+1)} = e^{(2x-2)}$

Aufgabe 16 Quadratische Gleichungen

Finde alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

- a) $2x^2 - x - 1 = 0$
- b) $5x^2 - 8 = 16x + 0.5x^2$
- c) $8x^2 = -2x^3$

Aufgabe 17 Definitions- und Wertebereiche

Gib die Definitions- und Wertebereiche der folgenden Funktionen an:

- a) $f(x) = -x^2$
- b) $f(x) = x^3 - x^2 + x$
- c) $f(x) = x^2 - 8x + 16$
- d) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$
- e) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
- f) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

Aufgabe 18 Funktionswerte & Schnittpunkte

Gib die Werte folgender Funktionen an den Stellen $x=0$ und $x=1$ an. Berechne außerdem die Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$, falls es welche gibt.

- a) $f(x) = -x^2$ $g(x) = x$
- b) $f(x) = x^3 - 2x^2$ $g(x) = x^3 + x$
- c) $f(x) = 2x^2 + 16$ $g(x) = 2x^2 - 16$
- d) $f(x) = \sqrt{x+2}$ $g(x) = x$
- e) $f(x) = \frac{3}{2x}$ $g(x) = \sqrt{x}$

Aufgabe 19 Grenzwerte

Berechne die Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$ sowie für alle Polstellen.

- a) $f(x) = -x^2 + x$
- b) $f(x) = x^3 - 100x^2$
- c) $f(x) = x^4 + \sqrt{x}$
- d) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$
- e) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$
- f) $f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x^3}$

Aufgabe 20 Stetigkeit & Differenzierbarkeit

Untersuche die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

- a) $f(x) = 2x + x^2$
- b) $g(x) = x - |x|$
- c) $h(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$
- d) $k(x) = (x - 1)^{-1}$

Aufgabe 21 Ableitungen

Bilde die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen nach x.

- a) $f(x) = 8x^2 + 4x$
- b) $f(x) = 25x^2 + \sqrt{4x}$
- c) $f(x) = x^2t + xt^2 + t^3$
- d) $f(x) = 4x - \ln(x)$
- e) $f(x) = 2x^2 \cdot e^x$
- f) $f(x) = 3x \cdot \ln(x)$
- g) $f(x) = x\sqrt{x}$
- h) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
- i) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$
- j) $f(x) = e^{x^3-2x^2}$
- k) $f(x) = \ln(x^4-2x)$

Aufgabe 22 Extremstellen

Untersuche die folgenden Funktionen auf Extremstellen. Unterscheide dabei in lokal und global!

- a) $f(x) = x^2 - 8x$
- b) $f(x) = x^3 - 9x$
- c) $f(x) = x^4 - x^2$
- d) $f(x) = e^x - x$
- e) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

Aufgabe 23 Monotonie & Konvexität

Untersuche die folgenden Funktionen auf Monotonie und Konvexität:

- a) $f(x) = x^3$
- b) $f(x) = x^2 - x$
- c) $f(x) = x + \sqrt{x}$
- d) $f(x) = x\sqrt{x}$

Aufgabe 24 Partielle Ableitung

Berechne alle partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

- a) $f(x,y) = 2x^3 + y^2 + xy$
- b) $f(x,y,z) = \frac{x + y^2}{z}$
- c) $f(x,y,z) = 2x^3 \cdot y^2 \cdot \sqrt{\frac{z}{x^6}}$
- d) $f(x,y,z) = \frac{x \cdot \ln(y)}{yz}$
- e) $f(x,y,z) = 2x \cdot \ln(xy^2z)$

Aufgabe 25 Extrema von mehrdimensionalen Funktionen

Berechne alle Punkte wo folgende Funktionen die notwendige Bedingung für ein Extremum erfüllen.

a) $f(x,y) = 5x^2 - x + y^2 - 5y$

b) $f(x,y) = xy + 2x - 4y$

c) $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2 + 1}$

Aufgabe 26 Lagrange Verfahren

Löse die folgenden Optimierungsprobleme mit dem Lagrange Verfahren.

a) $\max f(x,y) = xy$
s.t. $x+y \leq 10$

b) $\max f(x,y) = xy+x+y$
s.t. $x+2y \leq 5$

Aufgabe 27 Integralrechnung

Berechne die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_0^3 6x^2 \, dx =$

b) $\int_{-1}^1 4x + x^2 \, dx =$

c) $\int_{-1}^1 1 + 0.5x \, dx =$

d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx =$

e) $\int_1^2 \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \, dx =$

Aufgabe 28 Zins- und Zinseszinsrechnung

- a) Sie zeichnen eine Anleihe über 5000€ zum Nennwert. Die Anleihe zahlt einen jährlichen Coupon von 3.5% und hat eine Laufzeit von 20 Jahren. Berechnen Sie das Endkapital.
- b) Wie hoch müsste der Couponzins der 20 jährigen Anleihe sein, damit sie ein Endkapital von 10000€ erhalten?
- c) Wie viel müssen Sie in eine Festgeldanlage mit 4 Jahren Laufzeit und 4% Zinsen investieren, damit Sie ein Endkapital von 10000€ erreichen?
- d) Wie hoch muss der Zins einer 10 jährigen Festgeldanlage sein, damit sie dasselbe Endkapital erreichen wie bei einer endfälligen Anleihe mit 5% Couponzins. Nehme dabei an, dass du die Anleihe zum Nennwert zeichnest.

Aufgabe 29 Unterjährige Verzinsung

- a) Eine Festgeldanlage wird quartalsweise mit 0.75% Zinsen verzinst. Wie hoch ist das Endkapital bei einem Anlagebetrag von 10000€ und einer Anlagedauer von 5 Jahren? Wie hoch müsste eine jährliche Verzinsung sein, damit dasselbe Endkapital erreicht wird?
- b) Welche monatlich berechnete Verzinsung entspricht einer jährlichen von 4.8%, wenn wir von einer einfachen Verzinsung ausgehen?
- c) Welche monatlich berechnete Verzinsung entspricht einer jährlichen von 4.8%, wenn wir von einer Verzinsung mit Zinseszins ausgehen?
- d) Eine Festgeldanlage wird kontinuierlich verzinst. Berechne das Endkapital nach 27 Monaten bei einem Anlagebetrag von 10000€ und einer Verzinsung von 4% pro Jahr.

Aufgabe 30 Renditerechnung

Ein Bankberater bietet ihnen eine 5 jährige Festgeldanlage mit variablem Zins an. Im ersten Jahr beträgt der Zins zwar nur 1%, dafür steigt er in jedem Folgejahr um 1%, sodass sie im zweiten Jahr 2%, im dritten Jahr 3% usw. bekommen. Er argumentiert, dass sie damit ja im Schnitt 3% Rendite machen. Zeigen Sie ihm, dass die tatsächliche Rendite etwas niedriger ist.

Aufgabe 31 Barwertrechnung & ewige Renten

- Berechne den Barwert einer Zahlung von 10000€ in 10 Jahren bei einem Zins von 2%.
- Berechne den Barwert einer Anleihe mit 10000€ Nennwert, 3 Jahren Laufzeit und 5% Coupon bei einem Zinssatz von 2%
- Berechne den Barwert einer ewigen Rente von 1200€ pro Jahr bei einem Zins von 3%. Wie hoch müsste der Zins sein, damit die ewige Rente einen Barwert von 240000€ hat?

Aufgabe 32 Annuitäten

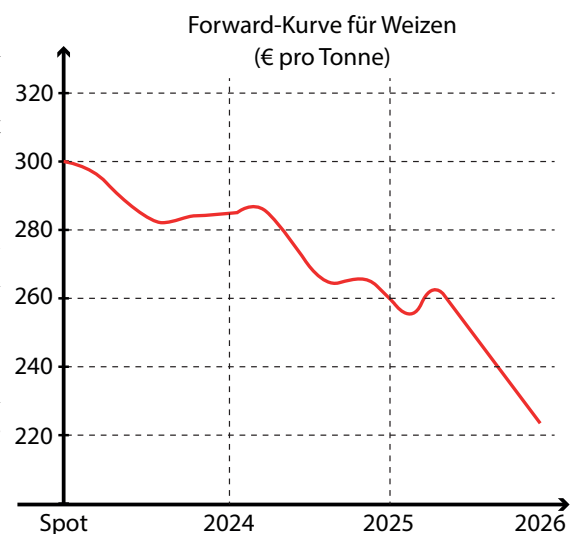
- Sie zahlen zu Beginn jedes Jahres 1200€ in einen Sparplan mit jährlicher Verzinsung von 2% ein. Berechnen Sie das Endkapital nach 30 Jahren.
- Wie hoch müsste die jährliche Einzahlung sein, damit sie ein Endkapital von 100000€ erreichen?

Aufgabe 33 Termingeschäfte und Optionen

- Sie kaufen 10 Tonnen Weizen zum 01.01.2025. Wie viel müssen Sie dafür bezahlen? Hat sich das Geschäft gelohnt, wenn der Spot-Preis von Weizen am 01.01.2025 so hoch ist wie der heutige?

- Wie hoch müsste der Strike einer Put-Option auf Weizen sein, damit er bei einer Ausübung bei einem Spotpreis von 230€ pro Tonne 15€ auszahlt?

- Sie kaufen eine Call-Option auf Mais mit einem Strike von 20€ pro Hektoliter. Wie viel darf die Option kosten, damit sie bei einer Ausübung bei einem Spotpreis von 25€ pro Hektoliter keinen Verlust machen?



- Sie kaufen eine Aktie der FSAB AG für 50€ und verkaufen gleichzeitig eine Call-Option für diese Aktie mit einem Strike von 60€ zu einem Preis von 10€. Stellen Sie Gewinn und Verlust in Abhängigkeit vom Preis der Aktie bei Ausübung der Call-Option dar. Finden Sie im Internet einen Namen für dieses Konstrukt?
- Sie kaufen eine Aktie der FSAB AG für 50€ und gleichzeitig eine Put-Option für diese Aktie mit einem Strike von 40€ zu einem Preis von 5€. Stellen Sie Gewinn und Verlust in Abhängigkeit vom Preis der Aktie bei Ausübung der Put-Option dar. Finden Sie im Internet einen Namen für dieses Konstrukt?

Aufgabe 34 Devisen und Realzinsen

- a) Wie viel Euro müssen sie besitzen, um in der USA, dem UK und der Schweiz als Millionär zu gelten? Verwenden Sie geeignete Quellen, um die aktuellen Wechselkurse zu recherchieren.
- b) Verwende die Eurokurse $\text{USD/MXN} = 18.0$ und $\text{USD/NOK} = 10.4$ um zu berechnen, wie viele mexikanische Pesos sie für eine norwegische Krone erhalten. Geben Sie dazu auch das Währungspaar explizit an!
- c) In der Eurozone erhalten Sie 2% aufs Tagesgeld bei einer Inflation von 8.5%. In Polen beträgt die Inflation 16%, dafür erhalten sie auf Guthaben in Zloty, aber auch 6% auf Tagesgeld. Vergleiche die Realzinsen!

Aufgabe 35 Tilgungsrechnung

- a) Sie nehmen ein 10 jähriges Darlehn über 50000€ mit einem jährlichen Zinssatz von 2% auf. Berechnen Sie die Zinslast bei endfälliger Tilgung.
- b) Wie hoch dürfte der jährliche Zinssatz sein, damit die Zinskosten 2500€ nicht übersteigen?
- c) Berechnen Sie die Zinslast und die Höhe der Tilgungsrate des in Aufgabenteil a) beschriebenen Darlehns, wenn dieses mit jährlichen Raten getilgt werden würde.
- d) Berechnen Sie die Zinslast und die Höhe der Tilgungsrate des in Aufgabenteil a) beschriebenen Darlehns, wenn dieses mit jährlichen Annuitäten getilgt werden würde. Berechnen Sie dabei zuerst die Höhe der Annuität.

Aufgabe 1 Zahlenbereiche und ihre Elemente

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- a) $5.25 \notin \mathbb{N}_0$
Ist richtig, da die natürlichen Zahlen, auch die Variante mit 0, keine Kommazahlen enthalten.
- b) $-3 \in \mathbb{Q}$
Ist richtig, da die rationalen Zahlen alle als ganzzahlige Brüche darstellbaren Zahlen enthalten. Insbesondere enthalten sie auch alle ganzen Zahlen, d. h. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- c) $-15 \notin \mathbb{Z}$
Ist falsch, da die ganzen Zahlen auch alle negativen Zahlen ohne Kommastellen enthalten.
- d) $3.33 \notin \mathbb{R}$
Ist falsch, da die rationalen Zahlen sämtliche Kommazahlen enthalten.

Aufgabe 2 Zahlenbereiche und ihre Elemente II

Welche unserer fünf Zahlenbereiche können wir in X einsetzen, sodass alle Bedingungen erfüllt sind?

- a) $0 \notin X$ trifft nur auf die natürlichen Zahlen \mathbb{N} zu.
- b) $0 \in X$ trifft auf alle Zahlenbereiche außer die natürlichen Zahlen zu: $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
- c) $2 \in X \wedge \pi \notin X$ trifft auf alle Zahlenbereiche außer die reellen Zahlen zu: $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.
- d) $2.75 \in X \wedge \pi \notin X$ trifft nur auf die rationalen Zahlen \mathbb{Q} zu.

Aufgabe 3 Teilmengen

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- a) $\{1,2,3\} \supseteq \{1,2,3\}$
Ist richtig. Die rechte Menge ist eine Teilmenge der linken Menge, da die linke Menge alle Elemente enthält, die in der rechten Menge enthalten sind. Sie enthält zwar kein zusätzliches Element, aber das wäre nur bei einer echten Teilmenge ein Problem.
- b) $\{2,4,6\} \supset \{4,6\} \supset \{4,6\}$
Das rechte Relationszeichen ist falsch. Die Menge ganz rechts ist keine echte Teilmenge der mittleren Menge. Zwar enthält die Menge in der Mitte alle Elemente der rechten Menge, aber kein einziges Element mehr.

c) $\{1,7,5\} \neq \{7,5,1\}$

Ist falsch. Zwar sind die Elemente rechts anders angeordnet als links, aber für die Relation ist es nur relevant, ob die Mengen dieselben Elemente enthalten. Da sie dies tun, wäre „ $=$ “ richtig.

d) $\{1\} \subset \{-1,0,1\} \supseteq \{0\}$

Ist richtig. Die Mengen links und rechts sind beides echte Teilmengen der mittleren Menge. Wir könnten die blau markierte Relation durch „ \supset “ ersetzen, aber falsch ist „ \supseteq “ deswegen nicht. Eine echte Teilmenge ist immer auch eine Teilmenge!

Aufgabe 4 Teilmengen II

Ergänze die {...} Mengen, sodass die vorgegebenen Teilmengenoperatoren passen.

- | | | |
|----|---|---|
| a) | $\{10, 15, 20\} \supset \{...\}$ | passt z. B. für $\{...\} = \{15, 20\}$ |
| b) | $\{4, 17, 21\} \subset \{...\}$ | passt z. B. für $\{...\} = \{4, 17, 21, 22\}$ |
| c) | $\{3, 8, 2\} \supset \{...\} \supseteq \{3\}$ | passt z. B. für $\{...\} = \{3\}$ oder $\{3, 8\}$ |
| d) | $\{1, 5\} \subset \{...\} \supset \{2, 6\}$ | passt z. B. für $\{...\} = \{1, 2, 5, 6\}$ |

Aufgabe 5 Bedingungen

Verwende Bedingungen und boolesche Operatoren, um die folgenden Mengen zu definieren:

- Eine Menge die alle natürlichen Zahlen ab einschließlich 5 enthält.
 $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 5\}$
- Eine Menge die alle reellen Zahlen außer die 2 enthält.
 $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
- Eine Menge die alle ganzen Zahlen außer die 1 und die -1 enthält.
 $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1\}$
- Eine Menge die alle natürlichen Zahlen enthält, die nicht genau 2 Ziffern haben.
 $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10 \vee n \geq 100\}$
- Eine Menge die alle reellen Zahlen enthält, die mindestens eine Nachkommastelle haben.
 $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Z}\}$

- f) Eine Menge die alle rationalen Zahlen enthält, die zwischen -10 und 5 liegen, aber nicht 0 sind.
 $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > -10 \wedge x < 5 \wedge x \neq 0\}$
- g) Eine Menge die alle natürlichen Zahlen enthält, die durch 2, aber nicht durch 4 teilbar sind.
 $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 2 = 0 \wedge n \bmod 4 \neq 0\}$
- h) Eine Menge die alle natürlichen Zahlen enthält, die entweder durch 2 oder durch 3 teilbar sind, aber nicht durch 2 und 3.
 $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 2 = 0 \vee n \bmod 3 = 0\}$

Aufgabe 6 Kombinationen von Mengen

Berechne die folgenden Kombinationen von Mengen:

- a) $\{1,2,3,4,5\} \cup \{2,3,5,7\} = \{1,2,3,4,5,7\}$
- b) $\{1,2,3,4,5\} \cap \{2,3,5,7\} = \{2,3,5\}$
- c) $\{1,2,3,4,5\} \setminus \{2,3,5,7\} = \{1,4\}$
- d) $\{1,2,3,4,5\} \Delta \{2,3,5,7\} = \{1,4,7\}$
- e) $\{2,4,6\} \setminus (\{1,2,3,4,5\} \cap \{1,3,5\})$
 $= \{2,4,6\} \setminus \{1,3,5\}$
 $= \{2,4,6\}$
- f) $\{3,4,5\} \cap (\{1,2\} \cup \{4,5\})$
 $= \{3,4,5\} \cap \{1,2,4,5\}$
 $= \{4,5\}$

Aufgabe 7 Kombinationen von Mengen II

Ergänze die {...} Mengen, sodass folgende Aussagen korrekt sind:

- a) $\{2, 20, 40\} \cup \{\dots\} = \{2, 4, 20, 40\}$ passt z. B. für $\{\dots\} = \{4\}$
- b) $\{1,3,5\} \cup (\{0,2,4,6\} \cap \{\dots\}) = \{1,2,3,4,5\}$ passt z. B. für $\{\dots\} = \{2,4\}$, denn:
 $\{1,3,5\} \cup (\{0,2,4,6\} \cap \{2,4\}) = \{1,2,3,4,5\}$
 $\{1,3,5\} \cup \{2,4\} = \{1,2,3,4,5\}$
- c) $\{1,2,3,4,5\} \setminus \{\dots\} = \{0,1,2,3,4,5,6\} \cap \{3,5\}$ passt z. B. für $\{\dots\} = \{1,2,4\}$, denn
 $\{1,2,3,4,5\} \setminus \{1,2,4\} = \{0,1,2,3,4,5,6\} \cap \{3,5\}$
 $\{1,2,3,4,5\} \setminus \{1,2,4\} = \{3,5\}$
- d) $(\{10,100,1000\} \Delta \{\dots\}) \subset \{10,100,1000\}$ passt z. B. für $\{\dots\} = \{100\}$, denn
 $(\{10,100,1000\} \Delta \{100\}) \subset \{10,100,1000\}$
 $\{100\} \subset \{10,100,1000\}$
- e) $\{12,17\} \cup (\{1,2,3,4,5\} \setminus \{\dots\}) \subseteq \{1,4,12,17\}$ passt z. B. für $\{\dots\} = \{2,3,5\}$, denn
 $\{12,17\} \cup (\{1,2,3,4,5\} \setminus \{2,3,5\}) \subseteq \{1,4,12,17\}$
 $\{12,17\} \cup \{1,4\} \subseteq \{1,4,12,17\}$

Aufgabe 8 Intervalle

Schreibe folgende Mengen in Intervalle um:

- a) $I_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$
- b) $I_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x < 1\} = (0, 1)$
- c) $I_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \wedge x \leq 100\} = [-1, 100]$
- d) $I_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5 \vee x < 2\} = (-\infty, \infty)$

Warum ist I_4 nicht $(-5, 2)$? In der Definition der Menge ist eine „Falle“ eingebaut! Die beiden Bedingungen werden mit ODER statt mit UND verknüpft. Dadurch sind alle reellen Zahlen enthalten, die über -5 ODER unter 2 ODER beides sind. Und das trifft auf alle reellen Zahlen zu!

Aufgabe 9 Intervalle II

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- a) $[-12, 12] \supset (-12, 12)$ ist richtig, da das linke Intervall alle Elemente des rechten Intervalls enthält und mit $\{-12, 12\}$ sogar zwei Elemente mehr.
- b) $(-15, 15] \supset [-15, 15)$ ist falsch, da jedes Intervall ein Element enthält, welches das andere nicht enthält. Das linke enthält exklusiv die $\{15\}$, das rechte exklusiv die $\{-15\}$.
- c) $(-4, 8) \subset (-\infty, 8)$ ist richtig, da das rechte Intervall alle Elemente des linken enthält und mindestens ein Element mehr.
- d) $[-4, \infty) \supseteq (-\infty, 8] \setminus [4, \infty)$ sieht verwirrend aus. Wir berechnen die Differenz und erhalten $[-4, \infty) \supseteq (-\infty, 4)$ und damit etwas was eindeutig falsch ist.

Aufgabe 10 Potenzrechnen

Vereinfache die folgenden Potenzen so weit wie möglich:

- a) $x^4 \cdot (x^2 / x^3)$ Potenzen mit gleicher Basis in Klammer
 $= x^4 \cdot x^{2-3}$ Exponent berechnen
 $= x^4 \cdot x^{-1}$ Erneut Potenzen mit gleicher Basis
 $= x^{4-1}$ Exponent berechnen
 $= x^3$
- b) $\sqrt{(x^2)^3}$ Wurzel als hoch 0.5 schreiben
 $= [(x^2)^3]^{0.5}$ Regel für Potenzen von Potenzen
 $= (x^2)^{3 \cdot 0.5}$ Regel für Potenzen von Potenzen
 $= x^{2 \cdot 3 \cdot 0.5}$ Exponent berechnen
 $= x^3$

- c) $x^{3/2} \cdot \sqrt{x} \cdot (y^4 / y^2)$ Wurzel als hoch 0.5 schreiben
 $= x^{3/2} \cdot x^{1/2} \cdot (y^4 / y^2)$ Potenzen mit Basis x bzw. y zusammenfassen
 $= x^{3/2 + 1/2} \cdot y^{4-2}$ Exponenten berechnen
 $= x^2 \cdot y^2$ Potenzen mit gleichem Exponenten zsm. fassen
 $= (xy)^2$
- d) $x^{2/5} - \sqrt[5]{x} \sqrt[5]{x}$ 5te-Wurzeln als hoch 1/5 schreiben
 $= x^{2/5} - x^{1/5} \cdot x^{1/5}$ Produkt mit gleicher Basis zusammenfassen
 $= x^{2/5} - x^{1/5+1/5}$ Exponenten berechnen
 $= x^{2/5} - x^{2/5}$ Differenz zweier gleicher Terme ist 0
 $= 0$
- e) $(3x)^2 \cdot (9x^2)^2 \cdot (1/3x)^6$ Rot markierter Ausdruck $9x^2$ ist gleich $(3x)^2$
 $= (3x)^2 \cdot 9x^2 \cdot 9x^2 \cdot (1/3x)^6$...
 $= (3x)^2 \cdot 81 \cdot x^4 \cdot (1/3x)^6$...
 $= (3x)^2 \cdot (3x)^4 \cdot (1/3x)^6$ Produkt mit gleicher Basis zusammenfassen
 $= (3x)^6 \cdot (1/3x)^6$ Rechter Faktor als Kehrwert schreiben
 $= (3x)^6 \cdot (3x)^{-6}$ Produkt mit gleicher Basis zusammenfassen
 $= (3x)^{6-6}$ Klammer hoch 0 ist 1 für alle $x \neq 0$
 $= 1$
- f) $(kx)^{z-x} \cdot k^x \sqrt{x^{2x}}$ Wurzel als hoch 0.5 schreiben
 $= (kx)^{z-x} \cdot k^x (x^{2x})^{0.5}$ Regel für Potenzen von Potenzen
 $= (kx)^{z-x} \cdot k^x x^x$ Produkt mit gleichem Exponenten rechts
 $= (kx)^{z-x} \cdot (kx)^x$ Produkt mit gleicher Basis zusammenfassen
 $= (kx)^z$

g) $(yz)^{1.5} \cdot (x^{-0.5} - x^{0.5}) \cdot \sqrt[2]{xyz} - y^2z^2$ Wurzel als hoch 0.5 schreiben

$= (yz)^{1.5} \cdot (x^{-0.5} - x^{0.5}) \cdot yz^{0.5} \cdot x^{0.5} - y^2z^2$ $x^{0.5}$ in mittlere Klammer reinmultiplizieren

$= (yz)^{1.5} \cdot (1-x) \cdot yz^{0.5} - y^2z^2$ Potenzen mit Basis yz zusammenfassen

$= y^2z^2 (1-x) - y^2z^2$ Ausklammern und vereinfachen

$= -xy^2z^2$

Aufgabe 11 Ausklammern & Binomische Formeln

Wende die binomischen Formeln auf folgende Ausdrücke an:

a) $(16ab - c)^2$ 2. Binomische Formel

$= (16ab)^2 - 2 \cdot 16ab \cdot c + (c)^2$ Produkte & Quadrate berechnen

$= 256a^2b^2 - 32abc + c^2$

b) $(5x+2)(-5x+2)$ Reihenfolge in Klammern ändern

$= (2+5x)(2-5x)$ 3. Binomische Formel

$= 2^2 - (5x)^2$ Produkte & Quadrate berechnen

$= 4 - 25x^2$

c) $(2x-6)^3 / (6-2x)$ In rechter Klammer -1 ausklammern

$= (2x-6)^3 / -(2x-6)$ Potenz mit gleicher Basis bzw. „Kürzen“

$= -(2x-6)^2$ Zweite Binomische Formel

$= -(4x^2 - 24x + 36)$ Vorfaktor -1 auf Terme in Klammer verteilen

$= -4x^2 + 24x - 36$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & 100x^2 + 25y^2 - (10x-5y)^2 - 100xy \\
 &= 100x^2 - 100xy + 25y^2 - (10x-5y)^2 \\
 &= (10x-5y)^2 - (10x-5y)^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Klammer nach hinten schieben
 2. Binomische Formel rückwärts
 Differenz identischer Terme

$$\begin{aligned}
 \text{e)} \quad & (3-x)(3+2x) - 3x + x^2 \\
 &= (3-x)(3+2x) - (3-x)x \\
 &= (3-x)(3+2x-x) \\
 &= (3-x)(3+x) \\
 &= 9 - x^2
 \end{aligned}$$

Markierten Ausdruck umformen
 Gleichen Faktor (3-x) erkennen
 +2x und -x zusammenfassen
 3. Binomische Formel

Aufgabe 12 Bruchrechnen

Vereinfache die folgenden Brüche so weit wie möglich:

a) $\frac{78}{162} + \frac{28}{54}$ Alles gerade Zahlen! Links und rechts mit 2 kürzen

$$= \frac{39}{81} + \frac{14}{27}$$

Links erneut kürzen, diesmal mit 3!

$$= \frac{13}{27} + \frac{14}{27}$$

Brüche addieren

$$= \frac{27}{27}$$

Das Ergebnis ist 1

b) $\frac{3 + 2x^2}{x} + \frac{2 - 4x}{2}$ Links mit 2 und rechts mit x erweitern

$$= \frac{6 + 4x^2}{2x} + \frac{2x - 4x^2}{2x}$$

Zu einem Bruch zusammenfassen

$$= \frac{6 + 4x^2 + 2x - 4x^2}{2x}$$

Zähler zusammenfassen

$$= \frac{6 + 2x}{2x}$$

Bruch mit 2 kürzen

$$= \frac{3 + x}{x}$$

c) $= \frac{7 + x}{5} 3x - \frac{42x + 6x^2}{10}$ Distributivgesetz anwenden

$$= \frac{21x + 3x^2}{5} - \frac{42x + 6x^2}{10}$$

Rechts mit 2 kürzen

$$= \frac{21x + 3x^2}{5} - \frac{21x + 3x^2}{5}$$

Differenz identischer Terme

$$= 0$$

d)
$$\frac{4x-7}{17} \cdot 3x + \frac{10x^2+8x+2}{34}$$
 Links Distributivgesetz, rechts kürzen mit 2

$$= \frac{12x^2-21x}{17} + \frac{5x^2+4x+1}{17}$$

Zu einem Bruch zusammenfassen

$$= \frac{12x^2-21x+5x^2+4x+1}{17}$$

Zähler zusammenfassen

$$= \frac{17x^2-17x+1}{17}$$

Bruch zwischen $17x^2-17x$ und $+1$ trennen

$$= x^2 - x + \frac{1}{17}$$

e)
$$\frac{5x+2}{\sqrt{5x+2}} + \frac{25x^2+20x+4}{(5x+2)^{1.5}}$$
 Links Potenzregel, Rechts 1. Binomische Formel

$$= \sqrt{5x+2} + \frac{(5x+2)^2}{(5x+2)^{1.5}}$$

Rechts erneut Potenzen mit gleicher Basis $(5x+2)$

$$= \sqrt{5x+2} + (5x+2)^{0.5}$$

Hoch 0.5 ist dasselbe wie Wurzel

$$= 2\sqrt{5x+2}$$

f)
$$\frac{64x^2y^2}{(8xy)^3} \cdot \frac{(2x+2y)(4x-4y)}{x^2-y^2}$$
 Links 64 als 8^2 erkennen, rechts 2 und 4 ausklammern

$$= \frac{(8xy)^2}{(8xy)^3} \cdot \frac{8(x+y)(x-y)}{x^2-y^2}$$

Links kürzen, rechts 3. Binomische Formel

$$= \frac{1}{8xy} \cdot \frac{8(x^2-y^2)}{x^2-y^2}$$

Sowohl die 8, als auch (x^2-y^2) kürzen

$$= \frac{1}{xy}$$

Aufgabe 13 Prozentrechnen

Berechne die folgenden Änderungen in Prozent und falls sinnvoll auch in Prozentpunkten.

Das nominale BIP Deutschlands im Jahr 2022 beträgt 3.858 Mrd €. Im Jahr davor waren es 3602 Mrd. €.

$$\frac{3858}{3602} - 1 = 0.0712 = 7.12\%$$

Die Arbeitslosigkeit in Deutschland ist im Jahr 2022 von 5.7% auf 5.3% gefallen.

$$\frac{5.3\%}{5.7\%} - 1 = -0.0702 = -7.02\%$$

$$5.3\% - 5.7\% = 0.4 \text{ Prozentpunkte}$$

Der Kraftstoff Super E10 enthält 10% statt 5% Bioethanol.

$$\frac{10\%}{5\%} - 1 = 1 = 100\%$$

$$10\% - 5\% = 5 \text{ Prozentpunkte}$$

Aufgabe 14 Logarithmus

Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

a)	$\log_{10}(2.5) + 2 \log_{10}(2)$	Vorfaktor 2 als Exponent in log ziehen
	$= \log_{10}(2.5) + \log_{10}(2^2)$	Argument ausrechnen
	$= \log_{10}(2.5) + \log_{10}(4)$	Summe zweier Logarithmen
	$= \log_{10}(2.5 \cdot 4)$	Argument ausrechnen
	$= \log_{10}(10)$	Was hoch 10 gibt 10?
	$= 1$	

b) $\ln(xy) + \ln(e) - 0.5 \ln(y^2)$ Vorfaktor 0.5 als Exponent in ln ziehen

$= \ln(xy) + 1 - \ln([y^2]^{0.5})$ Potenzen von Potenzen

$= \ln(xy) + 1 - \ln(y)$ Reihenfolge zu: $\ln(xy) - \ln(y) + 1$

$= \ln(xy) - \ln(y) + 1$

$= \ln(x) + 1$

c) $2 \ln(3) + \log_{1.5}(5) \cdot (\ln(3) - \ln(2))$ Vorfaktor 2 als Exponent in ln ziehen

$= \ln(9) + \log_{1.5}(5) \cdot (\ln(3) - \ln(2))$ Klammer zu $\ln(1.5)$ zusammenfassen

$= \ln(9) + \log_{1.5}(5) \cdot \ln(1.5)$ Basis 1.5 zu e umrechnen

$= \ln(9) + \frac{\ln(5)}{\ln(1.5)} \cdot \ln(1.5)$ Kürzen

$= \ln(45)$

d) $e^{2 \ln(x) - \ln(0.5)}$ Vorfaktor 2 als Exponent in ln ziehen

$= e^{\ln(x^2) - \ln(0.5)}$ Differenz zweier Logarithmen

$= e^{\ln(\frac{x^2}{0.5})}$ Argument berechnen

$= e^{\ln(2x^2)}$ Definition des $\ln()$ anwenden

$= 2x^2$

Aufgabe 15 Gleichungen umformen

Löse folgende Gleichungen nach x auf:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 25x - 16 &= 59 & | + 16 \\ \Leftrightarrow 25x &= 75 & | : 25 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 225 + x^{-1} &= 100 & | \cdot x \\ \Leftrightarrow 225x + 1 &= 100x & | -225x \\ \Leftrightarrow 1 &= -125x & | : (-125) \\ \Leftrightarrow x &= -0.008 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad x(x-5) + x &= x & | - x \\ \Leftrightarrow x(x-5) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 0, x_2 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \log_{10}(x+1) - 75 &= -73 & | + 75 \\ \Leftrightarrow \log_{10}(x+1) &= 2 & | 10^{(\dots)} \\ \Leftrightarrow x+1 &= 100 & | -1 \\ \Leftrightarrow x &= 99 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad e^{(x+1)} &= e^{(2x-2)} & | \ln(\dots) \\ x+1 &= 2x-2 & | -1 \\ x &= 2x-3 & | -2x \\ -x &= -3 & | \cdot (-1) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 16 Quadratische Gleichungen

Finde alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = -0.5, x_2 = 1$$

$$5x^2 - 8 = 16x + 0.5x^2$$

$$\Leftrightarrow 4.5x^2 - 16x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \cdot 4.5 \cdot 8}}{2 \cdot 4.5}$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{400}}{9}$$

$$x_1 = -4/9, x_2 = 4$$

$$8x^2 = -2x^3$$

$$x(2x^2 + 8x) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 8}{4}$$

$$x_1 = 0, x_2 = -4$$

Erste Lösung x = 0

Aufgabe 17 Definitions- und Wertebereiche

Gib die Definitions- und Wertebereiche der folgenden Funktionen an:

- a) $f(x) = -x^2$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
 Nach unten geöffnete Parabel die den positiven Bereich nie erreicht
- b) $f(x) = x^3 - x^2 + x$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 Grenzwert gegen $-\infty$ ist $-\infty$, Grenzwert gegen $+\infty$ ist $+\infty$. Alles wird abgedeckt
- c) $f(x) = x^2 - 8x + 16$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
 Kann umgeschrieben werden zu $(x-4)^2$
- d) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ $f: \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
 Wurzel darf nicht negativ werden
- e) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ $f: \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
 Wurzel darf nicht negativ werden, e hoch 0 gibt 1
- f) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 Polstelle bei $x=1$, Grenzwert nach \pm unendlich ist 1
 Dieser Wert 1 wird nie ganz erreicht

Aufgabe 18 Funktionswerte & Schnittpunkte

Gib die Werte folgender Funktionen an den Stellen $x=0$ und $x=1$ an. Berechne außerdem die Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$, falls es welche gibt.

- | | | | |
|----|---------------|------------|---|
| a) | $f(x) = -x^2$ | $g(x) = x$ | Schnittpunkte bei $f(x) = g(x)$ |
| | $f(0) = -0^2$ | $g(0) = 0$ | $-x^2 = x \quad -x$ |
| | $= 0$ | | $\Leftrightarrow -x^2 - x = 0 \quad x(\dots)$ |
| | $f(1) = -1^2$ | $g(1) = 1$ | $\Leftrightarrow x(-x-1) = 0$ |
| | $= -1$ | | $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1$ |

b) $f(x) = x^3 - 2x^2$ $g(x) = x^3 + x$ Schnittpunkte bei $f(x) = g(x)$

$$\begin{array}{lll} f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 & g(0) = 0^3 + 0 & x^3 - 2x^2 = x^3 + x \quad | :x \\ = 0 & = 0 & \Rightarrow x^2 - 2x = x^2 + 1 \quad | -x^2 \\ f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 & g(1) = 1^3 + 1 & \Leftrightarrow -2x = 1 \quad | : -2 \\ = -1 & = 2 & \Rightarrow x_1 = -0.5 \quad x_2 = 0 \end{array}$$

c) $f(x) = 2x^2 + 16$ $g(x) = 2x^2 - 16$ Schnittpunkte bei $f(x) = g(x)$

$$\begin{array}{lll} f(0) = 2 \cdot 0^2 + 16 & g(0) = 2 \cdot 0^2 - 16 & 2x^2 + 16 = 2x^2 - 16 \quad | -2x^2 \\ = 16 & = -16 & \Leftrightarrow 16 = -16 \quad \text{⚡} \\ f(1) = 2 \cdot 1^2 + 16 & g(1) = 2 \cdot 1^2 - 16 & \\ = 18 & = -14 & \end{array}$$

Es gibt keine Schnittpunkte

d) $f(x) = \sqrt{x+2}$ $g(x) = x$ Schnittpunkte bei $f(x) = g(x)$

$$\begin{array}{lll} f(0) = \sqrt{0+2} & g(0) = 0 & \sqrt{x+2} = x \quad | (\dots)^2 \\ = \sqrt{2} & & x+2 = x^2 \quad | -x^2 \\ f(1) = \sqrt{1+2} & g(1) = 1 & \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \\ = \sqrt{3} & & x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \\ & & \Rightarrow \cancel{x_1 = -1}, x_2 = 2 \end{array}$$

e) $f(x) = \frac{3}{2x}$ $g(x) = \sqrt{x}$ Schnittpunkte bei $f(x) = g(x)$

$$\begin{array}{lll} f(0) = \frac{3}{2 \cdot 0} \quad \text{⚡} & g(0) = \sqrt{0} & \frac{3}{2x} = \sqrt{x} \quad | (\dots)^2 \\ = & = 0 & \Leftrightarrow \frac{9}{4x^2} = x \quad | \cdot x^2 \\ f(1) = \frac{3}{2} & g(1) = \sqrt{1} & \Leftrightarrow 9/4 = x^3 \quad | (\dots)^{1/3} \\ & = 1 & \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{9/4} \end{array}$$

Aufgabe 19 Grenzwerte

Berechne die Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$ sowie für alle Polstellen

- a) $f(x) = -x^2 + x$ Polynom mit stärkster Potenz $-x^2$
 $f(x) = -x^2 + x$ Negativer Vorfaktor & gerader Exponent

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$$

- b) $f(x) = x^3 - 100x^2$ Polynom mit stärkster Potenz x^3
 $f(x) = x^3 - 100x^2$ Positiver Vorfaktor & ungerader Exponent

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

- c) $f(x) = x^4 + \sqrt{x}$ Polynom mit stärkster Potenz x^4
 $f(x) = x^4 + \sqrt{x}$ Positiver Vorfaktor & gerader Exponent

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$$

⚡ It's a trap! $f(x)$ ist für $x < 0$ nicht definiert
 Der Grenzwert $-\infty$ gegen - existiert nicht

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

$$d) \quad f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

Stärkste Potenz im Zähler $2x$ Stärkste Potenz im Nenner x

Betrachte Zähler und Nenner getrennt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = \infty$$

Zähler und Nenner sind gleich stark (1 vs 1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

Grenzwert entspricht Bruch der Vorfaktoren

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$$

Polstelle bei $x = -1$, da Division durch 0

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$$

$$e) \quad f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$$

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$$

Stärkste Potenz im Zähler x^4 Stärkste Potenz im Nenner x^3

Betrachte Zähler und Nenner getrennt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = \infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = \infty$$

Zähler und Nenner werden beide unendlich groß

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \infty$$

Zähler ist stärker (4 vs. 3), Grenzwert unendlich

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

Vorzeichen $\underbrace{\text{Plus/Minus}}_{x \rightarrow -\infty}$ und $\underbrace{\text{Plus/Plus}}_{x \rightarrow +\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow (0)^-} f(x) = -\infty$$

Division durch 0, wenn $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow (0)^+} f(x) = +\infty$$

Vorzeichen $\underbrace{\text{Plus/Minus}}_{x \rightarrow (0)^-}$ und $\underbrace{\text{Plus/Plus}}_{x \rightarrow (0)^+}$

e) $f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x^3}$

$f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x^3}$

Stärkste Potenz im Zähler $3x^2$

Stärkste Potenz im Nenner x^3

Betrachte Zähler und Nenner getrennt

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = \infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = \infty$

Zähler und Nenner werden beide unendlich groß

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \infty$

Nenner ist stärker (2 vs. 3), Grenzwert 0

Vorzeichen bei 0 irrelevant

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow (0)^-} f(x) = -\infty$

Division durch 0, wenn $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow (0)^+} f(x) = +\infty$

Vorzeichen Plus/Minus und Plus/Plus
 $x \rightarrow (0)^-$ $x \rightarrow (0)^+$

Aufgabe 20 Stetigkeit & Differenzierbarkeit

Untersuche die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

a) $f(x) = 2x + x^2$ ist stetig und differenzierbar in \mathbb{R}

b) $g(x) = x - |x|$ ist stetig in \mathbb{R} , differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $h(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$ ist stetig und differenzierbar in \mathbb{R}^+

d) $k(x) = (x - 1)^{-1}$ ist stetig und differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Aufgabe 21 Ableitungen

Bilde die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen nach x:

a) $f(x) = 8x^2 + 4x$ Potenzregel auf $8x^2$ und $4x$ anwenden
 $f'(x) = 16x + 4$

b) $f(x) = 25x^2 + \sqrt{4x}$ Wurzel als Potenz umschreiben
 $= 25x^2 + (4x)^{0.5}$
 $= 25x^2 + 2x^{0.5}$

$$f'(x) = 50x + x^{-0.5}$$

$$= 50x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

c) $f(x) = x^2t + xt^2 + t^3$ Letzter Term entfällt, da kein x enthalten
 $f'(x) = 2xt + t^2$

d) $f(x) = 4x - \ln(x)$
 $f'(x) = 4 - \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \underbrace{2x^2}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{h(x)}$ Produktregel anwenden
 $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
 $= 4x \cdot e^x + 2x^2 \cdot e^x$
 $= (4x + 2x^2)e^x$

f) $f(x) = \underbrace{3x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{h(x)}$ Produktregel anwenden
 $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
 $= 3 \ln(x) + 3x \cdot \frac{1}{x}$ Bruch mit Vorfaktor x kürzen
 $= 3 \ln(x) + 3$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad f(x) &= x\sqrt{x} \\ &= x^{1.5} \end{aligned}$$

Potenz zusammenfassen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1.5x^{0.5} \\ &= 1.5\sqrt{x} \end{aligned}$$

Wieder als Wurzel schreiben

$$\text{h)} \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \left. \begin{array}{l} \text{\textit{g}}(x) \\ \text{\textit{h}}(x) \end{array} \right\}$$

Quotientenregel anwenden

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2} \\ &= \frac{(1/x)x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{i)} \quad f(x) = \frac{e^x}{x^2} \left. \begin{array}{l} \text{\textit{g}}(x) \\ \text{\textit{h}}(x) \end{array} \right\}$$

Quotientenregel anwenden

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2} \\ &= \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{(x-2)e^x}{x^3} \end{aligned}$$

$$\text{j)} \quad f(x) = e^{x^3-2x^2}$$

Kettenregel anwenden

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$$

Äußere Funktion $g(x) = e^x$

$$f'(x) = (3x^2-4x) \cdot e^{x^3-2x^2}$$

Innere Funktion $h(x) = x^3-2x^2$

$$\text{k)} \quad f(x) = \ln(x^4-2x)$$

Kettenregel anwenden

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$$

Äußere Funktion $g(x) = \ln(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3-2) \cdot \frac{1}{x^4-2x} \\ &= \frac{4x^3-2}{x^4-2x} \end{aligned}$$

Innere Funktion $h(x) = x^4-2x$

Aufgabe 22 Extremstellen

Untersuche die folgenden Funktionen auf Extremstellen. Unterscheide dabei in lokal und global!

a)	$f(x) = x^2 - 8x$	Funktion	Werte der zweiten Ableitungen bei x_i
	$f'(x) = 2x - 8$	Erste Ableitung	$f''(4) = 2$ Minimum!
	$f''(x) = 2$	Zweite Ableitung	

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 2x - 8 &\stackrel{!}{=} 0 && \text{Setze 1. Ableitung null} && \text{Minimum bei 2 ist global, denn...} \\
 2x - 8 &= 0 && | + 8 && \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \\
 \Leftrightarrow 2x &= 8 && | : 2 && \\
 \Leftrightarrow x_1 &= 4 && &&
 \end{aligned}$$

b)	$f(x) = x^3 - 9x$	Funktion	Werte der zweiten Ableitungen bei x_i
	$f'(x) = 3x^2 - 9$	Erste Ableitung	$f''(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$ Maximum
	$f''(x) = 6x$	Zweite Ableitung	$f''(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$ Minimum

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 3x^2 - 9 &\stackrel{!}{=} 0 && \text{Setze 1. Ableitung null} && \text{Extrema sind lokal, denn...} \\
 &&& | + 9 && \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \\
 \Leftrightarrow 3x^2 &= 9 && | : 3 \text{ und } (\dots)^{0.5} && \\
 x_1 = -\sqrt{3} & \quad x_2 = \sqrt{3} && &&
 \end{aligned}$$

c)	$f(x) = x^4 - x^2$	Funktion	Werte der zweiten Ableitungen bei x_i
	$f'(x) = 4x^3 - 2x$	Erste Ableitung	$f''(x_1) > 0$ Minimum
	$f''(x) = 12x^2 - 2$	Zweite Ableitung	$f''(x_2) > 0$ Minimum
			$f''(x_3) = -2$ Maximum

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 4x^3 - 2x &\stackrel{!}{=} 0 && \text{Setze 1. Ableitung null} && \text{Das Maximum ist lokal, die Minima global} \\
 4x^3 - 2x &= 0 && | : x && \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \\
 \Leftrightarrow 4x^2 - 2 &= 0 && | \text{ MN-Formel} && \\
 x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & \quad x_3 = 0 &&
 \end{aligned}$$

d)	$f(x) = e^x - x$	Funktion	Werte der zweiten Ableitungen bei x_1
	$f'(x) = e^x - 1$	Erste Ableitung	$f''(0) = 1$ Minimum!
	$f''(x) = e^x$	Zweite Ableitung	

$$\begin{aligned}
 f'(x) = e^x - 1 &\stackrel{!}{=} 0 && \text{Setze 1. Ableitung null} && \text{Minimum bei 1 ist global, denn...} \\
 e^x - 1 &= 0 && | +1 \\
 \Leftrightarrow e^x &= 1 && | \ln(\dots) \\
 x_1 &= 0 && && \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty
 \end{aligned}$$

e)	$f(x) = x \cdot \ln(x)$	Funktion	Werte der zweiten Ableitungen bei x_1
	$f'(x) = \ln(x) + 1$	Erste Ableitung	$f''(e^{-1}) = e$ Minimum
	$f''(x) = 1/x$	Zweite Ableitung	

$$\begin{aligned}
 f'(x) = \ln(x) + 1 &\stackrel{!}{=} 0 && \text{Setze 1. Ableitung null} && \text{Minimum ist global, denn...} \\
 \ln(x) + 1 &= 0 && | -1 \\
 \Leftrightarrow \ln(x) &= -1 && | e^{(\dots)} \\
 x_1 &= e^{-1} && && \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty
 \end{aligned}$$

Aufgabe 23 Monotonie & Konvexität

Untersuche die folgenden Funktionen auf Monotonie und Konvexität.

$f(x) = x^3$	Funktion	Betrachtung der Konvexität (2. Ableitung)	
$f'(x) = 3x^2$	Erste Ableitung	$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$	$f(x)$ konvex für $x \geq 0$
$f''(x) = 6x$	Zweite Ableitung	$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \leq 0$	$f(x)$ konkav für $x \leq 0$

Betrachtung der Monotonie (1. Ableitung)

$f'(x) = 3x^2$ ist positiv $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ ist streng monoton steigend auf \mathbb{R}

Warum ist $f(x)$ streng monoton obwohl $f'(0)=0$?

Die Ableitung darf bei strenger Monotonie punktuell 0 sein

$f(x) = x^2 - x$	Funktion	Betrachtung der Konvexität (2. Ableitung)	
$f'(x) = 2x - 1$	Erste Ableitung	$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$f(x)$ konvex in \mathbb{R}
$f''(x) = 2$	Zweite Ableitung		

Betrachtung der Monotonie (1. Ableitung)

$f'(x) = 2x-1$ ist positiv $\forall x > 0.5$

$f(x)$ ist streng monoton steigend für $x > 0.5$

$f(x)$ ist streng monoton fallend für $x < 0.5$

$f(x) = x + \sqrt{x}$	Funktion	Betrachtung der Konvexität (2. Ableitung)	
$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	Erste Ableitung	$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$	$f(x)$ konkav für $x \geq 0$
$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$	Zweite Ableitung		

Betrachtung der Monotonie (1. Ableitung)

$f'(x)$ ist positiv $\forall x \geq 0$

$f(x)$ ist streng monoton steigend für $x \geq 0$

Warum beachten wir nur Werte für $x \geq 0$?

Die Wurzel ist für negative Werte nicht definiert

$f(x) = x\sqrt{x}$	Funktion	Betrachtung der Konvexität (2. Ableitung)	
$f'(x) = 1.5\sqrt{x}$	Erste Ableitung	$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$	$f(x)$ konvex für $x \geq 0$
$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$	Zweite Ableitung		

Betrachtung der Monotonie (1. Ableitung)

Warum beachten wir nur Werte für $x \geq 0$?

$f'(x)$ ist positiv für $x \geq 0$

Die Wurzel ist für negative Werte nicht definiert

$f(x)$ ist streng monoton steigend für $x \geq 0$

Aufgabe 24 Partielle Ableitungen

Berechne alle partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) Funktion $f(x,y) = 2x^3 + y^2 + xy$

Partielle Ableitung nach x

Partielle Ableitung nach y

Betrachte y als Konstante

Betrachte x als Konstante

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x$$

b) Funktion $f(x,y,z) = \frac{x+y^2}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y^2}{z}$

Partielle Ableitung nach x

Partielle Ableitung nach y

Partielle Ableitung nach z

Betrachte y,z als Konstanten

Betrachte x,z als Konstanten

Betrachte x,y als Konstanten

Zweiter Summand entfällt

Erster Summand entfällt

Betrachte $1/z$ als z^{-1}

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{x+y^2}{z^2}$$

c) Funktion $f(x,y,z) = 2x^3 \cdot y^2 \cdot \sqrt{\frac{z}{x^6}} = 2y^2 \sqrt{z}$

Partielle Ableitung nach x
0 da x nicht in f(...) enthalten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Partielle Ableitung nach y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y\sqrt{z}$$

Partielle Ableitung nach z

Wurzel gleich $(\dots)^{0.5}$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y^2}{\sqrt{z}}$$

d) Funktion $f(x,y,z) = \frac{x \cdot \ln(y)}{yz}$

Partielle Ableitung nach x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\ln(y)}{yz}$$

Partielle Ableitung nach y
Quotientenregel

$$g(y) = \ln(y) \quad g'(y) = y^{-1}$$

$$h(y) = y \quad h'(y) = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x}{z} \frac{g'(y)h(y) - g(y)h'(y)}{h(y)^2} \\ &= \frac{x}{z} \frac{y^{-1} \cdot y - \ln(y) \cdot 1}{y^2} \\ &= \frac{x}{z} \frac{1 - \ln(y)}{y^2} \end{aligned}$$

Partielle Ableitung nach z

1/z als z^{-1}

$$\frac{\partial f}{\partial z} = - \frac{x \cdot \ln(y)}{yz^2}$$

e) Funktion $f(x,y,z) = 2x \cdot \ln(xy^2z)$

Partielle Ableitung nach x

Produktregel

$$g(x) = 2x \quad g'(x) = 2$$

$$h(x) = \ln(xy^2z) \quad h'(x) = x^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \\ &= 2 \cdot \ln(xy^2z) + 2 \end{aligned}$$

Partielle Ableitung nach y

Kettenregel

$$g(y) = \ln(y) \quad g'(y) = y^{-1}$$

$$h(y) = xy^2z \quad h'(y) = 2xyz$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x \cdot \frac{2xyz}{xy^2z} \\ &= \frac{4x}{y} \end{aligned}$$

Partielle Ableitung nach z

Kettenregel

$$g(y) = \ln(y) \quad g'(y) = y^{-1}$$

$$h(y) = xy^2z \quad h'(y) = xy^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= 2x \cdot \frac{xy^2}{xy^2z} \\ &= \frac{2x}{z} \end{aligned}$$

Aufgabe 25 Extrema von mehrdimensionalen Funktionen

Berechne alle Punkte wo folgende Funktionen die notwendige Bedingung für ein Extremum erfüllen.

a) Funktion $f(x,y) = 5x^2 - x + y^2 - 5y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\iff x = 0.1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 5 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\iff y = 2.5$$

b) Funktion $f(x,y) = xy + 2x - 4y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\iff y = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - 4 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\iff x = 4$$

c) Funktion $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2 + 1}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y^2 + 1} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\implies x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2yx^2}{(y^2 + 1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{Kettenregel benutzen}$$

$$\frac{2y \cdot 0^2}{(y^2 + 1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{Bedingung } x=0$$

$$\implies y \text{ Wert ist egal}$$

Aufgabe 26 Lagrange Verfahren

Löse die folgenden Optimierungsprobleme mit dem Lagrange Verfahren:

a) $\max f(x,y) = xy$
 s.t. $x+y \leq 10$

$x+y \leq 10$ Nebenbedingung nach 0 auflösen

$\Leftrightarrow x+y-10 \leq 0$ Ungleichung mit λ multiplizieren

$\Leftrightarrow \lambda[x+y-10] \leq 0$ Linke Seite zu $f(x,y)$ addieren

$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda[x+y-10]$ Partielle Ableitungen 0 setzen

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = y + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = x + y - 10 \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

$y - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = x$
 (Einsetzen von $y = x$ in die ersten beiden Gleichungen ergibt $\lambda = -x$)
 (Einsetzen von $\lambda = -x$ in die dritte Gleichung ergibt $x+x-10=0$)

$$\begin{aligned} x+x-10 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-10=0 \Rightarrow x_1 = 5 \\ &\Rightarrow y_1 = 5 \end{aligned}$$

b) $\max f(x,y) = xy+x+y$
 s.t. $x+2y \leq 5$

$x+2y \leq 5$ Nebenbedingung nach 0 auflösen

$\Leftrightarrow x+2y-5 \leq 0$ Ungleichung mit λ multiplizieren

$\Leftrightarrow \lambda[x+2y-5] \leq 0$ Linke Seite zu $f(x,y)$ addieren

$L(x,y,\lambda) = xy+x+y+\lambda[x+2y-5]$ Partielle Ableitungen 0 setzen

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= y + 1 + \lambda \stackrel{!}{=} 0 & y + 0.5 - 0.5x = 0 &\iff y = 0.5x - 0.5 \\
 \frac{\partial f}{\partial y} &= x + 1 + 2\lambda \stackrel{!}{=} 0 & \iff \lambda = -0.5x - 0.5 \\
 \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= x + 2y - 5 \stackrel{!}{=} 0
 \end{aligned}$$

$x + x - 1 - 5 = 0 \iff 2x = 6 \implies x_1 = 3$
 $\implies y_1 = 1$

Aufgabe 27 Integralrechnung

Berechne die folgenden bestimmten Integrale:

- a) $\int_0^3 6x^2 \, dx = \left[2x^3 \right]_0^3 = 2 \cdot 27 - 2 \cdot 0 = 54$
- b) $\int_{-1}^1 4x + x^2 \, dx = \left[2x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = 2 + \frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- c) $\int_{-1}^1 1 + 0.5x \, dx = \left[x + 0.25x^2 \right]_{-1}^1 = 1 + 0.25 + 1 - 0.25 = 2$
- d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \int_0^1 x^{-0.5} \, dx = \left[2x^{0.5} \right]_0^1 = 2 - 0 = 2$
- e) $\int_1^2 \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \, dx = \left[\ln(x) - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \ln(2) - 0.5 - 0 + 1 = \ln(2) + 0.5$

Aufgabe 28 Zins- und Zinseszinsrechnung

- a) Sie zeichnen eine Anleihe über 5000€ zum Nennwert. Die Anleihe zahlt einen jährlichen Coupon von 3.5% und hat eine Laufzeit von 20 Jahren. Berechnen Sie das Endkapital.
- b) Wie hoch müsste der Couponzins der 20 jährigen Anleihe sein, damit sie ein Endkapital von 10000€ erhalten?
- c) Wie viel müssen Sie in eine Festgeldanlage mit 4 Jahren Laufzeit und 4% Zinsen investieren, damit Sie ein Endkapital von 10000€ erreichen?

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & C_n = C_0 (1 + i \cdot n) \\
 & = 5000€ (1 + 0.035 \cdot 20) \\
 & = 8500€ \\
 \text{b)} & C_n = C_0 (1 + i \cdot n) \\
 & 10000€ = 5000€ (1 + i \cdot 20) \\
 & \Leftrightarrow 2 = 1 + 20i \\
 & \Leftrightarrow 1 = 20i \\
 & \Leftrightarrow i = 0.05 = 5\% \\
 \text{c)} & C_n = C_0 (1 + i)^n \\
 & \Leftrightarrow C_0 = \frac{C_n}{(1 + i)^n} = \frac{10000€}{(1 + 0.04)^4} = 8548.04€
 \end{array}$$

- d) Wie hoch muss der Zins einer 10 jährigen Festgeldanlage sein, damit sie dasselbe Endkapital erreichen wie bei einer endfälligen Anleihe mit 5% Couponzins. Nehme dabei an, dass du die Anleihe zum Nennwert zeichnest.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Anleihe: } C_n = C_0 (1 + i \cdot n) & \text{Festgeldanlage: } C_n = C_0 (1 + i)^n \\
 C_n = C_0 (1 + 0.05 \cdot 10) & C_n = C_0 (1 + i)^{10}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Gleichsetzen: } C_0 (1 + 0.05 \cdot 10) = C_0 (1 + i)^{10} & \\
 \Leftrightarrow 1.5 = (1 + i)^{10} & \\
 \Leftrightarrow (1.5)^{0.1} = 1 + i & \\
 \Leftrightarrow i = 0.0414 = 4.14\% &
 \end{array}$$

Aufgabe 29 Unterjährige Verzinsung

a) Eine Festgeldanlage wird quartalsweise mit 0.75% Zinsen verzinst. Wie hoch ist das Endkapital bei einem Anlagebetrag von 10000€ und einer Anlagedauer von 5 Jahren? Wie hoch müsste eine jährliche Verzinsung sein, damit dasselbe Endkapital erreicht wird?

$$C_n = C_0 (1 + i)^n \quad \text{Hoch 20, da 5 Jahre 20 Quartale haben}$$

$$C_n = 10000€ (1 + 0.0075)^{20}$$

$$= 11.612€$$

$$i_{\text{Jahr}} = \left[1 + i_{\text{Q}}^{\frac{4 \text{ Quartale}}{1 \text{ Quartal}}} \right] - 1 = 0.0303 = 3.03\%$$

b) Welche monatlich berechnete Verzinsung entspricht einer jährlichen von 4.8%, wenn wir von einer einfachen Verzinsung ausgehen?

$$i_b = i_a \frac{\text{Länge Zeitraum b}}{\text{Länge Zeitraum a}} = 0.048 \cdot \frac{1 \text{ Monat}}{12 \text{ Monate}} = 0.004 = 0.4\%$$

c) Welche monatlich berechnete Verzinsung entspricht einer jährlichen von 4.8%, wenn wir von einer Verzinsung mit Zinseszins ausgehen?

$$i_b = \left[1 + i_a^{\frac{\text{Länge b}}{\text{Länge a}}} \right] - 1 = \left[1.048^{\frac{1}{12}} \right] - 1 = 0.0039 = 0.39\%$$

d) Eine Festgeldanlage wird kontinuierlich verzinst. Berechne das Endkapital nach 27 Monaten bei einem Anlagebetrag von 10000€ und einer Verzinsung von 4% pro Jahr.

$$C_n = C_0 e^{r \cdot t} = 10000€ \cdot e^{0.04 \cdot 2.25} = 10942€$$

Der Faktor 2.25 kommt von den 27 Monaten: 2.25 Jahre

Aufgabe 30 Renditerechnung

a) Ein Bankberater bietet ihnen eine 5 jährige Festgeldanlage mit variablem Zins an. Im ersten Jahr beträgt der Zins zwar nur 1%, dafür steigt er in jedem Folgejahr um 1%, sodass sie im zweiten Jahr 2%, im dritten Jahr 3% usw. bekommen. Er argumentiert, dass sie damit ja im Schnitt 3% Rendite machen. Zeigen Sie ihm, dass die tatsächliche Rendite etwas niedriger ist.

$$r = \left[\frac{C_n}{C_0} \right]^{\frac{1}{t}} - 1 \quad \text{Wähle o.B.d.A. } C_0 = 10000\text{€}$$

$$C_n = C_0 \cdot 1.01 \cdot 1.02 \cdot 1.03 \cdot 1.04 \cdot 1.05 = 11587.28\text{€}$$

$$r = \left[\frac{11587.28\text{€}}{10000\text{€}} \right]^{\frac{1}{5}} - 1 = 0.0299 = 2.99\%$$

Aufgabe 31 Barwertrechnung & ewige Renten

a) Berechne den Barwert einer Zahlung von 10000€ in 10 Jahren bei einem Zins von 2%.

$$PV = 10000\text{€} \cdot \frac{1}{(1+0.02)^{10}} = 8203.48\text{€}$$

b) Berechne den Barwert einer Anleihe mit 10000€ Nennwert, 3 Jahren Laufzeit und 5% Coupon bei einem Zinssatz von 2%

$$PV = 500\text{€} \cdot \frac{1}{1.02} + 500\text{€} \cdot \frac{1}{1.02^2} + 10500\text{€} \cdot \frac{1}{1.02^3} = 10865.17\text{€}$$

c) Berechne den Barwert einer ewigen Rente von 1200€ pro Jahr bei einem Zins von 3% Wie hoch müsste der Zins sein, damit die ewige Rente einen Barwert von 240000€ hat?

$$PV = \frac{1200\text{€}}{0.03} = 40000\text{€}$$

$$PV = \frac{1200\text{€}}{i} = 240000\text{€} \iff i = 0.005 = 0.5\%$$

Aufgabe 32 Annuitäten

a) Sie zahlen zu Beginn jedes Jahres 1200€ in einen Sparplan mit jährlicher Verzinsung von 2% ein. Berechnen Sie das Endkapital nach 30 Jahren.

$$FV = A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right] = 1200€ \left[\frac{1.02^{31} - 1.02}{0.02} \right] = 49655.32€$$

b) Wie hoch müsste die jährliche Einzahlung sein, damit sie ein Endkapital von 100000€ erreichen?

$$FV = A \left[\frac{(1.02)^{31} - 1.02}{0.02} \right] \stackrel{!}{=} 100000€$$

$$\Leftrightarrow A = 100000€ \left[\frac{0.02}{(1.02)^{31} - 1.02} \right]$$

$$\Leftrightarrow A = 2416.65€$$

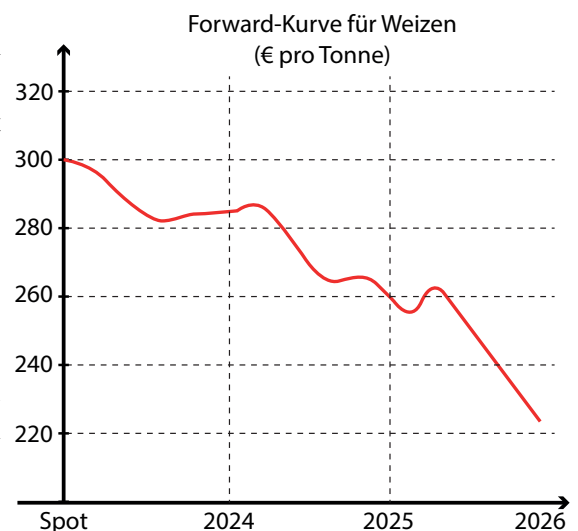
Aufgabe 33 Termingeschäfte und Optionen

a) Sie kaufen 10 Tonnen Weizen zum 01.01.2025. Wie viel müssen Sie dafür bezahlen? Hat sich das Geschäft gelohnt, wenn der Spot-Preis von Weizen am 01.01.2025 so hoch ist wie der heutige?

Ich muss 2600€ dafür bezahlen. Bleibt der Preis bei 300€ pro Tonne müsste ich am 01.01.2025 für den Weizen 3000€ bezahlen. Dank des Termingeschäfts habe ich mir 400€ gespart.

b) Wie hoch müsste der Strike einer Put-Option auf Weizen sein, damit er bei einer Ausübung bei einem Spotpreis von 230€ pro Tonne 15€ auszahlt?

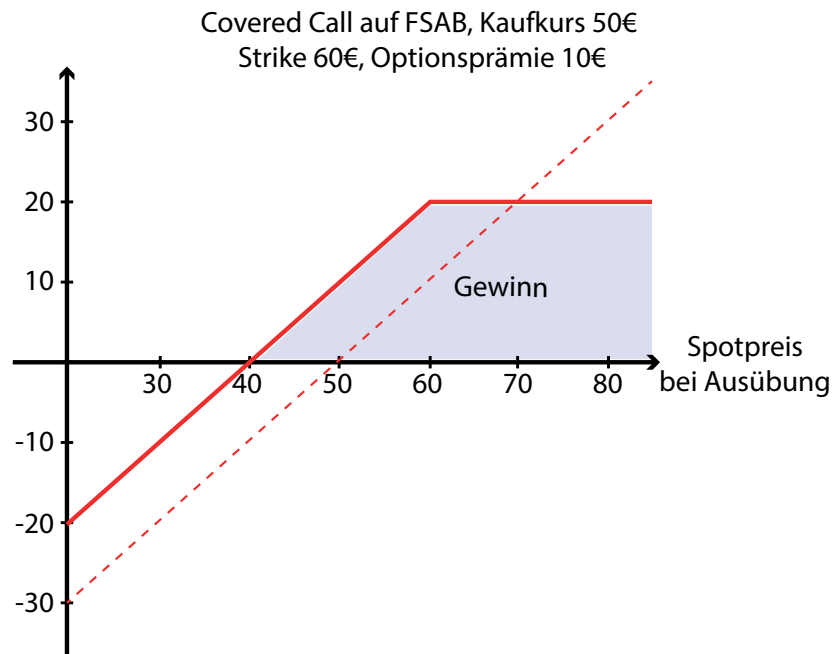
Put-Option bedeutet Verkaufsoption. Der Strike muss daher bei 245€ pro Tonne liegen, damit ich bei Ausübung die Differenz zum Spotpreis als Gewinn erzielen kann.



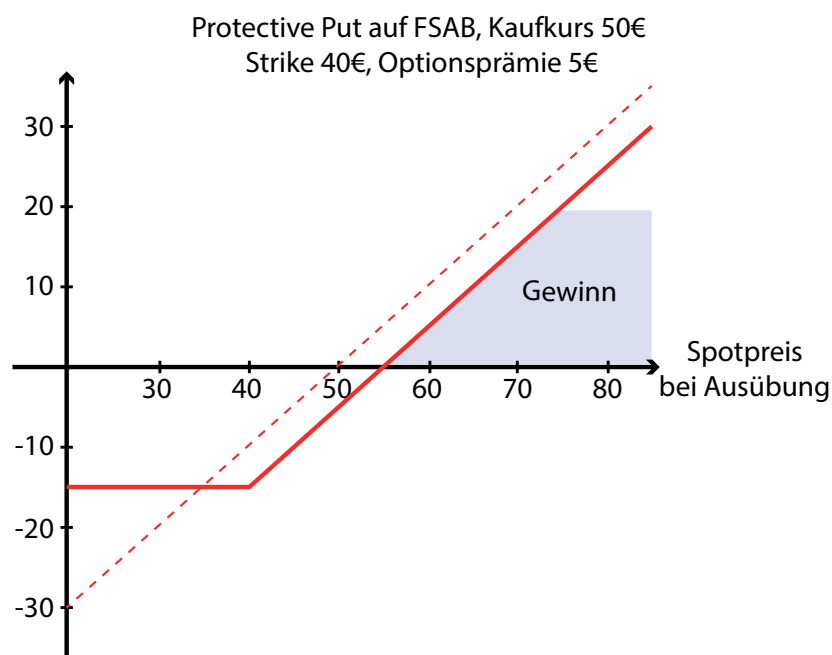
c) Sie kaufen eine Call-Option auf Mais mit einem Strike von 20€ pro Hektoliter. Wie viel darf die Option kosten, damit sie bei einer Ausübung bei einem Spotpreis von 25€ pro Hektoliter keinen Verlust machen?

Call-Option bedeutet Kaufoption. Bei der beschriebenen Ausübung (Strike 20€ und Ausübungspreis 25€) erhalte ich eine Auszahlung von 5€ - so viel darf mich die Option kosten, wenn ich keinen Verlust möchte.

d) Sie kaufen eine Aktie der FSAB AG für 50€ und verkaufen gleichzeitig eine Call-Option für diese Aktie mit einem Strike von 60€ zu einem Preis von 10€. Stellen Sie Gewinn und Verlust in Abhängigkeit vom Preis der Aktie bei Ausübung der Call-Option dar. Finden Sie im Internet einen Namen für dieses Konstrukt?



e) Sie kaufen eine Aktie der FSAB AG für 50€ und gleichzeitig eine Put-Option für diese Aktie mit einem Strike von 40€ zu einem Preis von 5€. Stellen Sie Gewinn und Verlust in Abhängigkeit vom Preis der Aktie bei Ausübung der Put-Option dar. Finden Sie im Internet einen Namen für dieses Konstrukt?



Aufgabe 34 Devisen und Realzinsen

a) Wie viel Euro müssen sie besitzen, um in der USA, dem UK und der Schweiz als Millionär zu gelten? Verwenden Sie geeignete Quellen, um die aktuellen Wechselkurse zu recherchieren.

Am 7. März 2023 finden sich folgende Kurse:

EUR/USD = 1.0604	Für einen Euro erhalte ich 1.0604 US-Dollar
EUR/GBP = 0.8912	Für einen Euro erhalte ich 0.8912 Pound Sterling
EUR/CHF = 0.9952	Für einen Euro erhalte ich 0.9952 Schweizer Franken

Ich teile die Million durch diese Kurse.

Millionär in USD	943.040€
Millionär in GBP	1.122.082€
Millionär in CHF	1.004.823€

b) Verwende die Eurokurse USD/MXN = 18.0 und USD/NOK = 10.4 um zu berechnen, wie viele mexikanische Pesos sie für eine norwegische Krone erhalten. Geben Sie dazu auch das Währungspaar explizit an!

NOK/MXN Wie viele mexikanische Pesos erhalte ich für eine norwegische Krone?

Teile USD/MXN durch USD/NOK

$$\text{NOK/MXN} = 1.731$$

c) In der Eurozone erhalten Sie 2% aufs Tagesgeld bei einer Inflation von 8.5%. In Polen beträgt die Inflation 16%, dafür erhalten sie auf Guthaben in Zloty, aber auch 6% auf Tagesgeld. Vergleiche die Realzinsen!

$$i = r + \pi + r \pi$$

$$\Leftrightarrow 0.02 = r + 0.085 + 0.085r$$

$$\Leftrightarrow -0.065 = 1.085r$$

$$\Leftrightarrow r = -0.0599 = -5.99\%$$

$$i = r + \pi + r \pi$$

$$\Leftrightarrow 0.06 = r + 0.160 + 0.160r$$

$$\Leftrightarrow -0.100 = 1.160r$$

$$\Leftrightarrow r = -0.0862 = -8.62\%$$

Aufgabe 35 Tilgungsrechnung

a) Sie nehmen ein 10 jähriges Darlehn über 50000€ mit einem jährlichen Zinssatz von 2% auf. Berechnen Sie die Zinslast bei endfälliger Tilgung.

$$Z = S \cdot i \cdot n = 50000\text{€} \cdot 0.02 \cdot 10 = 10000\text{€}$$

b) Wie hoch dürfte der jährliche Zinssatz sein, damit die Zinskosten 2500€ nicht übersteigen?

$$Z = S \cdot i \cdot n = 50000\text{€} \cdot i \cdot 10 \stackrel{!}{=} 2500\text{€}$$

$$\Leftrightarrow i = \frac{2500\text{€}}{50000\text{€} \cdot 10} = 0.005 = 0.5\%$$

c) Berechnen Sie die Zinslast und die Höhe der Tilgungsrate des in Aufgabenteil a) beschriebenen Darlehns, wenn dieses mit jährlichen Raten getilgt werden würde.

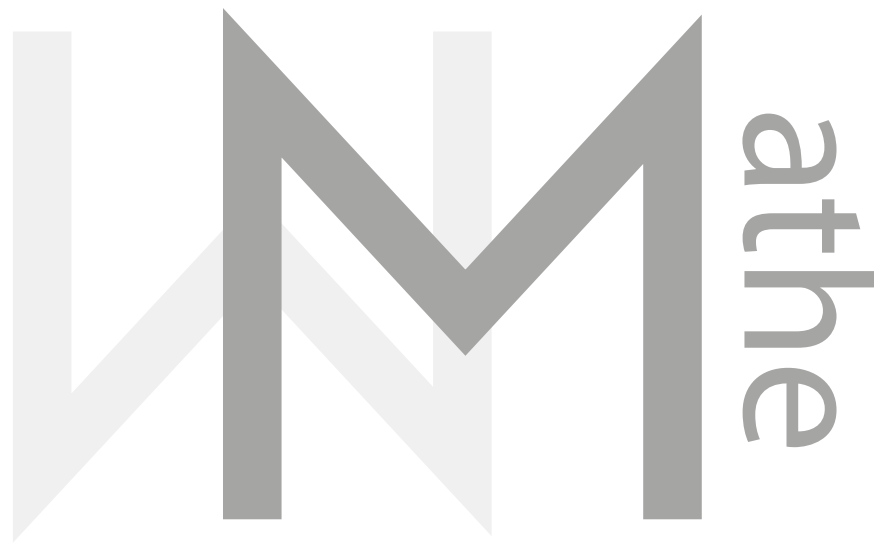
$$\text{Tilgung} = \frac{50000\text{€}}{10} = 5000\text{€}$$

$$Z = \frac{S \cdot i \cdot (n+1)}{2} = \frac{50000\text{€} \cdot 0.02 \cdot 11}{2} = 5500\text{€}$$

d) Berechnen Sie die Zinslast und die Höhe der Tilgungsrate des in Aufgabenteil a) beschriebenen Darlehns, wenn dieses mit jährlichen Annuitäten getilgt werden würde. Berechnen Sie dabei zuerst die Höhe der Annuität.

$$A = S \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 50000\text{€} \frac{0.02 \cdot 1.02^{10}}{1.02^{10} - 1} = 5566.33\text{€}$$

$$Z = nA - S = 5663.27\text{€}$$



Bereitgestellt durch das Zentrum für Ökonomik (ZÖK)
der DHBW Ravensburg