

Tutorium Generale

Wirtschaftsmathematik

Einheit I

Die Inhalte der ersten beiden Einheiten sind zu 100% Wiederholungen von Grundlagen aus der Mittel- und Oberstufe.

Diese werden in keiner Klausur explizit abgefragt werden. Im Gegenteil: Sie werden als Selbstverständlichkeit vorausgesetzt.

Schwächen in den Grundlagen führen zu unnötigen Fehlern, die Zeit und Punkte kosten und Aufgaben eventuell sogar schwerer machen!



Wiederholungen

- Grundregeln
- Potenzen
- Brüche
- Prozente
- Logarithmen

I

Grundrechenarten

Wir starten mit den vier Grundrechenarten. Keine Sorge, es geht nicht ums Kopfrechnen, sondern um Rechenregeln, die wir später ständig und unbewusst anwenden werden:

Vorrang

Assoziativgesetz

Kommutativgesetz

Distributivgesetz

Addition

$$\underbrace{a + b}_{\text{Summanden}} = c_{\text{Summe}}$$

Multiplikation

$$\underbrace{a \cdot b}_{\text{Faktoren}} = c_{\text{Produkt}}$$

Subtraktion

$$a - b = c$$

Minuend Subtrahend Differenz

Division

$$a / b = c$$

Dividend Divisor Quotient

Vorrang

Gemäß "Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich" gibt es vier Stufen, die wir unterscheiden:

- Geklammerte Ausdrücke von innen nach außen
- Potenzen und Wurzeln von innen nach außen
- Multiplikation und Division
- Addition und Subtraktion

Innerhalb dieser Stufen liegt ein Gleichstand vor. Bei einem "Gleichstand" rechnen wir von links nach rechts.

Okay, es gibt noch eine Ausnahme für Potenzen von Potenzen, aber dazu später mehr.

Vorrang

$$\begin{aligned} & 1 + 2 \cdot 3^2 - (4 + (5 \cdot 6)) / 2 - 1 \\ &= 1 + 2 \cdot 3^2 - (4 + 30) / 2 - 1 \\ &= 1 + 2 \cdot 3^2 - 34 / 2 - 1 \\ &= 1 + 2 \cdot 9 - 34 / 2 - 1 \\ &= 1 + 18 - 34 / 2 - 1 \\ &= 1 + 18 - 17 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Assoziativgesetz

Addition und Multiplikation sind assoziativ.

Assoziativ bedeutet, dass bei mehrfacher Addition oder Multiplikation die Reihenfolge der Ausführung keine Rolle spielt.

Wir können Klammern setzen, versetzen oder weglassen, ohne dass sich das Ergebnis ändert.

Bei Subtraktion und Division ist dies nicht möglich.

Assoziativität

$$(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3) = 6$$

$$(1 \cdot 2) \cdot 3 = 1 \cdot (2 \cdot 3) = 6$$

$$(1 - 2) - 3 \neq 1 - (2 - 3) \quad \times$$

$$(1 / 2) / 3 \neq 1 / (2 / 3) \quad \times$$

Kommutativgesetz

Addition und Multiplikation sind kommutativ.

Kommutativ bedeutet, dass sich das Ergebnis einer Addition oder Multiplikation nicht ändert, wenn ich die Elemente rechts und links vertausche.

Bei Subtraktion und Division ist dies nicht möglich.

Kommutativität

$$5 + 7 = 7 + 5 = 12$$

$$5 \cdot 7 = 7 \cdot 5 = 35$$

$$5 - 7 = 7 - 5 \quad \times$$

$$5 / 7 = 7 / 5 \quad \times$$


Distributivgesetz

Erzwingen wir den Vorrang von Addition oder Subtraktion durch eine Klammer, lernen wir das **Distributivgesetz** kennen!

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$a(b - c) = ab - ac$$

Distributivgesetz

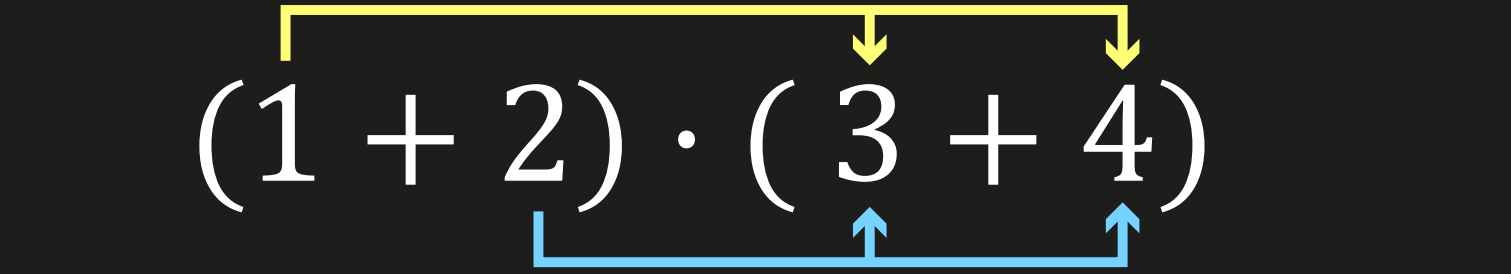

$$\begin{aligned} & 5 \cdot (1 + 2 + 3) \\ &= 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \\ &= 5 + 10 + 15 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Distributivgesetz

Werden zwei Klammern mit mehreren Summanden miteinander multipliziert, muss jeder Summand, der einen mit jedem Summanden der anderen Klammer multipliziert werden:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Distributivgesetz


$$\begin{aligned} & (1 + 2) \cdot (3 + 4) \\ &= 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ &= 3 + 4 + 6 + 8 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Distributivgesetz

Die binomischen Formeln sind nichts anderes als eine Konsequenz des Distributivgesetzes und der Potenzrechnung, die wir im Anschluss näher anschauen werden.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

Sie sparen Zeit beim Ausklammern.

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Auslassung

Auslassung: Der Operator für die Multiplikation kann in vielen Fällen weggelassen werden. Zwei häufige Szenarien, die wir auch in den binomischen Formeln finden:

Auslassung bei Faktoren vor einer Klammer:

$$a \cdot (b + c) = a(b + c)$$

Auslassung zwischen zwei Faktoren:

$$a \cdot b = ab$$

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich!

$$-(a + b) / 0.5 - 2a + 2b =$$

$$-(-a \cdot (b / c))c - (-4(4-8)) =$$

$$2c(a - 0.5(a + a/c - a)) =$$

.

Entferne alle überflüssigen Klammern!

$$(1 \cdot (2 + 3 + 5)) + (6 / (1 \cdot 2 \cdot 3)) =$$

$$(1 + (2 - (3 - 4) + 5) + 6) \cdot (7x)^2 =$$

Potenzen

Wenn der Exponent eine natürliche Zahl ist, wird die Basis a genau b mal "miteinander" multipliziert.

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$$

Bei einem Exponenten von 1 ist das Ergebnis die Basis. Wir können den Exponenten dann einfach weglassen.

$$7^1 = 7$$

Aber was ist, wenn der Exponent keine natürliche Zahl ist? Wir unterscheiden drei Fälle!

$$\begin{array}{c} \text{Exponent} \\ | \\ \underbrace{a^b}_{\text{Basis}} = \underbrace{C}_{\text{Potenzwert}} \end{array}$$

Potenzen

Bei einem Exponenten von 0 ist das Ergebnis 1

$$a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Bei einem negativen Exponenten arbeiten wir mit Kehrwerten.

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b} \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = 0.125$$

Bei einem Bruch als Exponent arbeiten wir mit Wurzeln.

$$a^{1/b} = \sqrt[b]{a} \quad 625^{1/4} = \sqrt[4]{625} = 5$$

Potenzen

$$\begin{array}{c} \text{Exponent} \\ \downarrow \\ \underbrace{a^b}_{\text{Basis}} = \underbrace{c}_{\text{Potenzwert}} \end{array}$$

Exponenten $b \in \mathbb{N}$: Multipliziere Basis b mal

Exponent $b = 1$: $a^1 = a$

Exponent $b = 0$: $a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Negativer Exponent $b < 0$: $a^{-b} = 1/a^b$

Bruch als Exponent $1/b$: $a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$

Potenzen

Darüber hinaus gibt es die fünf rechts gezeigten Regeln. Eine für Potenzen von Potenzen.

$$(4^8)^{0.25} = 4^{8 \cdot 0.25} = 4^2 = 16$$

Zwei für Produkte/Quotienten von Potenzen mit gleicher Basis.

$$4^{0.5} \cdot 4^{1.5} = 4^{0.5+1.5} = 4^2 = 16$$

Zwei für Produkte/Quotienten von Potenzen mit gleichem Exponent.

$$2^2 \cdot 5^2 = 10^2 = 100$$

Regeln für Potenzen

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$a^b / a^c = a^{b-c}$$

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

$$a^c / b^c = (a / b)^c$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

Vereinfache die folgenden Potenzen so weit wie möglich!

$$\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} \cdot x + \sqrt{x} =$$

$$2^{2x} / 4^x + (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}) / (ab)^{0.25} =$$

$$(\sqrt{x})^4 - 0.5x^6 / x^3 =$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} \cdot \sqrt[8]{xy^6 \cdot x^6y} =$$

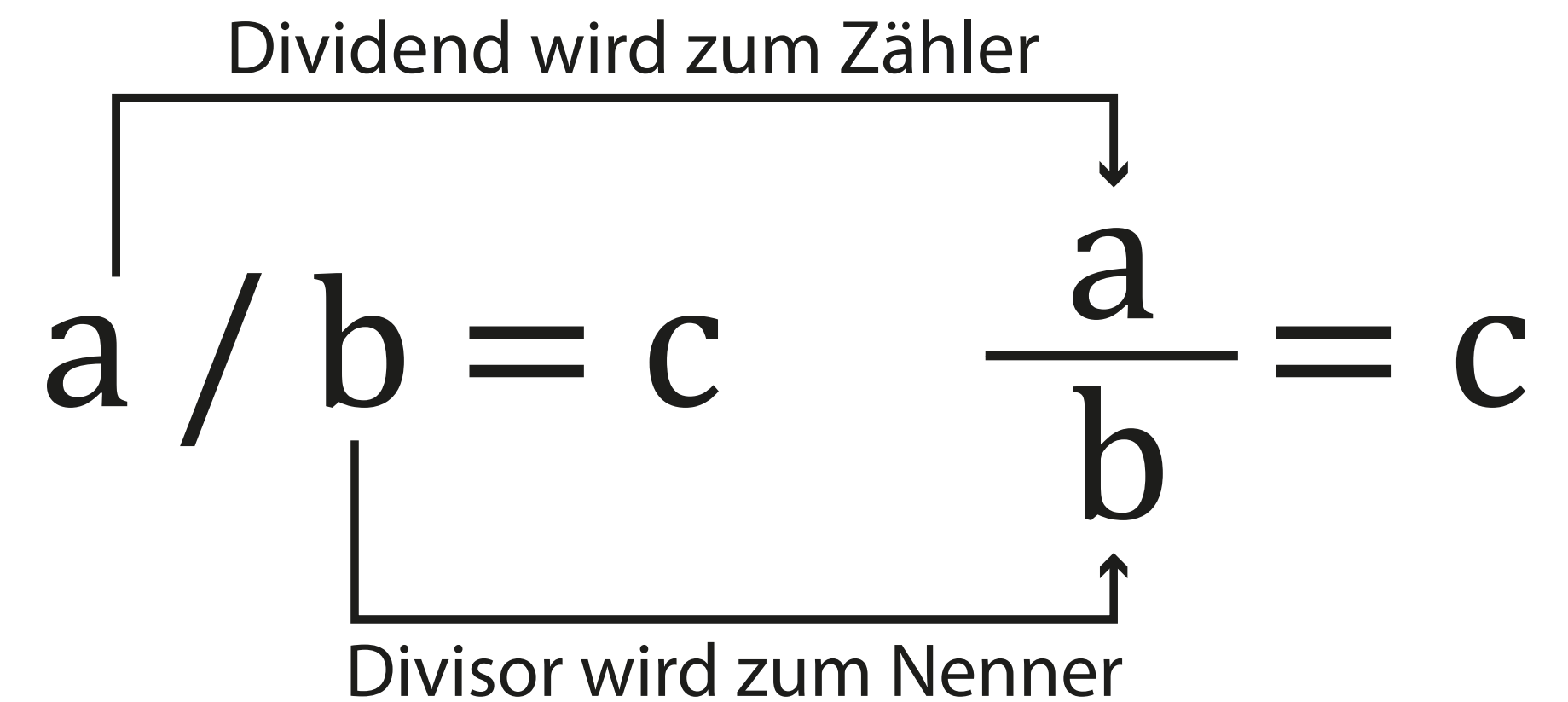
Bruchrechnen

Idee Wir schreiben die Operanden der Division nicht nebeneinander, sondern untereinander.

$$a / b = c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = c$$

Vorrang Zähler und Nenner werden getrennt ausgewertet, erst danach wird die Division ausgeführt.

$$\frac{a + b}{c + d} = (a + b) / (c + d)$$



Bruchrechnen

Kürzen/Erweitern Wir multiplizieren Zähler und Nenner mit einem Faktor und beachten dabei das Distributivgesetz!

$$\frac{4x + 2y}{8} = \frac{4x + 2y}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2x + y}{4}$$

Split/Merge Brüche mit gleichem Nenner die mit Addition oder Subtraktion verbunden sind, können zusammengefasst werden.

$$\frac{4x + 2y}{8} = \frac{4x}{8} + \frac{2y}{8}$$

Dividend wird zum Zähler

$$a / b = c \quad \frac{a}{b} = c$$

Divisor wird zum Nenner

Bruchrechnen

Kehrbrüche Eine Division durch einen Bruch ist äquivalent zur Multiplikation mit dem Kehrbruch:

$$\frac{4x + 2y}{8} / \frac{x+y}{2} = \frac{4x + 2y}{8} \cdot \frac{2}{x+y}$$

Mehr Kehrbrüche Ein Exponent mit negativem Vorzeichen vertauscht Zähler und Nenner:

$$\frac{4x + 2y}{8} \cdot \left(\frac{x+y}{2} \right)^{-1} = \frac{4x + 2y}{8} \cdot \frac{2}{x+y}$$

Dividend wird zum Zähler

$$a / b = c \quad \frac{a}{b} = c$$

Divisor wird zum Nenner

Vereinfache die folgenden Brüche so weit wie möglich!

$$\frac{16x^2 + 4x}{x^2} / (4 + x^{-1}) =$$

$$\left(\frac{12x - 8xy}{4x^2} \right)^2 \left(\frac{x}{3 - 2y} \right)^{-1} =$$

$$\frac{3y + xy}{x} - \frac{3y^2x^{-1} + y^2}{y} =$$


$$x \left(\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} \right)^{-4} =$$

Prozentrechnen

Prozent bedeutet übersetzt "von 100" und ist mathematisch nichts anderes als eine Abkürzung für den Bruch 1/100

$$\% = \frac{1}{100}$$

Beispiel Wie viel Alkohol ist in einem Halbe?

$$500\text{ml} \cdot 5.0\% = 500\text{ml} \cdot 5.0 \cdot \frac{1}{100} = 25\text{ml}$$


Alkoholgehalt Getränke

Mineralwasser	0.0%	Bockbier	8.0%
Apfelsaft	0.2%	Wein	12.0%
Radler	2.5%	Likör	17.5%
Normalbier	5.0%	Wodka	40.0%

Prozentrechnen

Multiplikation Werden zwei Prozentwerte multipliziert, ergibt sich der Faktor 1/10000.

Beispiel: Alkoholgehalt von 200ml Mische, die aus 20% Wodka und 80% alkoholfreiem Getränken besteht:

$$\begin{aligned}
 & 200\text{ml} \cdot 20\% \cdot 40\% \\
 & = 200\text{ml} \cdot 20 \cdot \frac{1}{100} \cdot 40 \cdot \frac{1}{100} = 16\text{ml}
 \end{aligned}$$

Alkoholgehalt Getränke

Mineralwasser	0.0%	Bockbier	8.0%
Apfelsaft	0.2%	Wein	12.0%
Radler	2.5%	Likör	17.5%
Normalbier	5.0%	Wodka	40.0%

Prozentrechnen

Differenzen von Prozentwerten können in Prozent oder Prozentpunkten angegeben werden.

Beispiel: Unterschied Alkoholgehalt Bier und Wodka

Prozentpunkte $40\% - 5\% = 35 \text{ ppt.}$

Prozent $\frac{40\%}{5\%} - 1 = 700\%$

Alkoholgehalt Getränke

Mineralwasser	0.0%	Bockbier	8.0%
Apfelsaft	0.2%	Wein	12.0%
Radler	2.5%	Likör	17.5%
Normalbier	5.0%	Wodka	40.0%

Prozentrechnen

Wachstumsraten von Werten werden im Allgemeinen mit der folgenden Formel berechnet.

$$\frac{\text{Neuer Wert}}{\text{Alter Wert}} - 1$$

Beispiel: Eine Brezel kostet 90ct statt 80ct. Um wie viel Prozent ist der Preis gestiegen?

$$\frac{90}{80} - 1 = 0.125 = 12.5\%$$



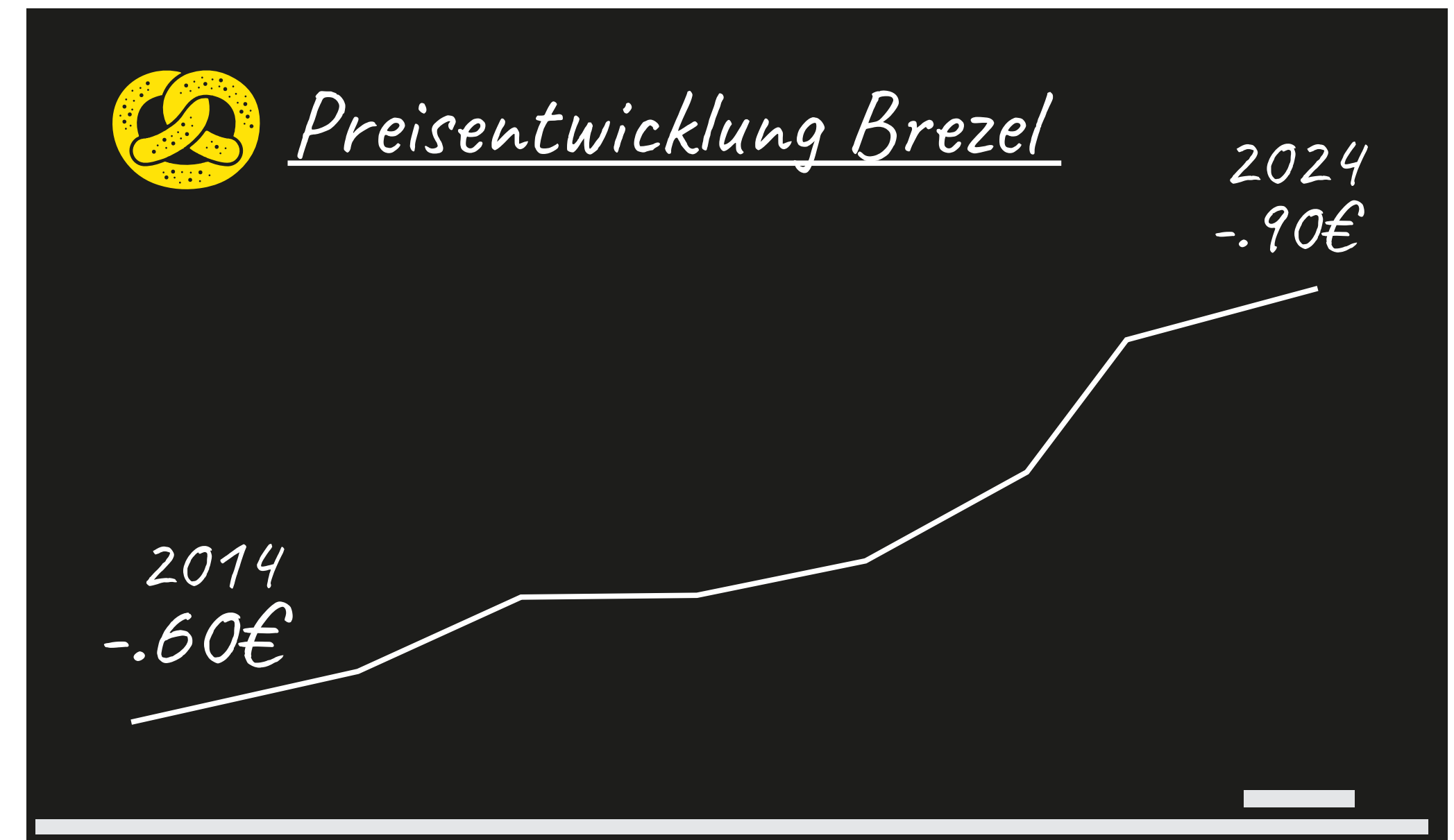
Prozentrechnen

Jährliche Wachstumsraten Um Wachstumsraten auf ein Jahr herunterzurechnen verwenden wir folgende Formel:

$$\left(\frac{\text{Neuer Wert}}{\text{Alter Wert}} \right)^{\frac{1}{\text{Jahre}}} - 1$$

Beispiel: Über 10 Jahre ist der Brezelpreis um insgesamt 50% gestiegen.

Auf das Jahr heruntergerechnet sind das nicht 5%!



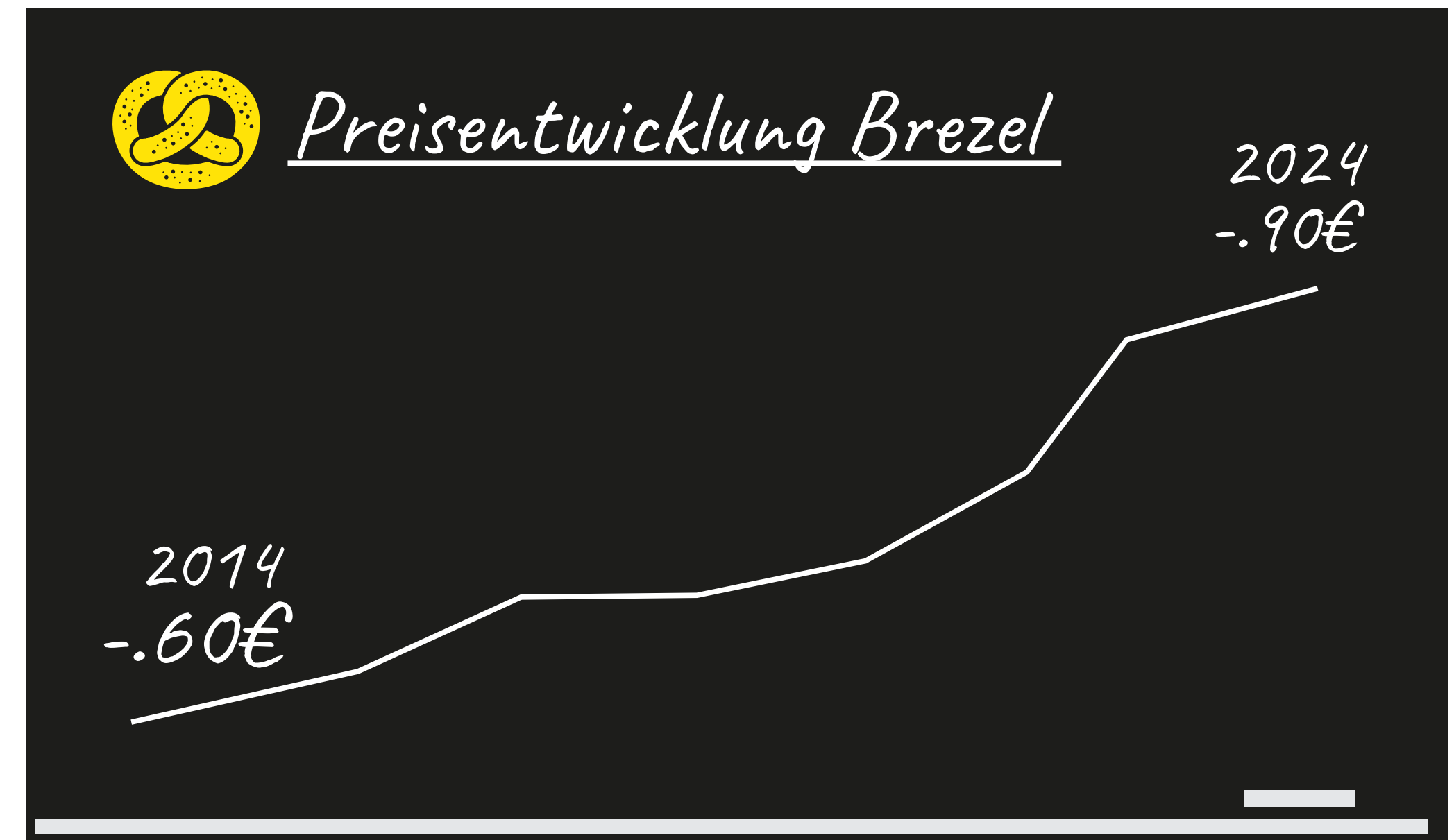
Prozentrechnen

Würden wir 5% Wachstum über 10 Jahre anwenden, erhalten wir deutlich mehr als 90ct.

$$60\text{ct} \cdot 1.05^{10} = 97.7\text{ct}$$

Die korrekte jährliche Wachstumsrate ist:

$$\left(\frac{90}{60}\right)^{\frac{1}{10}} - 1 = 4.138\%$$



Ein Limonadenhersteller verringert den Zucker-
gehalt von 1 Liter Limonade von 8.60% auf 5.16%.
Gib die Änderung absolut, sowie in Prozent und in
Prozentpunkten an!

Die Änderung kommt gut an. Innerhalb von drei
Jahren steigert sich der jährliche Absatz von
85000 Hektoliter auf 115000 Hektoliter. Gib die
jährliche Änderung und Gesamtänderung in
Prozent an!

Nach 5 Jahren in einer Festgeldanlage mit
Zinseszinsseffekt hat sich ein Kapital von 10.000€
auf 16105.10€ vermehrt. Wie hoch war der
jährliche Zinssatz? Nach wie viel Jahren würden
wir 25.000€ erreichen?

.

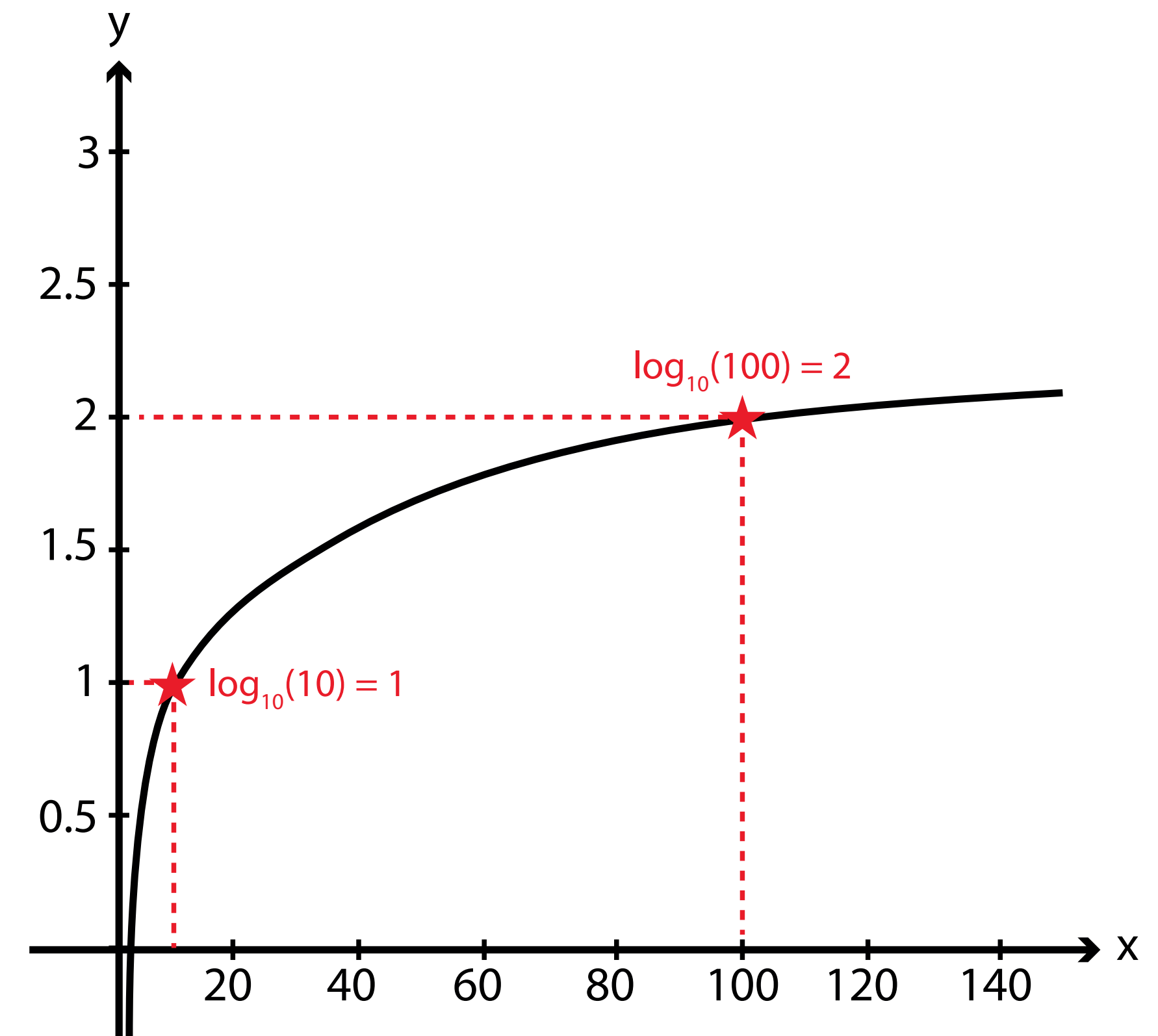
Logarithmus

Idee Lösung einer Potenzgleichung bei dem der Exponent gesucht wird, d. h.:

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a(c) = b$$

Basis Wird keine Basis angegeben, wird oft $a=10$ angenommen, aber nicht immer ...

$$10^b = c \Leftrightarrow \log(c) = b$$



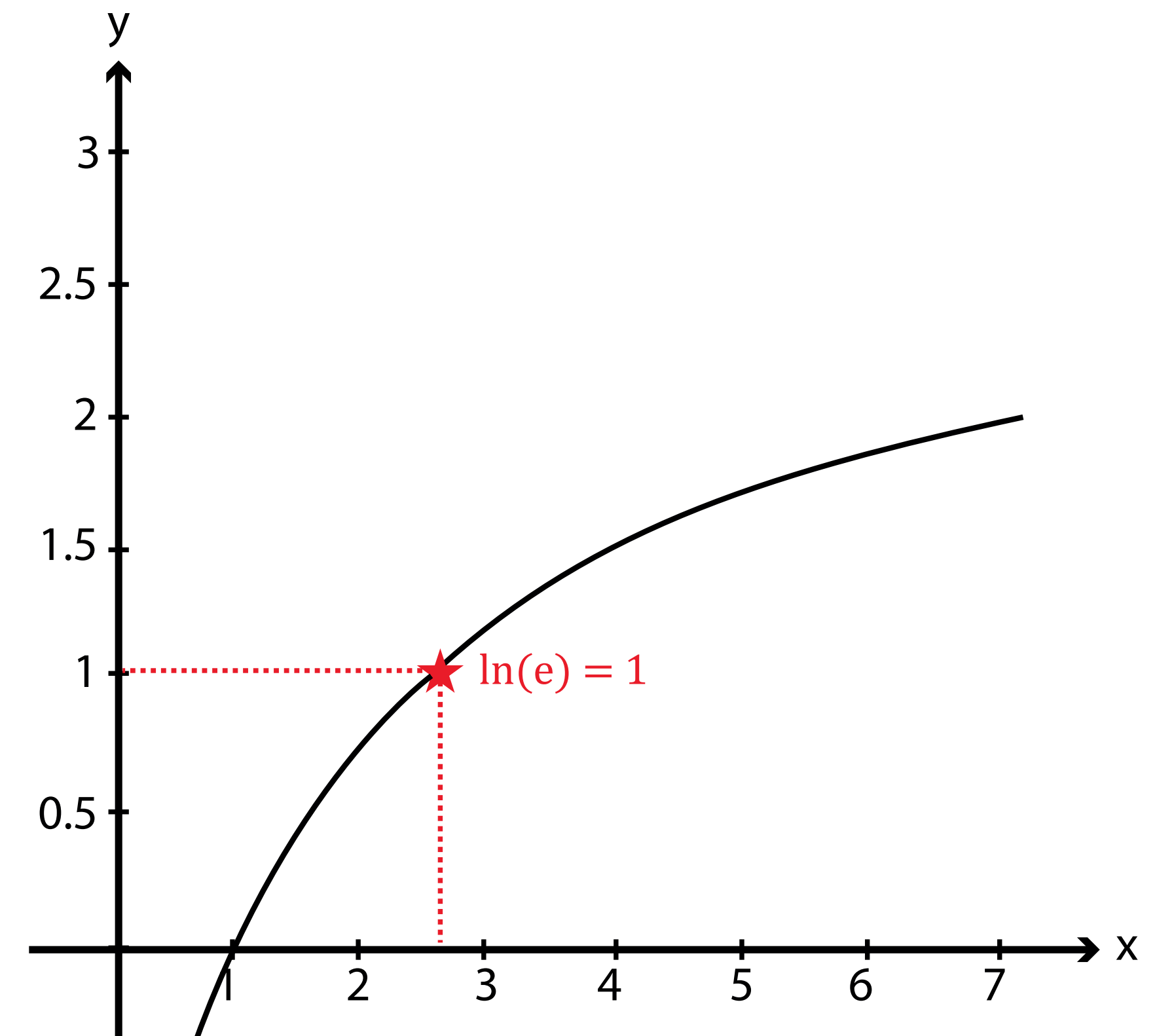
Logarithmus

Natürlicher Logarithmus Der Operator $\ln(\dots)$ ist die Abkürzung von "Logarithmus naturalis" und hat immer die Basis e .

$$e^b = c \Leftrightarrow \ln_e(c) = b$$

Eulersche Zahl Die Eulersche Zahl e ist eine nicht-rationale Zahl, die in der Analysis und der Statistik eine besondere Bedeutung haben wird.

$$e \approx 2.71828$$

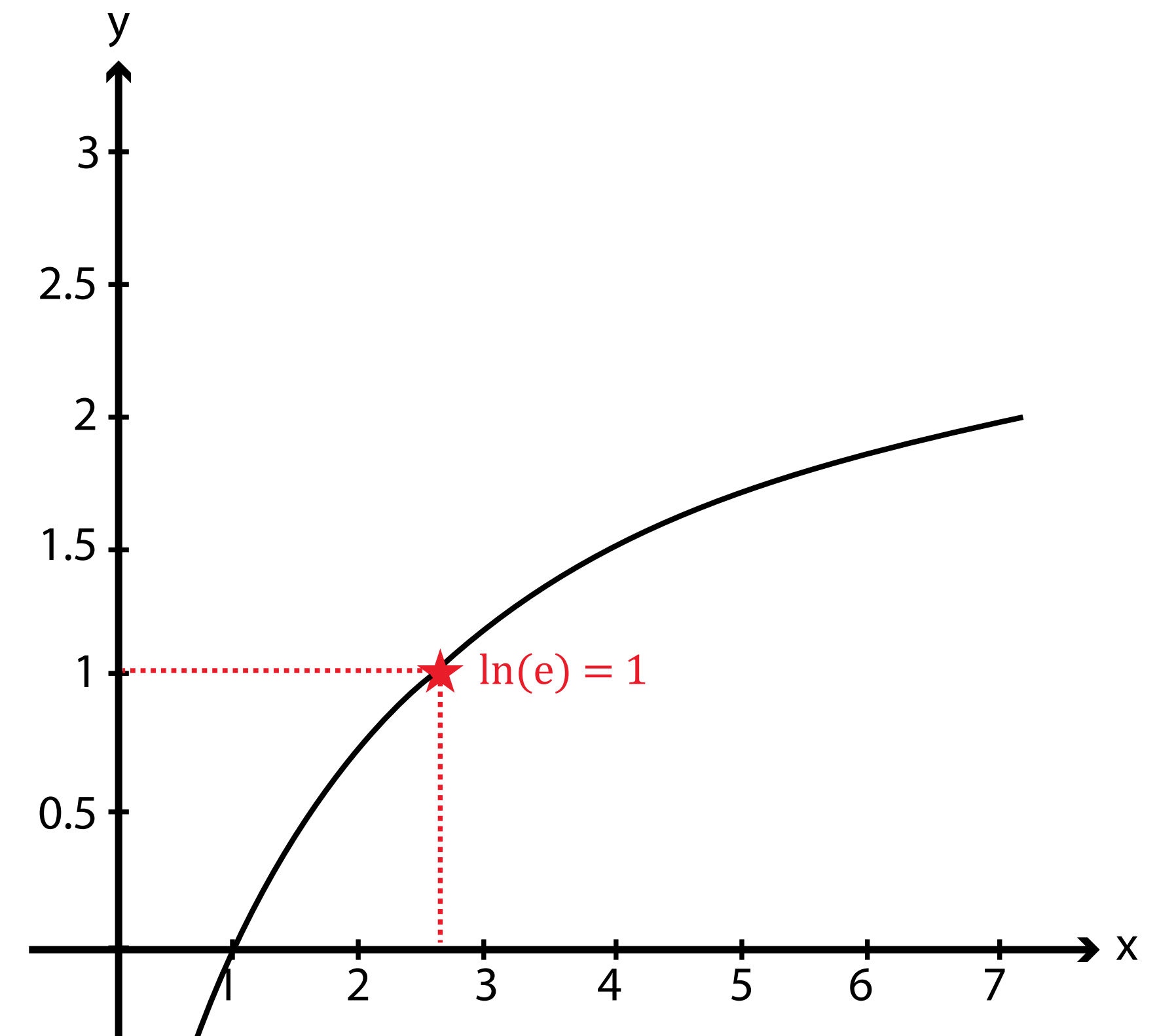


Logarithmus

Nullstelle Unabhängig von der Basis a hat der Logarithmus eine Nullstelle bei 1, da $a^0 = 1$

Basis einsetzen Setzen wir die Basis in den Logarithmus ein, ist das Ergebnis 1.

Negativer Bereich Unabhängig von der Basis a ist der Logarithmus weder für die 0 noch für den negativen Bereich definiert.



Logarithmus

Für Logarithmen aus Produkten gelten folgende Rechenregeln:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

Für Logarithmen aus Potenzen gilt:

$$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$$

Logarithmen

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$$

$$\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$$

Logarithmus

Um den Logarithmus einer Basis a auf eine andere Basis b umzurechnen verwenden wir:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Aus der Definition des Logarithmus folgt:

$$a^{\log_a(x)} = x \quad \text{insb.} \quad e^{\ln(x)} = x$$

Logarithmen

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$$

$$\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$$

Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich!

$$2 \cdot \log_{10}(20) - \log(4) =$$

$$\log_{10}(\sqrt{10}) \cdot \left(\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \log_{10}(2^{-0.5}) \right)$$

$$0.5 \log_{10}(400) - \log_5(20) \cdot \log_{10}(5)$$

$$\ln(e^{2x}) + \ln(e^{x^2}) + \ln(\sqrt{e^x}) =$$