

Aufgabe 1 Grundrechenarten

Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich.

- a) $3 \cdot (4+3-(2+1)^2)^2$
- b) $80 - 8\sqrt{25} / 2$
- c) $(a+b)/b - a^2b - a/b + b(a)^2$
- d) $a(b \cdot (c+d))e - ecba$

Aufgabe 2 Vorrang

Überlege, welche Klammern du weglassen könntest, ohne das Ergebnis zu verändern!

- a) $5 + ((6 - 2) \cdot (3 + 1)) - (-1)$
- b) $(7^{(2+3)} - 5 \cdot (1/2)) + 3 + (4+5)$
- c) $\frac{5 \log(2x)}{(1-x)} + (3x)^{(3-2)}$

Aufgabe 3 Potenzen

Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich.

- a) $(a^8 \cdot b^6 / a^2) / ab$
- b) $\sqrt{x^5 / y^{-2}} / yx^{-1.5}$
- c) $\sqrt{2xa^2} - \sqrt[4]{64a^4x^2}$
- d) $\sqrt{(a^2b)^{-1}(ab^2)^{-1} / ab}$

Aufgabe 4 Bruchrechnen

Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich.

- a) $\frac{2x}{24y} + \frac{xy}{6y^2}$
- b) $\frac{7}{4x^2 + 2} - x(8x^3 + 4x)^{-1}$
- c) $\frac{a+b}{a - a^{-1}b^2} - \frac{a-b}{a}$
- d) $\frac{(12x+12)^2}{36x^2 - 12x} - \frac{12(x^2 + 1)}{3x^2 - x}$



Aufgabe 5 Prozentrechnen

Wir betrachten einen fiktiven Staat mit 5 Millionen Einwohnern. Nach umfangreichen Reformen möchte der Staat seine Erfolge quantifizieren.

Stelle die Änderungen der rechts gezeigten Kennzahlen (wenn jeweils möglich) als absoluten Wert, als Prozentwert und in Prozentpunkten dar.

Hinweis: Nehme dabei an, dass sich die Quoten immer auf die ganze Bevölkerung beziehen!

| MEGA-Reform Fortschrittsbericht | | |
|------------------------------------|-------------|-------------|
| Kennzahl | Vorher | Nachher |
| BIP | 200 Mrd. \$ | 280 Mrd. \$ |
| Inflationsrate | 20% | 5% |
| Durchschnittseinkommen | 8.000\$ | 8960\$ |
| Akademikerquote | 16% | 20% |
| Urbanisierungsgrad | 44% | 62% |
| Arbeitslosenquote | 24% | 14% |

Aufgabe 6 Logarithmen

Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich.

- a) $3 \log_5(10) - \log_5(8)$
- b) $\log_{10}(\sqrt{40}) + 0.5 \log_{10}(25)$
- c) $\log_{10}(125) + \ln(8) / \ln(10)$
- d) $\ln(x) e^{\ln(x)} - \ln(x)$

Aufgabe 7 Tutorial Boss

Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich.

$$a) \frac{\sqrt{\log_{10}(400)}}{\log_{10}(20)} \frac{(0.5^{0.1})^5}{\sqrt{\log_{20}(100)}} \quad b) \sqrt{\frac{(25x^4 - 10x^3 + 4x^2)^{-1}}{(\log_{10}(x))^{-2}}} + \frac{\log_{10}(x^{17})}{85x^2 - 34x}$$



LÖSUNGEN AUF FOLGENDEN SEITEN





Aufgabe 1 Grundrechenarten

- a) $3 \cdot (4+3-\underbrace{(2+1)^2})^2$ Innerste Klammer hat Vorrang
 $= 3 \cdot (4+3-\underbrace{(3)^2})^2$ Potenz hat innerhalb der Klammer Vorrang
 $= 3 \cdot (4+3-\underbrace{9})^2$ Rechne in der Klammer von links nach rechts
 $= 3 \cdot (-2)^2$ Minus mal Minus gibt Plus
 $= 3 \cdot 4 = 12$
- b) $80 - 8\sqrt{25}/2$ Wurzel ist Potenz und hat Vorrang
 $= 80 - \frac{8 \cdot 5}{2}$ Rechne von links nach rechts
 $= 80 - 20$
 $= 60$
- c) $(a+b)/b - \underline{a^2b} - a/b + \underline{b(a)^2}$ Heben sich gegenseitig auf
 $= \underline{(a+b)/b} - a/b$ Distributivgesetz anwenden
 $= \underline{a/b} + b/b - \underline{a/b}$ Heben sich gegenseitig auf
 $= 1$
- d) $\underline{a(b \cdot (c+d))}e - ecba$ Distributivgesetz anwenden
 $= \underline{ae(bc+bd)} - ecba$ Distributivgesetz anwenden
 $= \underline{abce} + \underline{abde} - \underline{ecba}$ Ist dasselbe, da (\cdot) kommutativ
 $= abde$

Aufgabe 2 Vorrang

$$a) \quad 5 + ((6-2) \cdot (3+1)) - (-1) = 5 + (6-2) \cdot (3+1) - (-1)$$

Rote und grüne Klammer sind wichtig - sie geben + bzw. - Vorrang vor der Multiplikation

Die blaue Klammer ist überflüssig, da die Multiplikation ohnehin Vorrang hätte

Die schwarze Klammer sollte beibehalten werden, auch wenn sie streng genommen nicht notwendig ist.

$$b) \quad (7^{(2+3)} - 5 \cdot (1/2)) + 3 + (4+5) = 7^{2+3} - 5 \cdot 1/2 + 3+4+5$$

Die rote Klammer ist überflüssig, da die Addition assoziativ ist.

Die blaue und die grüne Klammer sind überflüssig. Die Reihenfolge spielt hier keine Rolle.

Die schwarze Klammer ist für einen Menschen überflüssig. Durch die Hochstellung ist klar, dass die „+3“ zum Exponenten gehört. Beim Arbeiten mit einer Mathesoftware sollte allerdings $7^{(2+3)}$ geschrieben werden.

$$c) \quad \frac{5 \log(2x)}{(1-x)} + (3x)^{(3-2)} = \frac{5 \log(2x)}{1-x} + (3x)^{3-2}$$

Die grüne Klammer ist überflüssig, da der Nenner als Ganzes ausgewertet wird.

Die schwarze Klammer ist wichtig, da sie zeigt dass wir $\log(2x)$ meinen und nicht $\log 2 \cdot x$

Die blaue Klammer ist wichtig, da sich der Exponent sonst nur auf das x bezieht.

Für die rote Klammer gilt dasselbe wie für die schwarze Klammer in der b)



Aufgabe 3 Potenzen

- a) $(a^8 \cdot b^6 / a^2) / ab$ Optional: Umschreiben
 $= ((a^8 / a^2) \cdot b^6) / ab$ Potenzen mit gleicher Basis zusammenfassen
 $= (a^6 \cdot b^6) / ab$ Potenzen mit gleichem Exponenten zusammenfassen
 $= (ab)^6 / ab$ Potenzen mit gleicher Basis zusammenfassen
 $= (ab)^5$
- b) $\sqrt{x^5 / y^{-2}} / yx^{1.5}$ Optional: Umschreiben
 $= (x^5 / y^{-2})^{0.5} / yx^{1.5}$ Potenzen von Potenzen
 $= (x^{2.5} / y^{-1}) / yx^{1.5}$ Negativer Exponent verwandelt (/) in (·)
 $= yx^{2.5} / yx^{1.5}$ Exponenten verrechnen
 $= x^4$
- c) $\sqrt{2xa^2} - \sqrt[4]{64a^4x^2}$ Zu Quadratwurzel (Potenzen von Potenzen)
 $= \sqrt{2xa^2} - \sqrt{8a^2x}$ Wurzeln aufteilen
 $= \sqrt{2x} \sqrt{a^2} - \sqrt{8x} \sqrt{a^2}$ Rechte Wurzeln ausklammern
 $= \sqrt{a^2} (\sqrt{2x} - \sqrt{8x})$ Vereinfachen
 $= a(\sqrt{2x} - 2\sqrt{2x})$ Vereinfachen
 $= -a\sqrt{2x}$
- d) $\sqrt{(a^2b)^{-1}(ab^2)^{-1} / ab}$ Terme als Brüche schreiben
 $= \sqrt{\frac{1}{a^2b} \frac{1}{ab^2} \cdot \frac{ab}{1}}$ Multiplikation mit Kehrwert
 $= \sqrt{\frac{1}{a^2b} \frac{1}{ab^2} \frac{1}{ab}}$ Terme zusammenfassen
 $= \sqrt{\frac{1}{a^4b^4}}$ Potenzen von Potenzen
 $= \frac{1}{a^2b^2}$

Aufgabe 4 Bruchrechnen

- a) $\frac{2x}{24y} + \frac{xy}{6y^2} \cdot \frac{y}{y}$ Rechter Bruch mit y kürzen
 $= \frac{2x/2}{24y/2} + \frac{x}{6y}$ Linken Bruch mit 2 kürzen
 $= \frac{x}{12y} + \frac{x}{6y} \cdot \frac{2}{2}$ Rechter Bruch mit 2 erweitern
 $= \frac{x}{12y} + \frac{2x}{12y}$ Brüche zusammenfassen
 $= \frac{x+2x}{12y} = \frac{3x}{12y} = \frac{x}{4y}$
- b) $\frac{7}{4x^2+2} - x(8x^3+4x)^{-1}$ Als Bruch darstellen
 $= \frac{7}{4x^2+2} - \frac{x}{8x^3+4x} \cdot \frac{x}{x}$ Rechten Bruch mit x kürzen
 $= \frac{7}{4x^2+2} - \frac{1}{8x^2+4}$ Linken Bruch mit 2 erweitern
 $= \frac{14}{8x^2+4} - \frac{1}{8x^2+4} = \frac{13}{8x^2+4}$
- c) $\frac{a+b}{a-a^{-1}b^2} - \frac{a-b}{a}$ Brüche zusammenfassen!
 $= \frac{(a+b)(a-b)}{a^2-b^2}$ Binomische Formel anwenden
 $= \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2} = 1$
- d) $\frac{(12x+12)^2}{36x^2-12x} - \frac{12(x^2+1)}{3x^2-x}$ Binomische Formel anwenden
 $= \frac{144x^2+48x+144}{36x^2-12x} - \frac{12(x^2+1)}{3x^2-x}$ Mit 12 kürzen, ausklammern
 $= \frac{12x^2+4x+12}{3x^2-x} - \frac{12x^2+12}{3x^2-x}$
 $= \frac{12x^2+4x+12-(12x^2+12)}{3x^2-x}$ Terme im Zähler addieren
 $= \frac{4x}{3x^2-x} = \frac{x}{3x-1}$



Aufgabe 5 Prozentrechnen

| Kennzahl | Vorher | Nachher | Absolut | Prozent | Prozentpunkte |
|---------------|-------------|-------------|--------------|---------|---------------|
| BIP | 200 Mrd. \$ | 280 Mrd. \$ | + 80 Mrd. \$ | + 40% | - |
| Inflation | 20% | 5% | - | - 75% | - 15 ppt. |
| Einkommen | 8.000 \$ | 8.960 \$ | + 960 \$ | + 12% | - |
| Akademiker | 16% | 20% | + 200.000 | + 25% | + 4 ppt. |
| Urbanisierung | 44% | 62% | + 900.000 | + 41% | + 18 ppt. |
| Arbeitslose | 24% | 14% | - 500.000 | - 42% | - 10 ppt. |

Aufgabe 6 Logarithmen

- a) $3 \log_5(10) - \log_5(8)$ Faktor in Log hineinziehen
 $= \log_5(1000) - \log_5(8)$ Logarithmen zusammenfassen
 $= \log_5(1000/8)$ Quotient berechnen
 $= \log_5(125) = 3$
- b) $\log_{10}(\sqrt{40}) + 0.5 \log_{10}(25)$ Wurzel aus log herausziehen
 $= 0.5 \log_{10}(40) + 0.5 \log_{10}(25)$ Faktor 0.5 ausklammern
 $= 0.5 (\log_{10}(40) + \log_{10}(25))$ Logarithmen zusammenfassen
 $= 0.5 (\log_{10}(1000))$ Logarithmen zusammenfassen
 $= 1.5$
- c) $\log_{10}(125) + \ln(8) / \ln(10)$ Formel für Basistausch
 $= \log_{10}(125) + \log_{10}(8)$ Logarithmen zusammenfassen
 $= \log_{10}(1000) = 3$
- d) $\ln(x) e^{\ln(x)} - \ln(x)$ $e^{\ln(x)} = x$
 $= \ln(x) x - \ln(x)$ x in Log reinziehen
 $= \ln(x^x) - \ln(x)$ Logarithmen zusammenfassen
 $= \ln(x^x/x) = \ln(x^{x-1})$

Aufgabe 7 Tutorial Boss

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{\sqrt{\log_{10}(400)}}{\log_{10}(20)} \frac{(0.5^{0.1})^5}{\sqrt{\log_{20}(100)}} &= \frac{\sqrt{\log_{10}(400)} \sqrt{0.5}}{\log_{10}(20) \sqrt{\log_{20}(100)}} \\
 &= \frac{\sqrt{0.5 \log_{10}(400)}}{\log_{10}(20) \sqrt{\log_{20}(100)}} \\
 &= \frac{\sqrt{\log_{10}(20)}}{\log_{10}(20) \sqrt{\log_{20}(100)}}
 \end{aligned}$$

Wurzel zusammenfassen



$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{\log_{10}(20)}}{\log_{10}(20)\sqrt{\log_{20}(100)}} & \stackrel{\text{Kürzen durch Wurzel}}{=} \frac{1}{\sqrt{\log_{10}(20)}\sqrt{\log_{20}(100)}} && \text{Wurzeln verbinden} \\
 & = \frac{1}{\sqrt{\log_{10}(20) \log_{20}(100)}} && \text{Rechten log in linken ziehen} \\
 & = \frac{1}{\sqrt{\log_{10}(20^{\log_{20}(100)})}} && \text{Definition des Logarithmus} \\
 & = \frac{1}{\sqrt{\log_{10}(100)}} \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \sqrt{\frac{(25x^4 - 10x^3 + 4x^2)^{-1}}{(\log_{10}(x))^{-2}}} + \frac{\log_{10}(x^{17})}{85x^2 - 34x} && \text{Negative Exponenten, 17 aus Log heraus} \\
 = & \sqrt{\frac{(\log_{10}(x))^2}{25x^4 - 10x^3 + 4x^2}} + \frac{17 \log_{10}(x) / 17}{85x^2 - 34x / 17} && \text{Durch 17 kürzen, Binomische Formel} \\
 = & \sqrt{\frac{(\log_{10}(x))^2}{(5x^2 - 2x)^2}} + \frac{\log_{10}(x)}{5x^2 - 2x} && \text{Wurzel (Potenzen von Potenzen)} \\
 = & \frac{\log_{10}(x)}{5x^2 - 2x} + \frac{\log_{10}(x)}{5x^2 - 2x} \\
 = & \frac{2\log_{10}(x)}{5x^2 - 2x}
 \end{aligned}$$