

Aufgabe 8 Lineare Gleichungen

Löse die folgenden linearen Gleichungen.

- a) $15x - 20 = 5x + 5$
- b) $2(x-4) = 16$
- c) $12 = 4/x - 4$
- d) $5 = \sqrt{8 - 2x}$

Aufgabe 9 Quadratische Gleichungen

Finde alle Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen.

- a) $x^2 - 10x = -9$
- b) $(x+3)^2 - 16 = 0$
- c) $x^2 - x + 6 = -x^2 + x$
- d) $x^2 + 16 = -8x$

Aufgabe 10 Noch mehr Gleichungen

Finde alle Lösungen der folgenden Gleichungen.

- a) $x^2(x+1) = 2x$
- b) $x^3 = \sqrt[3]{2x}$
- c) $x^3 + 5x^2 - 25x - 125 = 0$ mit Nullstelle $x_1 = 5$
- d) $\ln(x^2) = \ln(x) + \ln(2)$

Aufgabe 11 Gleichungssysteme

Finde die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme.

- | | |
|-------------------|---------------------|
| a) $3x + 5y = 17$ | b) $2x + y + z = 7$ |
| $x - 6y = -2$ | $x + 2y + z = 9$ |
| | $x + y + 2z = 8$ |

Aufgabe 12 Tutorial Boss (Phase 2)

Finde alle Lösungen! Tipp: Nach einigen Umformungen haben sie eine biquadratische Gleichung und benötigen eine Substitution. Erkundigen sie sich :)

$$\sqrt{e^{x^6 - x^4 - 2x^2}} = 1$$



LÖSUNGEN AUF FOLGENDEN SEITEN





Aufgabe 8 Lineare Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & 15x - 20 = 5x + 5 \quad | + 20 \\
 \Leftrightarrow & 15x = 5x + 25 \quad | - 5x \\
 \Leftrightarrow & 10x = 25 \quad | : 10 \\
 \Leftrightarrow & x = 2.5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & 2(x-4) = 16 \quad | : 2 \\
 \Leftrightarrow & x - 4 = 8 \quad | + 4 \\
 \Leftrightarrow & x = 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & 12 = 4/x - 4 \quad | \cdot x \\
 \Leftrightarrow & 12x = 4 - 4x \quad | + 4x \\
 \Leftrightarrow & 16x = 4 \quad | : 16 \\
 \Leftrightarrow & x = 0.25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & 5 = \sqrt{8 - 2x} \quad | (\dots)^2 \\
 \Rightarrow & 25 = 8 - 2x \quad | - 8 \\
 \Leftrightarrow & 17 = -2x \quad | : (-2) \\
 \Leftrightarrow & x = -8.5
 \end{aligned}$$

Aufgabe 9 Quadratische Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & x^2 - 10x = -9 \quad | + 9 \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 10x + 9 = 0 \\
 & \quad \quad \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{c=9} \\ \xrightarrow{b=-10} \\ \xrightarrow{a=1} \end{array} \\
 x_{1,2} = & \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \\
 = & \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \\
 = & \frac{10 \pm 8}{2} \\
 \Rightarrow & x_1 = 9, x_2 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & (x+3)^2 - 16 = 0 \quad | \text{ Binomi} \\
 \Leftrightarrow & x^2 + 6x + 9 - 16 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + 6x - 7 = 0 \\
 & \quad \quad \quad \begin{array}{l} \text{a=1} \quad \text{b=6} \quad \text{c=-7} \end{array} \\
 x_{1,2} = & \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} \\
 = & \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2 \cdot 1} \\
 = & \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-6 \pm 8}{2} \\
 \Rightarrow & x_1 = -7, x_2 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & x^2 - x + 6 = -x^2 + x \quad | + x^2 - x \\
 \Leftrightarrow & 2x^2 - 2x + 6 = 0 \\
 & \quad \quad \quad \begin{array}{l} \text{a=2} \quad \text{b=-2} \quad \text{c=6} \end{array} \\
 x_{1,2} = & \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} \\
 = & \frac{2 \pm \sqrt{4 - 48}}{4}
 \end{aligned}$$

Es existieren keine reellen Lösungen!

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & x^2 + 16 = -8x \quad | + 8x \\
 \Leftrightarrow & x^2 + 8x + 16 = 0 \\
 & \quad \quad \quad \begin{array}{l} \text{a=1} \quad \text{b=8} \quad \text{c=16} \end{array} \\
 x_{1,2} = & \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} \\
 = & \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = -4
 \end{aligned}$$

Aufgabe 10 Noch mehr Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x^2(x+1) = 2x \\ \Leftrightarrow & x^3 + x^2 = 2x \quad | -2x \\ \Leftrightarrow & x^3 + x^2 - 2x = 0 \quad | x(\dots) \\ \Leftrightarrow & x(x^2 + x - 2) = 0 \\ & \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\hspace{10em}} \rightarrow x_1 = 0 \\ x_{2,3} = & \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\ = & \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_2 = -2, x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & x^3 = \sqrt[3]{256x} \quad | (\dots)^3 \\ \Leftrightarrow & (x^3)^3 = (\sqrt[3]{256x})^3 \\ \Leftrightarrow & x^6 = 256x \quad | -256x \\ \Leftrightarrow & x^6 - 256x = 0 \quad | x(\dots) \\ & x(x^5 - 256) = 0 \\ & \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} x_1 = \sqrt[5]{256} = 2 \\ \xrightarrow{\quad} x_2 = 0 \end{array} \end{aligned}$$

c) $x^3 + 5x^2 - 25x - 125 = 0$ $x_1 = 5$

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 25x - 125}{(x - 5)} = \underbrace{x^2 + 10x + 25}_{\substack{\text{Jetzt k\"onnten wir die} \\ \text{Mitternachtsformel} \\ \text{anwenden...}}} = (x+5)^2 \Rightarrow x_2 = -5$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 5x^2 - 25x - 125 \\ \underline{-(x^3 - 5x^2)} \\ 10x^2 - 25x - 125 \\ \underline{-(10x^2 - 50x)} \\ 25x - 125 \\ \underline{-(25x - 125)} \\ 0 \end{array}$$

... oder wir erkennen die binomische Formel

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \ln(x^2) = \ln(x) + \ln(2) \\ \Leftrightarrow & \ln(x^2) = \ln(2x) \quad | e^{(\dots)} \\ \Rightarrow & e^{\ln(x^2)} = e^{\ln(2x)} \\ \Leftrightarrow & x^2 = 2x \quad | -2x \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2x = 0 \quad | x(\dots) \\ \Leftrightarrow & x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 11 Gleichungssysteme

a) $3x + 5y = 17$
 $x - 6y = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \overset{\cdot(-3)}{-3x + 18y = 6} \quad + \quad \begin{array}{r} 3x + 5y = 17 \\ \underline{-3x + 18y = 6} \\ 23y = 23 \Rightarrow y = 1 \end{array}$

\uparrow

$x - 6 = -2$
 $\Rightarrow x = 4$



b)

$$\begin{array}{rcl}
 2x + y + z & = & 7 \\
 -x + 2y + z & = & 9 \\
 -x + y + 2z & = & 8 \\
 \hline
 -2y - 2z & = & -10 \\
 \Leftrightarrow & & z = 5 - y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 x + 2y + z & = & 9 \\
 -2x + y + z & = & 7 \\
 -x + y + 2z & = & 8 \\
 \hline
 -2x & & -2z = -6 \\
 \Leftrightarrow & & z = 3 - x
 \end{array}$$

Wir ziehen die Gleichungen so voneinander ab, dass einmal x und einmal y eliminiert wird.

$$\begin{array}{l}
 \Rightarrow 5 - y = 3 - x \Leftrightarrow y = x + 2 \\
 \Rightarrow 2x + y + z = 7 \\
 \Rightarrow 2x + (x+2) + (3-x) = 7 \\
 \Rightarrow 2x + 5 = 7 \Rightarrow x = 1 \\
 \Rightarrow y = x + 2 = 3 \\
 \Rightarrow z = 3 - x = 2
 \end{array}$$

Trick: Da die linken Seiten „z“ gleich sind dürfen wir die rechten Seiten gleich setzen!

Aufgabe 12 Tutorial Boss (Phase 2)

Hinweis: Bei der Rücksubstitution ergeben sich aus jeder Lösung für u bis zu zwei Lösungen für x. Bei der Lösung u=2 erhalten wir zwei Lösungen: Sowohl Wurzel 2 als auch minus Wurzel 2 ergibt nach Quadrierung 2. Bei der Lösung u=-1 gibt es keine reelle Lösung. Es gibt keine reelle Zahl die im Quadrat -1 ergibt.

$$\begin{array}{lcl}
 \sqrt{e^{x^6 - x^4 - 2x^2}} = 1 & | \ (\dots)^2 & x^4 - x^2 - 2 = 0 \quad | \ u = x^2 \\
 \Rightarrow e^{x^6 - x^4 - 2x^2} = 1 & | \ \log(\dots) & \Rightarrow u^2 - u - 2 = 0 \\
 x^6 - x^4 - 2x^2 = 0 & | \ x^2(\dots) & \Rightarrow u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\
 x^2(x^4 - x^2 - 2) = 0 & & u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow u_2 = 2 \quad u_3 = -1 \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{x_1 = 0} & & \Rightarrow x_{2,3} = \pm \sqrt{2}
 \end{array}$$