

# Tutorium Generale

## Wirtschaftsmathematik

## Einheit II

Die Inhalte der ersten beiden Einheiten sind zu 100% Wiederholungen von Grundlagen aus der Mittel- und Oberstufe.

Diese werden in keiner Klausur explizit abgefragt werden. Im Gegenteil: Sie werden als Selbstverständlichkeit vorausgesetzt.

Schwächen in den Grundlagen führen zu unnötigen Fehlern, die Zeit und Punkte kosten und Aufgaben eventuell sogar schwerer machen!



### Wiederholungen

- Gleichungen umformen
- Lineare Gleichungen
- Quadratische Gleichungen
- Weitere Gleichungen
- Gleichungssysteme

**II**

# Gleichungen

Eine Gleichung besteht aus einem Gleichheitszeichen, das zwei Terme miteinander verbindet.

Linker Term = Rechter Term

Die Gleichung trifft folgende Aussage: Der Term links hat denselben Wert wie der Term rechts.

Im Prinzip ist die Aussage  $1+2=3$  eine Gleichung.

Aussagen

$\dots = \dots$  Gleichung

$\dots < \dots$   
 $\dots > \dots$   
 $\dots \leq \dots$   
 $\dots \geq \dots$   
 $\dots \neq \dots$  } Ungleichungen

# Gleichungen

Die Terme in unseren Gleichungen werden nicht nur Zahlen, sondern auch eine oder mehrere Variablen enthalten.

Steht auf einer Seite nur eine Variable, dann sagt uns die Gleichung, wie wir diese Größe berechnen können.

**Beispiel** Um das BIP zu berechnen, addieren wir Konsum, Investition, Staatsausgaben und Handelsbilanz.

$$Y = C + I + G + X$$

## Gleichungen

$$W = KR + PR$$

$$Y = C + I + G + X$$

$$\pi = p(q)q - c(q)$$

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

$$p = \frac{\partial c}{\partial q}$$

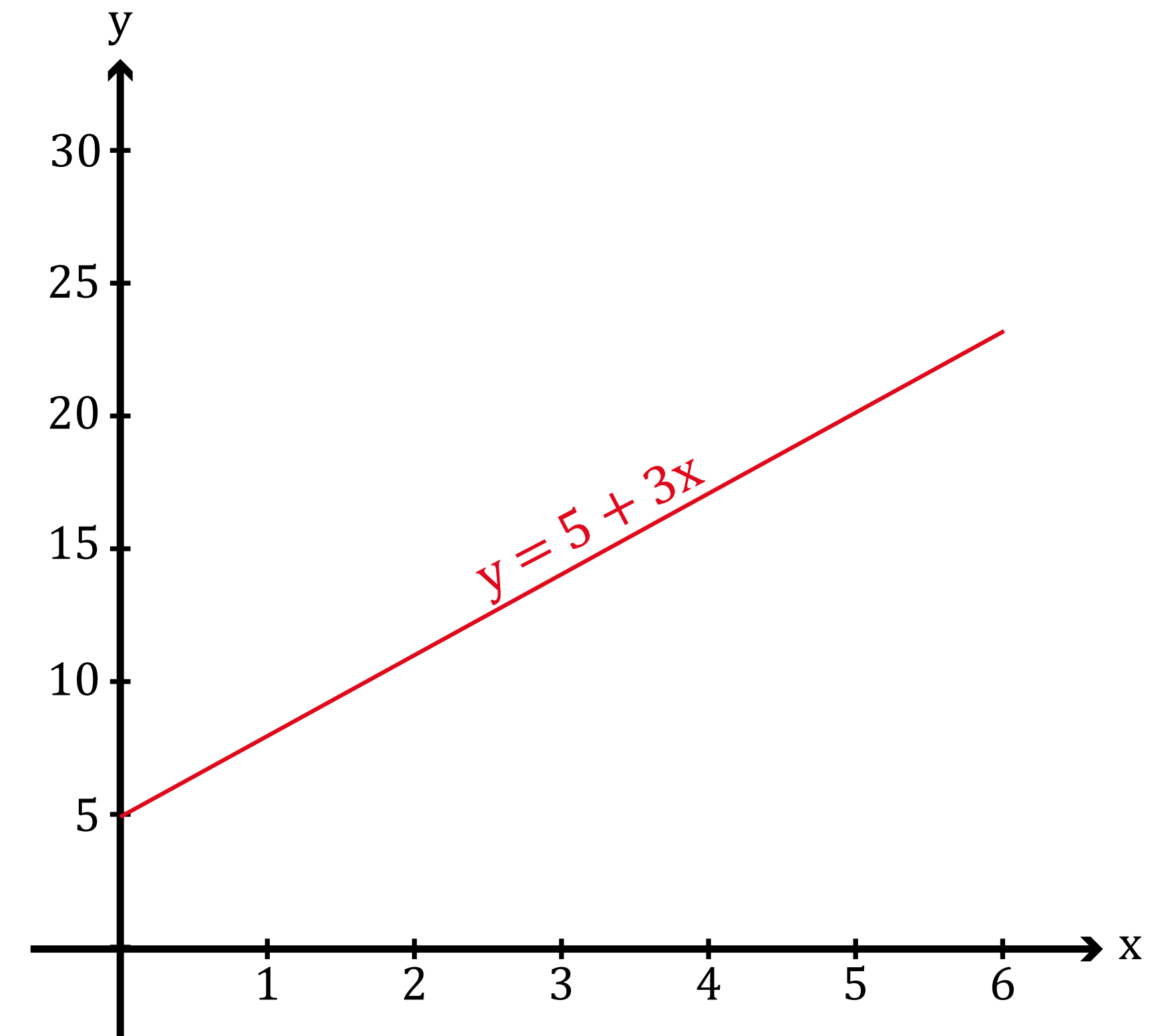
## Gleichungen

Nicht immer liegen Gleichungen in der Form vor, dass wir das Ergebnis direkt berechnen können. Statt ...

$$y = 5 + 3x$$

... könnte uns zum Beispiel Folgendes erwarten:

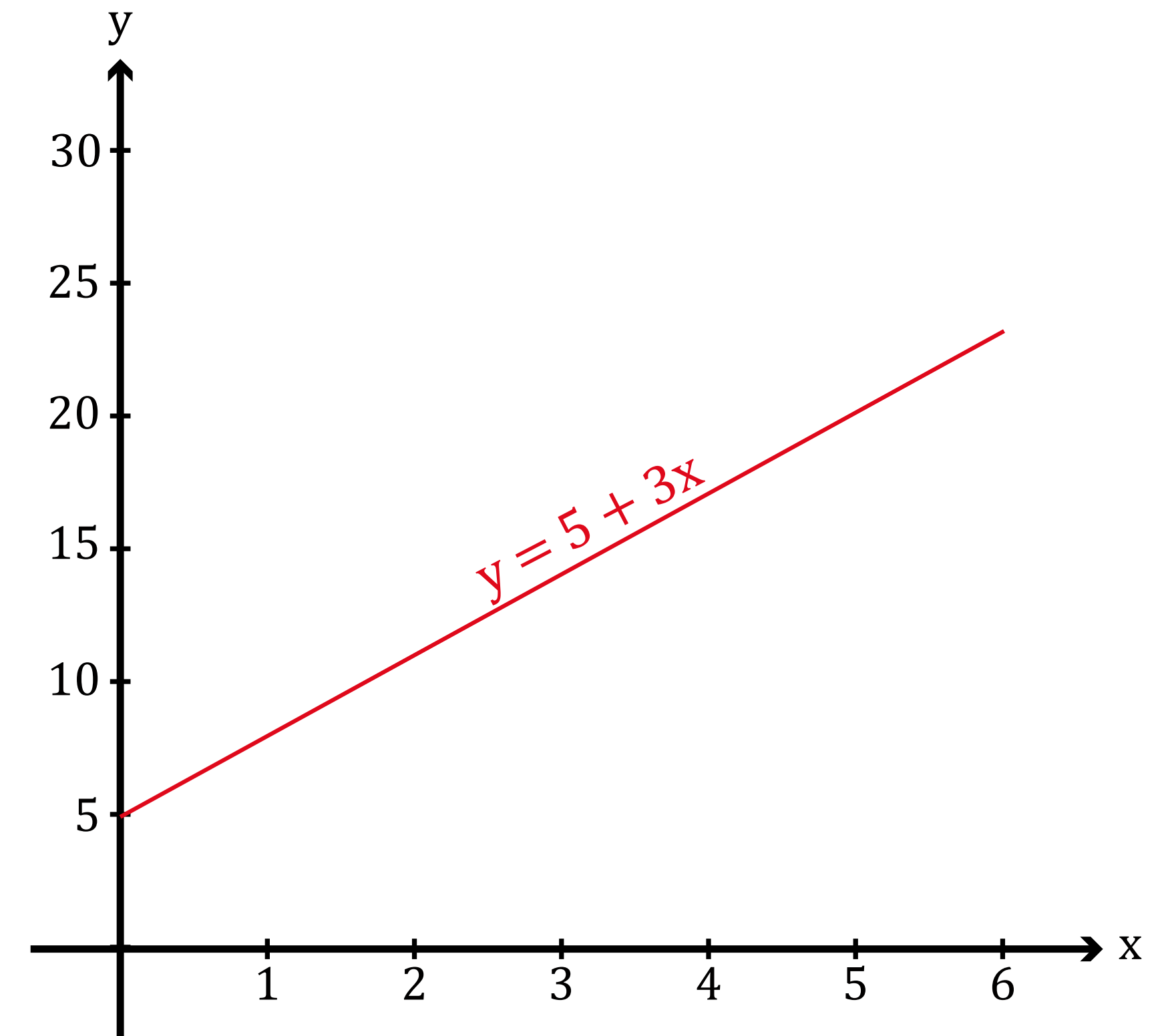
$$2(y - x) = 10 + 4x$$



# Äquivalenzumformungen

Basiswerkzeug zum Umformen und Lösen von Gleichungen sind Äquivalenzumformungen. Wir führen auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Rechnung aus!

$$\begin{aligned} & 2(y - x) = 10 + 4x && | : 2 \\ \Leftrightarrow & 2(y - x)/2 = (10 + 4x)/2 \\ \Leftrightarrow & y - x = 5 + 2x && | +x \\ \Leftrightarrow & y - x + x = 5 + 2x + x \\ \Leftrightarrow & y = 5 + 3x \end{aligned}$$

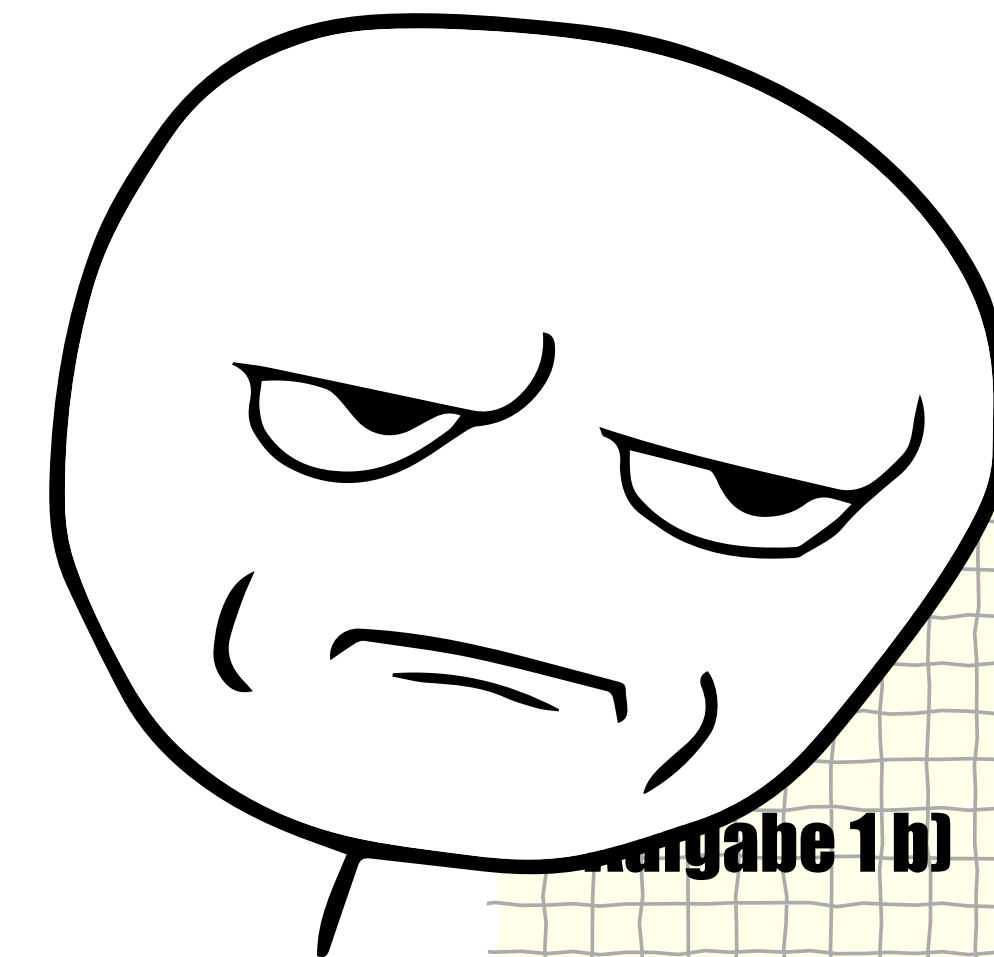


# Äquivalenzumformungen

**Äquivalenzpfeile** verknüpfen zwei Aussagen. Sie zeigen, dass die eine Aussage aus der anderen folgt.

**Gleichheitszeichen** verknüpfen keine Aussagen, sondern Terme. Sie zeigen, dass zwei Terme denselben Wert besitzen!

Äquivalenzpfeile sind keine Gleichheitszeichen! Bitte die rechts gezeigte fehlerhafte Notation unbedingt vermeiden!

WAW122  
004857824

Aufgabe 1 b)

$$\begin{aligned}
 6x + 4 &= 25 &= 6x &= 21 &= x &= 3.5 \\
 &&&&&&\text{wtf?} \\
 6x + 4 &= 25 &&&&-4 \\
 &= 6x &= 21 &&&/6 \\
 &= x &= 3.5 &&&
 \end{aligned}$$

Die Antwort ist 3.5



# Äquivalenzumformungen

**Äquivalenzpfeile** verknüpfen zwei Aussagen. Sie zeigen, dass die eine Aussage aus der anderen folgt.

**Implikationspfeile** verknüpfen zwei Aussagen. Sie zeigen, dass die zweite Aussage aus der ersten Aussage folgt.

Äquivalenzpfeile nur dann verwenden, wenn von der einen auf die andere Aussage geschlossen werden kann und umgekehrt!





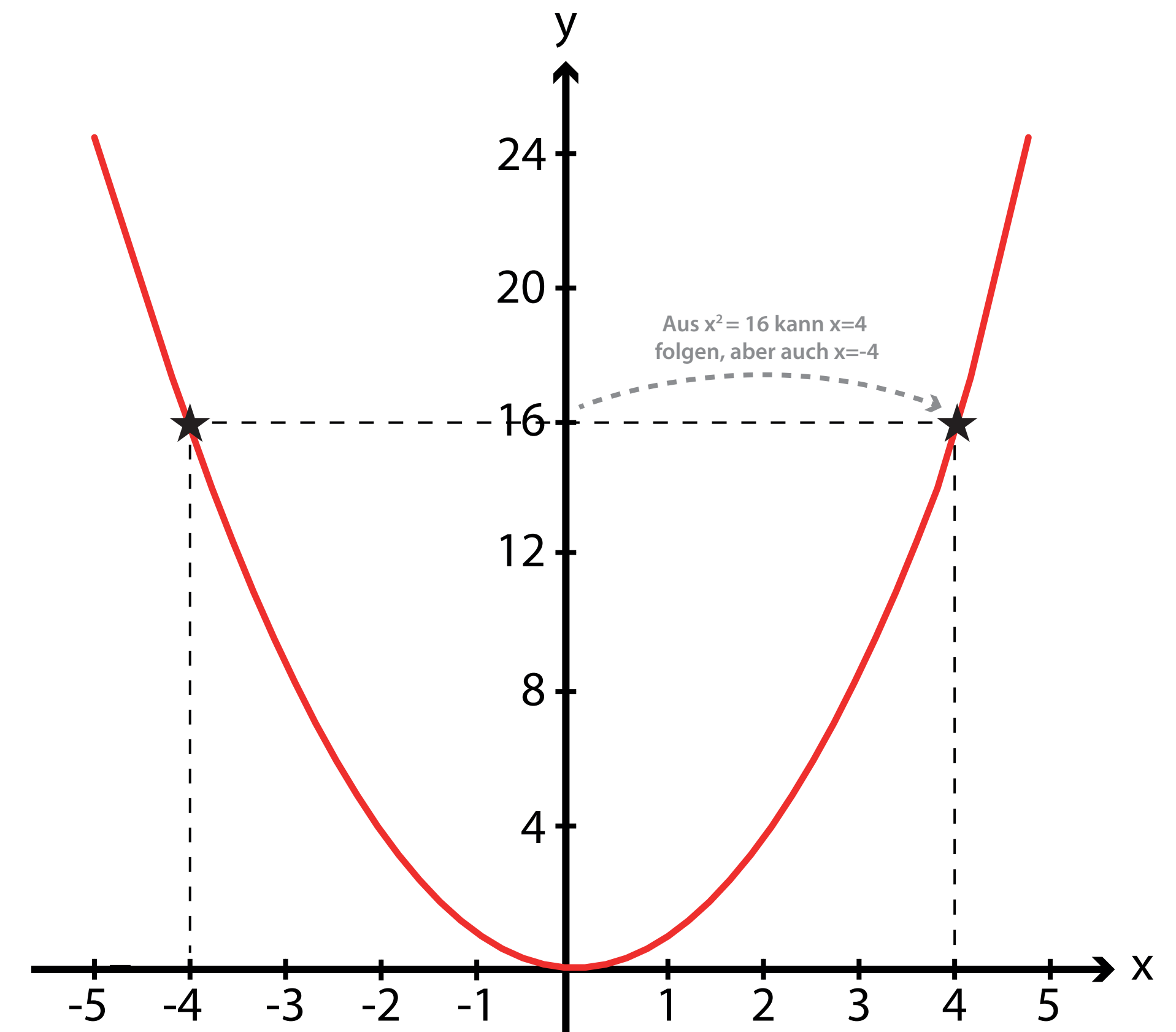
# Äquivalenzumformungen

Bei fast allen Äquivalenzumformungen passen beide Varianten!  
Eine Ausnahme ist z. B. die Quadratwurzel oder die Quadrierung.

Quadrieren wir z. B. beide Seiten einer Gleichung, dann zeigt der Pfeil nur nach rechts:

$$\begin{array}{ccc} x = 4 & & x^2 = 16 \\ \Rightarrow x^2 = 16 \quad \checkmark & \Rightarrow & x = 4 \quad \times \end{array}$$

Warum stimmt die Variante rechts nicht? Weil  $x$  auch  $-4$  sein könnte, denn  $-4$  quadriert ergibt ebenfalls  $16$ .



Löse die folgenden Gleichungen nach x auf, d. h. forme die Gleichungen so um, dass entweder links oder rechts nur „x“ steht.

$$x + y = x - y$$

$$x + xy = z - y$$

$$y + \frac{1}{x} = 2y - 1$$

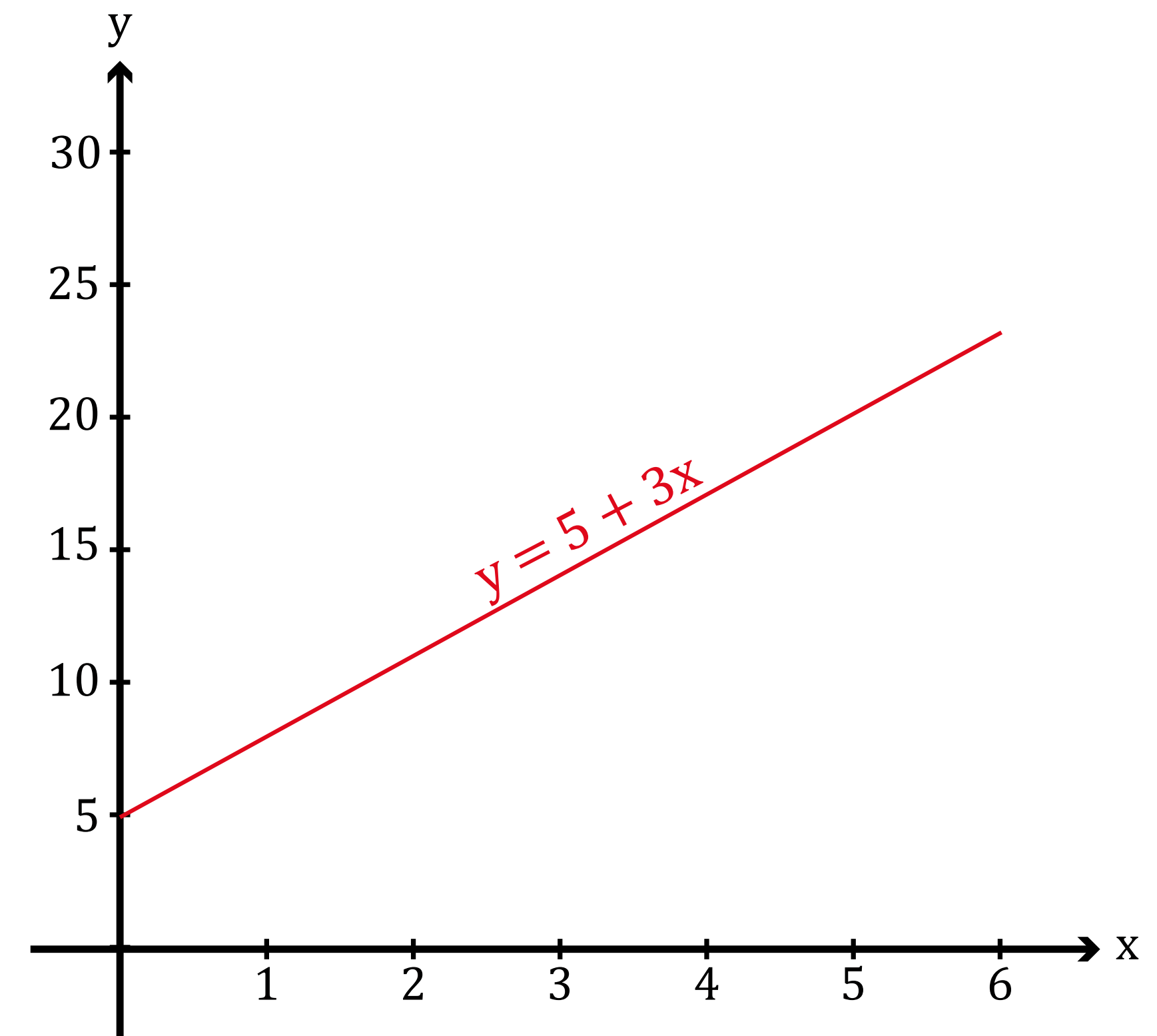
## Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen sind Gleichungen, bei denen die Variablen linear miteinander verbunden sind:

$$y = mx + c$$

Wir bezeichnen  $m$  als Steigung und  $c$  als Achsenabschnitt.

Die Lösung von linearen Gleichungen ist sehr einfach.



Löse die folgenden linearen Gleichungen, d. h. finde den Wert von „x“ für den die Gleichung erfüllt ist.

$$5x + 7 = 2x$$

$$3x + 4 = 4x + 3$$

$$x - 8 = \frac{x + 8}{2}$$

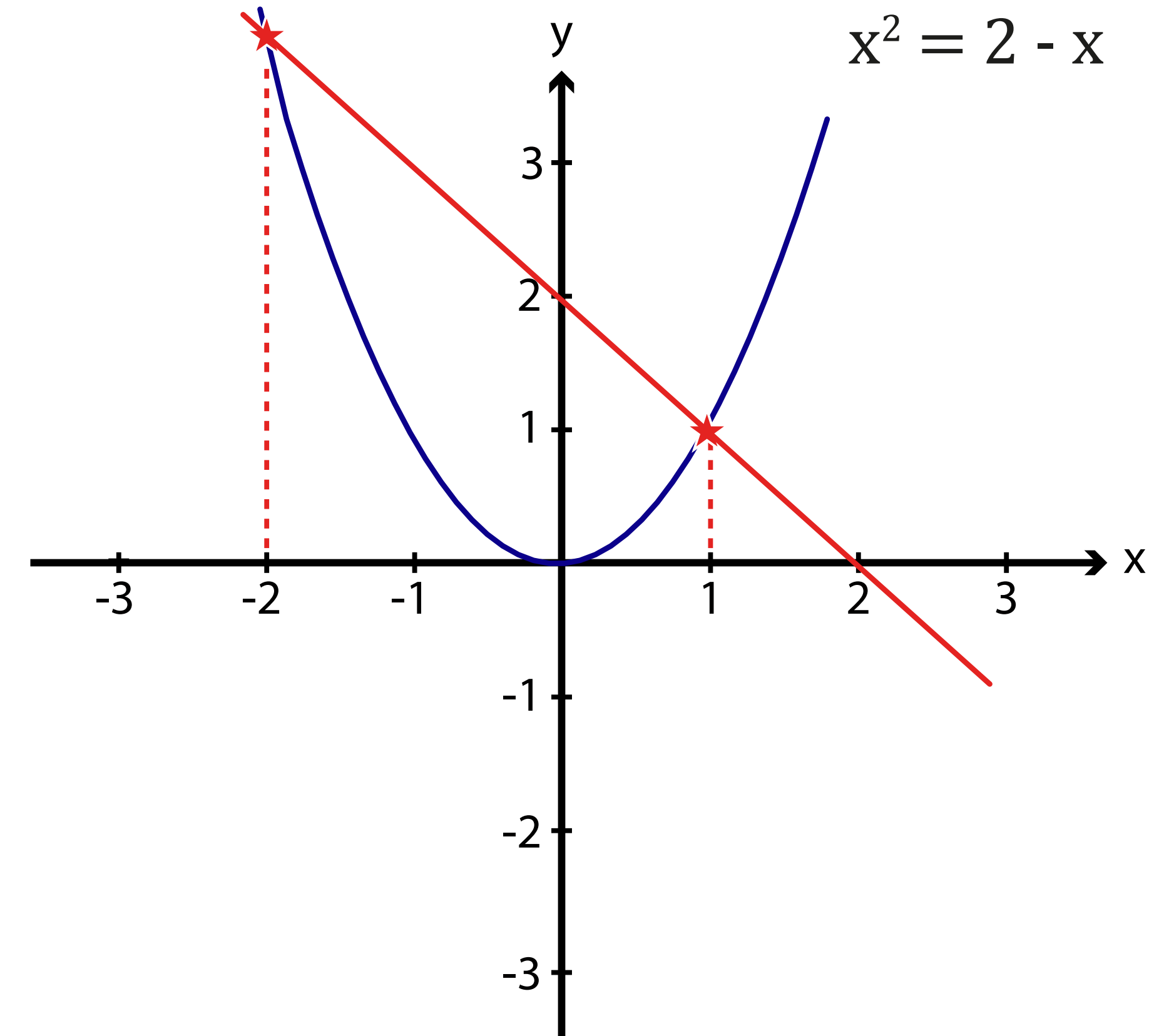
# Quadratische Gleichungen

Gleichungen, in denen die gesuchte Variable sowohl linear, als auch quadratisch vorkommt, können wir nicht einfach nach  $x$  auflösen.

$$x^2 = 2 - x$$

Wir bringen sie stattdessen in die folgende Form, um die Mitternachtsformel anwenden zu können!

$$ax^2 + bx + c = 0$$



# Quadratische Gleichungen

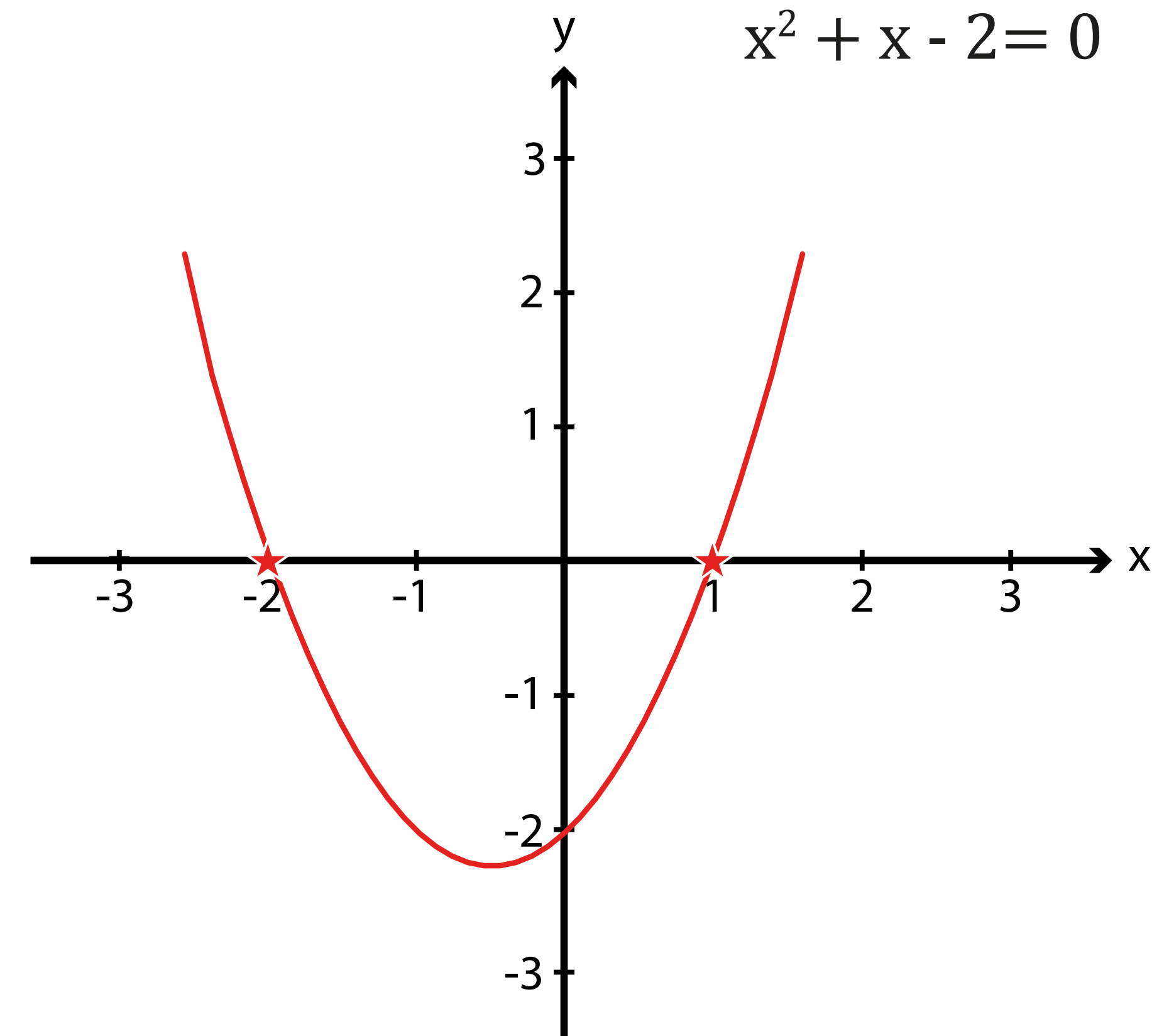
Wir identifizieren die Koeffizienten a, b und c und setzen diese in die Mitternachtsformel ein!

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ax^2 + bx + c = 0$$

---


$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \quad \underbrace{x^2}_{a=1} + \underbrace{x}_{b=1} - \underbrace{2}_{c=-2} = 0$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 1$$





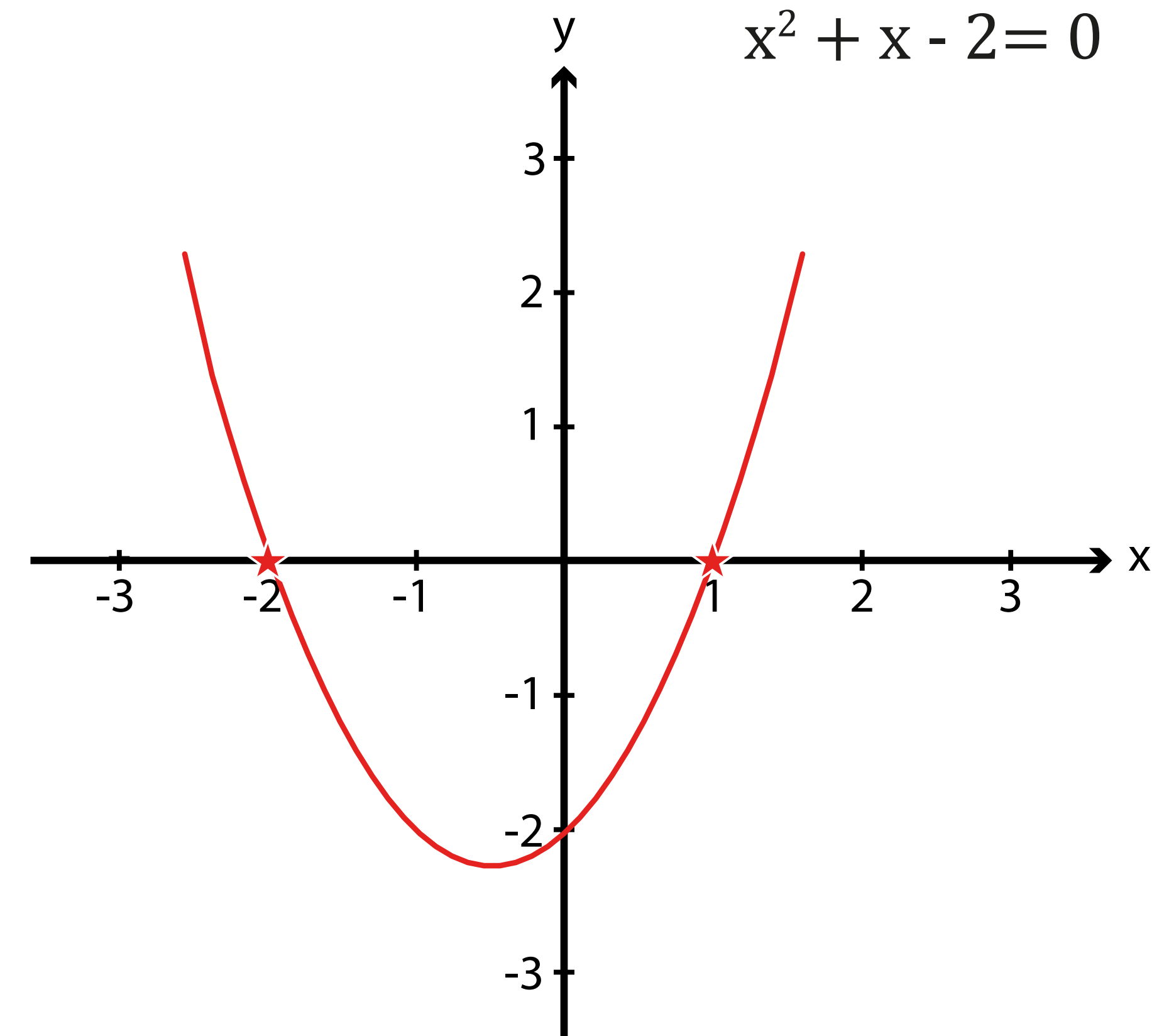
# Quadratische Gleichungen

Im gegebenen Beispiel hat die Mitternachtsformel zwei verschiedene Lösungen:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Abhängig vom Ausdruck unter der Wurzel (sogenannte **Diskriminante**) kann sie auch nur eine oder keine Lösung haben.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Finde alle Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

$$x^2 + 5x = 50$$

$$x^2 = 4(x+1)$$

$$x + \frac{2}{x} = 3$$

# Weitere Gleichungen

Für Polynomgleichungen ab dem dritten Grad gibt es keine Lösungsformel mehr.

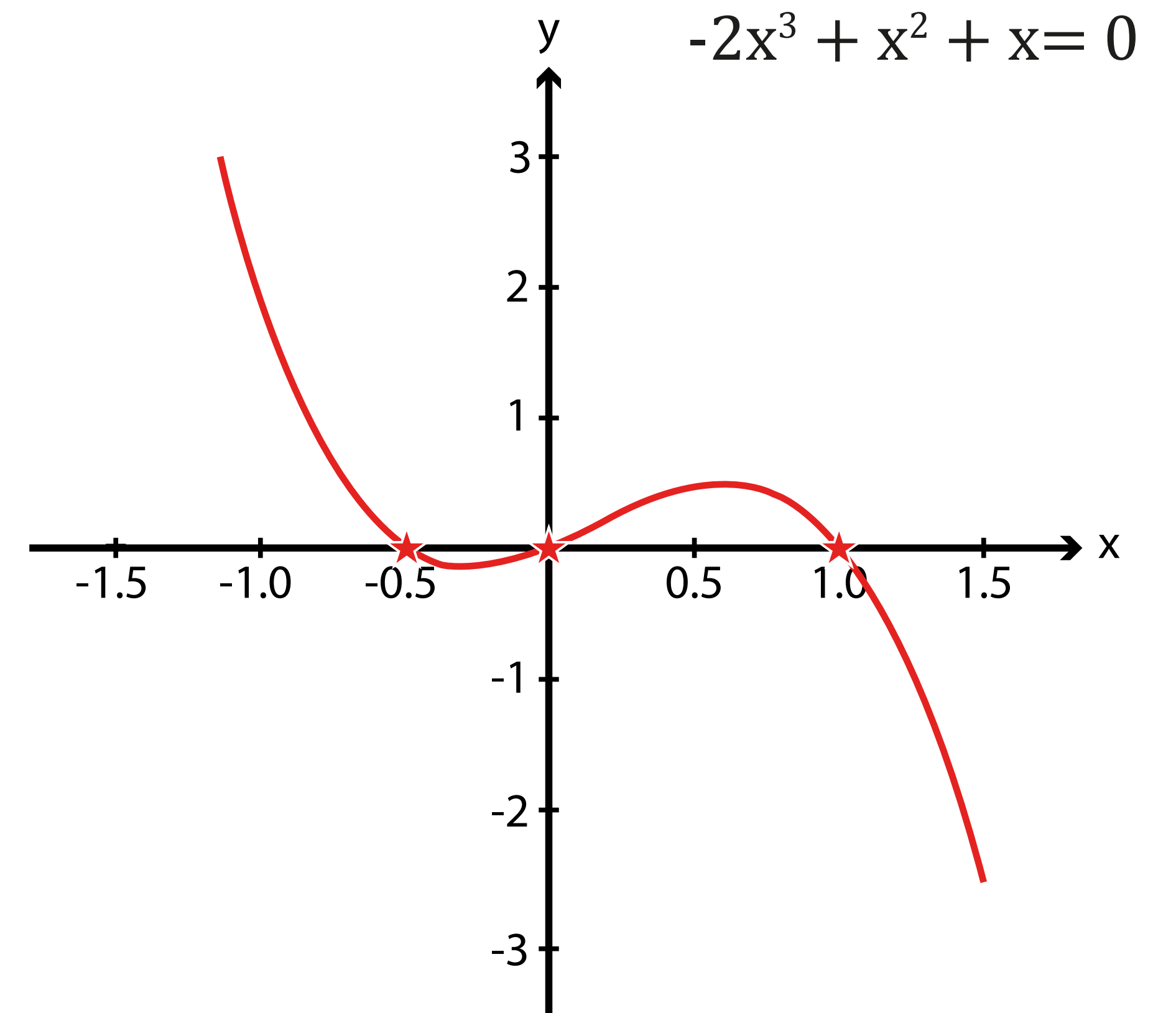
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Wie können wir diese trotzdem lösen? Am einfachsten ist es, wenn wir x ausklammern können!

$$-2x^3 + x^2 + x = 0 \quad | x(\dots)$$

$$\Leftrightarrow x(-2x^2 + x + 1) = 0$$

Die linke Seite ist null, wenn entweder die Klammer oder der Vorfaktor null ist!



# Weitere Gleichungen

Wenn wir x nicht ausklammern können, aber dafür bereits eine Nullstelle kennen können wir Polynomdivision anwenden.

Das Vorgehen entspricht der schriftlichen Division aus der Grundschule, nur dass wir Monome statt Zahlen haben.

Durch die Polynomdivision erhalten wir ein neues Polynom mit den noch unbekannten Nullstellen, aber kleinerem Grad.

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0 \quad \text{Nullstelle bei } x=1$$

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{(x - 1)} = \underbrace{x^2 - 6x + 8}_{\text{Jetzt können wir die Mitternachtsformel anwenden!}}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 7x^2 + 14x - 8 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline -6x^2 + 14x - 8 \\ -(6x^2 + 6x) \\ \hline 8x - 8 \\ -(8x - 8) \\ \hline 0 \end{array}$$

# Weitere Gleichungen

Potenzgleichungen, bei denen die Basis gesucht ist, können wir durch potenzieren beider Seiten lösen.

$$\begin{aligned}
 & x^{1.5} = 125z^2 \quad | \quad (\dots)^{\frac{2}{3}} \\
 & \Leftrightarrow (x^{1.5})^{\frac{2}{3}} = (125z^2)^{\frac{2}{3}} \\
 & \Leftrightarrow x = 25z^{\frac{2}{3}}
 \end{aligned}$$

beide Seiten hoch dem Kehrwert

## Regeln für Potenzen

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$a^b / a^c = a^{b-c}$$

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

$$a^c / b^c = (a / b)^c$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

# Weitere Gleichungen

Potenzgleichungen, bei denen der Exponent gesucht ist, können wir durch logarithmieren beider Seiten lösen.

$$\begin{aligned}
 &2^x = 32 && | \log_2(\dots) \\
 \Leftrightarrow &\log_2(2^x) = \log_2(32) \\
 \Leftrightarrow &x \log_2(2) = 5 \\
 \Rightarrow &x = 5
 \end{aligned}$$

## Logarithmen

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$$

$$\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$$



# Weitere Gleichungen

Gleichungen bei denen die Variable in einem Logarithmus gefangen ist können wir lösen, indem wir beide Seiten zu einem Exponenten einer Potenz machen!

$$\begin{aligned} \log_{10}(2x+4) &= 1 && | 10^{(\dots)} \\ \Leftrightarrow 10^{\log_{10}(2x+4)} &= 10^1 \\ \Leftrightarrow 2x+4 &= 10 \\ \Rightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

## Logarithmen

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b / c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$$

$$\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$$

Finde alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$x^3 - x = 0$$

$$1000 \cdot 1.05^x = 1102.5$$

$$\log_{10}(50) = \log_{10}\left(\frac{5}{x}\right) + 2$$

# Gleichungssysteme

**Gleichungssysteme** bestehen aus mehreren Gleichungen, die mehrere Variablen miteinander verknüpfen.

**Lineare Gleichungssysteme** sind Gleichungssysteme, in denen die Variablen ausschließlich linear vorkommen, d. h. keine Quadrate, Wurzeln, Logarithmen usw.

**Lösungen** sind Werte für Variablen, mit denen alle Gleichungen des Systems gleichzeitig erfüllt sind. Im Beispiel rechts ist die Lösung  $x=1$ ,  $y=2$  und  $z=3$ .

$$2x + y + z = 7$$

$$x + 2y + z = 8 \quad \text{Lineares GS}$$

$$x + y + 2z = 9$$

$$2 \cdot 1 + 2 + 3 = 7$$

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 = 8 \quad \text{Lösung}$$

$$1 + 2 + 2 \cdot 3 = 9$$

## Gleichungssysteme

Nicht jedes Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. Es gibt Gleichungssysteme, die keine Lösung haben und Gleichungssysteme, die unendlich viele Lösungen haben.

- Weniger Gleichungen als Variablen
- Abhängige Gleichungen
- Widersprüchliche Gleichungen

### Unendlich viele Lösungen

$$x + y = 1$$

$$x + z = 2$$

### Keine einzige Lösung

$$x + y = 2$$

$$-x - y = 2$$

## Gleichungssysteme

Es gibt umständliche, aber verlässliche Algorithmen, mit denen wir lineare Gleichungssysteme lösen können.

Diese lernen wir später kennen. Einfachere Gleichungssysteme können wir mit geschickten Äquivalenzumformungen lösen.

- Auflösen und Einsetzen
- Gleichungen addieren/subtrahieren
- Rechte/Linke Seite Gleichsetzen

Genau eine Lösung möglich!

$$x + 2y = 5$$

$$3x + y = 5$$

## Auflösen und Einsetzen

$$\begin{aligned}
 x + 2y &= 5 & \Leftrightarrow & x = 5 - 2y \\
 3x + y &= 5 \\
 \Rightarrow 3(5 - 2y) + y &= 5 \\
 \Leftrightarrow 15 - 6y + y &= 5 \\
 \Leftrightarrow -5y &= -10 \\
 \Rightarrow y &= 2 \\
 \Rightarrow x &= 1
 \end{aligned}$$

## Addieren / Subtrahieren

$$\begin{array}{rcl}
 x + 2y & = & 5 \\
 - 3x + y & = & 5 \\
 \hline
 - 3x + y & = & 5 \\
 \hline
 -5x & = & -5 \Rightarrow x = 1 \\
 & & \Rightarrow y = 2
 \end{array}$$

## Seiten Gleichsetzen

$$\begin{aligned}
 & \dots \text{muss das auch gleich sein!} \quad \left[ \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 3x + y = 5 \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} \text{wenn das} \\ \text{gleich ist ...} \end{array} \right\} \\
 \Rightarrow x + 2y &= 3x + y \\
 \Leftrightarrow y &= 2x \\
 x + 2(2x) &= 5 \\
 \Rightarrow x = 1, y &= 2
 \end{aligned}$$



Finde die Lösung folgender Gleichungssysteme:

$$5x - 5y = 10$$

$$x + 2y = 8$$

$$x + y + z = 12$$

$$4x - y - z = 3$$

$$x + 2y - 3z = -4$$