

Aufgabe 13 Funktionen

Gebe den Definitions- und Wertebereich der folgenden Funktionen an. Bei der Teilaufgabe c) darfst du dir die Funktion als Grafik anschauen. Nutze dazu eine geeignete Software/KI oder deinen Taschenrechner.

a) $f(x) = -x^2 - 8$ d) $j(x) = (1+e^x)^{-1}$

b) $g(x) = \sqrt{(x^2 + 1)}$ e) $k(x) = \sqrt{\ln(x)}$

c) $h(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)}$

Aufgabe 14 Nullstellen & Schnittstellen

Berechne die Nullstellen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x$

b) $g(x) = \ln(x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$

c) $h(x) = e^{x^2} - e^x$

d) $j(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 4}$

Aufgabe 15 Noch mehr Nullstellen

Überprüfe ob die folgenden Funktionen gemeinsame Nullstellen haben.

$$f(x) = \sqrt{e^{(16x + \ln(x))}} \quad g(x) = x - 1/x$$

Aufgabe 16 Grenzwerte (Unendlich)

Berechne die Grenzwerte der folgenden Funktionen für x gegen plus/minus unendlich.

a) $f(x) = -x^5(x+2) - x$ d) $j(x) = \frac{5x^3 - 2x + 1}{(x^2 - 6x)^3}$

b) $g(x) = \frac{x}{4x + 8}$ e) $k(x) = e^x - x^3$

c) $h(x) = \frac{-x^3 + x + 1}{x^2 - x}$ f) $l(x) = \frac{x}{e^x}$

**Aufgabe 17 Grenzwerte (Polstellen)**

Berechne die Grenzwerte der folgenden Funktionen an allen Polstellen.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{1}{(x-5)^3} & \text{d) } j(x) = \frac{x^2 - x}{x^4} \\ \text{b) } g(x) = \frac{1}{(2-x)^7} & \text{e) } k(x) = \frac{1}{x^3 - x^4} \\ \text{c) } h(x) = \frac{x}{4x - 8} & \end{array}$$

Aufgabe 18 Boss Battle

Gebe den Definitions- und Wertebereich der folgenden Funktionen an und berechne alle Nullstellen sowie die Grenzwerte gegen plus/minus unendlich und an allen Polstellen.

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{2x^2 + x}$$



LÖSUNGEN AUF FOLGENDEN SEITEN





Aufgabe 13 Funktionen

a) $f(x) = -x^2 - 8$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -8\}$

Wir können jede reelle Zahl einsetzen, aber es kann nicht jede reelle Zahl herauskommen. Der Term x^2 ist auf jeden Fall positiv und $-x^2$ damit auf jeden Fall negativ.

b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

Wir können jede reelle Zahl einsetzen. Die Wurzel macht uns keine Probleme, da $x^2 + 1$ nie kleiner 1 und damit auch nie negativ wird.

c) $h(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid -0.5 \geq x \geq 0.5\}$

Wir können jede reelle Zahl einsetzen. Die Range ist auf -0.5 bis 0.5 eingeschränkt. Was wir hier aus einer Grafik entnehmen, können wir später mit Ableitungen und Grenzwerten ausrechnen!

d) $j(x) = (1 + e^x)^{-1}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

Wir stellen uns die Funktion als Bruch vor: $1/(1 + e^x)$. Wir dürfen alle reellen Zahlen einsetzen, da der Nenner nie negativ werden kann. Er bewegt sich im Bereich von 0 bis unendlich und dadurch sind Werte zwischen 0 und 1 möglich.

e) $k(x) = \sqrt{\ln(x)}$ $f: \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

In den Logarithmus dürfen wir nur Zahlen > 0 einsetzen. Die Wurzel schränkt uns aber noch weiter ein! In der Wurzel darf nichts negatives stehen und da die Nullstelle des Logarithmus immer bei 1 liegt, müssten wir mindestens diese 1 einsetzen. Das Ergebnis ist immer positiv.

Aufgabe 14 Nullstellen & Schnittstellen

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= -x^3 + 2x^2 + 8x \stackrel{!}{=} 0 \\
 &\Leftrightarrow x(-x^2 + 2x + 8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\
 &\Rightarrow x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{-2} \\
 &\Rightarrow x_2 = 4 \quad x_3 = -2
 \end{aligned}$$



b) $g(x) = \ln(x^3 - 3x^2 + 2x + 1) \stackrel{!}{=} 0$ | $e(\dots)$ Der $\ln(\dots)$ wird 0 wenn wir 1 einsetzen

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$\Rightarrow x_2 = 2 \quad x_3 = 1$$

c) $h(x) = e^{x^2} - e^x \stackrel{!}{=} 0$ | $+e^x$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} = e^x$$

$$\Leftrightarrow x^2 = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \quad x_3 = 1$$

d) $j(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 4} \stackrel{!}{=} 0$ | $\cdot (x^3 - 4)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-4 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = -2$$

Aufgabe 15 Noch mehr Nullstellen

Die Aufgabenstellung „Überprüfe ob die folgenden Funktionen gemeinsame Nullstellen haben“ ist hier der Schlüssel mit dem wir die Aufgabe einfach lösen können! Wir ignorieren die erste Funktion zunächst und berechnen die Nullstellen der Funktion $g(x)$. Diese setzen wir anschließend in $f(x)$ ein und erkennen, dass es keine gemeinsamen Nullstellen geben kann.

	$g(x) = x - 1/x \stackrel{!}{=} 0$	$\cdot x$	$f(-1)$ können wir nicht berechnen, da wir -1 nicht in den Logarithmus einsetzen dürfen
\Leftrightarrow	$x^2 - 1 = 0$	$+1$	
\Leftrightarrow	$x^2 = 1$	$+1$	$f(1) \approx 2981$ und damit eben nicht 0.
\Rightarrow	$x_1 = 1, x_2 = -1$		f und g haben keine gemeinsamen Nullstellen!



Aufgabe 16 Grenzwerte (Unendlich)

a) $f(x) = -x^5(x+2) - x = -x^6 - 2x^5 - x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^6 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^6 = -\infty$$

Grenzwerte von Monomen	$\lim_{x \rightarrow -\infty}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty}$
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

b) $g(x) = \frac{x}{4x+8}$ Stärkste Potenzen in Zähler und Nenner gleich stark.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{4x+8} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{4x+8} = \frac{1}{4}$$

c) $h(x) = \frac{-x^3 + x + 1}{x^2 - x}$ Stärkste Potenz im Zähler ist stärker als stärkste Potenz im Nenner

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{x^2} = \frac{-\infty}{\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \infty$$

d) $j(x) = \frac{5x^3 - 2x + 1}{(x^2 - 6x)^3}$ Bitte den Nenner NICHT ausmultiplizieren. Wichtig ist nur die stärkste Potenz die dort entsteht und zwar x^6 . Diese ist stärker als $5x^3$ im Nenner und daher sind die Grenzwerte 0.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} j(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} j(x) = 0$$

e) $k(x) = e^x - x^3$ Die Exponentialfunktion ist für x gegen plus(!) unendlich stärker als jede Potenz. Für x gegen minus unendlich wird e^x dagegen unbedeutend klein

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \infty$$

f) $l(x) = \frac{x}{e^x}$ Gleiche Logik wie bei Teilaufgabe e), nur dass die Exponentialfunktion jetzt im Nenner steht. Für x gegen plus unendlich überpowert sie die Potenz x im Nenner und der Grenzwert geht gegen 0.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} l(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} l(x) = -\infty$$



Aufgabe 17 Grenzwerte (Polstellen)

Berechne die Grenzwerte der folgenden Funktionen an allen Polstellen.

a) $f(x) = \frac{1}{(x-5)^3}$ hat eine Polstelle bei $x=5$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \text{ existiert nicht}$$

Grenzwerte von Polstellen	$\lim_{x \rightarrow x_0^-}$ von links	$\lim_{x \rightarrow x_0^+}$ von rechts
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

b) $g(x) = \frac{1}{(2-x)^7}$ hat eine Polstelle bei $x=2$
Vorfaktor ist negativ!!!

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \text{ existiert nicht}$$

d) $j(x) = \frac{x^2 - x}{x^4} = \frac{x-1}{x^3}$ hat eine Polstelle bei $x=0$
Nenner ist -1 an dieser Stelle

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} j(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} j(x) = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} j(x) \text{ existiert nicht}$$

c) $h(x) = \frac{x}{4x-8}$ hat eine Polstelle bei $x=2$
Nenner ist an dieser Stelle 2

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = -\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \text{ existiert nicht}$$

e) $k(x) = \frac{1}{x^3 - x^4} = \frac{1}{x^3(1-x)}$ hat Polstellen 0 und 1

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = \infty & \lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \infty \end{array}$$

Aufgabe 18 Boss Battle

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{2x^2 + x} = \frac{x(x^2 - 1)}{x(2x + 1)} = \frac{x^2 - 1}{2x + 1} \text{ hat eine Polstelle bei } x = -0.5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -0.5^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x} = \frac{\infty}{-\infty} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -0.5^-} f(x) = \infty$$

Aus den Grenzwerten können wir schließen, dass die Funktion jede beliebige reelle Zahl erreichen kann. Der Wertebereich ist damit \mathbb{R}

$$f: \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -0.5\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 1} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$$