

Tutorium Generale

Wirtschaftsmathematik

Einheit III

Der Name "Analysis I" verrät uns zwei Dinge:

Wir werden etwas analysieren. Konkret wird es um Funktionen und eine Vielzahl von Eigenschaften gehen, auf die wir diese Funktionen untersuchen können.

Es gibt eine später "Analysis II". Die Besonderheit von Analysis I ist, dass wir uns auf Funktionen mit genau einer Variable beschränken.



Analysis I

- Funktionen
- Grenzwerte
- Stetigkeit
- Differenzierbarkeit
- Ableitung

III

Funktionen

Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jedem Element aus einer Menge M genau ein Element einer Menge N zuordnet:

$$f: M \rightarrow N$$

Wir bezeichnen die Menge M als Definitionsbereich und die Menge N als Wertebereich. Bei unseren Funktionen werden diese Bereiche immer Teilmengen der reellen Zahlen sein:

$$\text{mit } M \subseteq \mathbb{R}, N \subseteq \mathbb{R}$$



**Reelle Zahl
einsetzen**



**Rechen-
vorschrift**



**Reelle Zahl
rausbekommen**

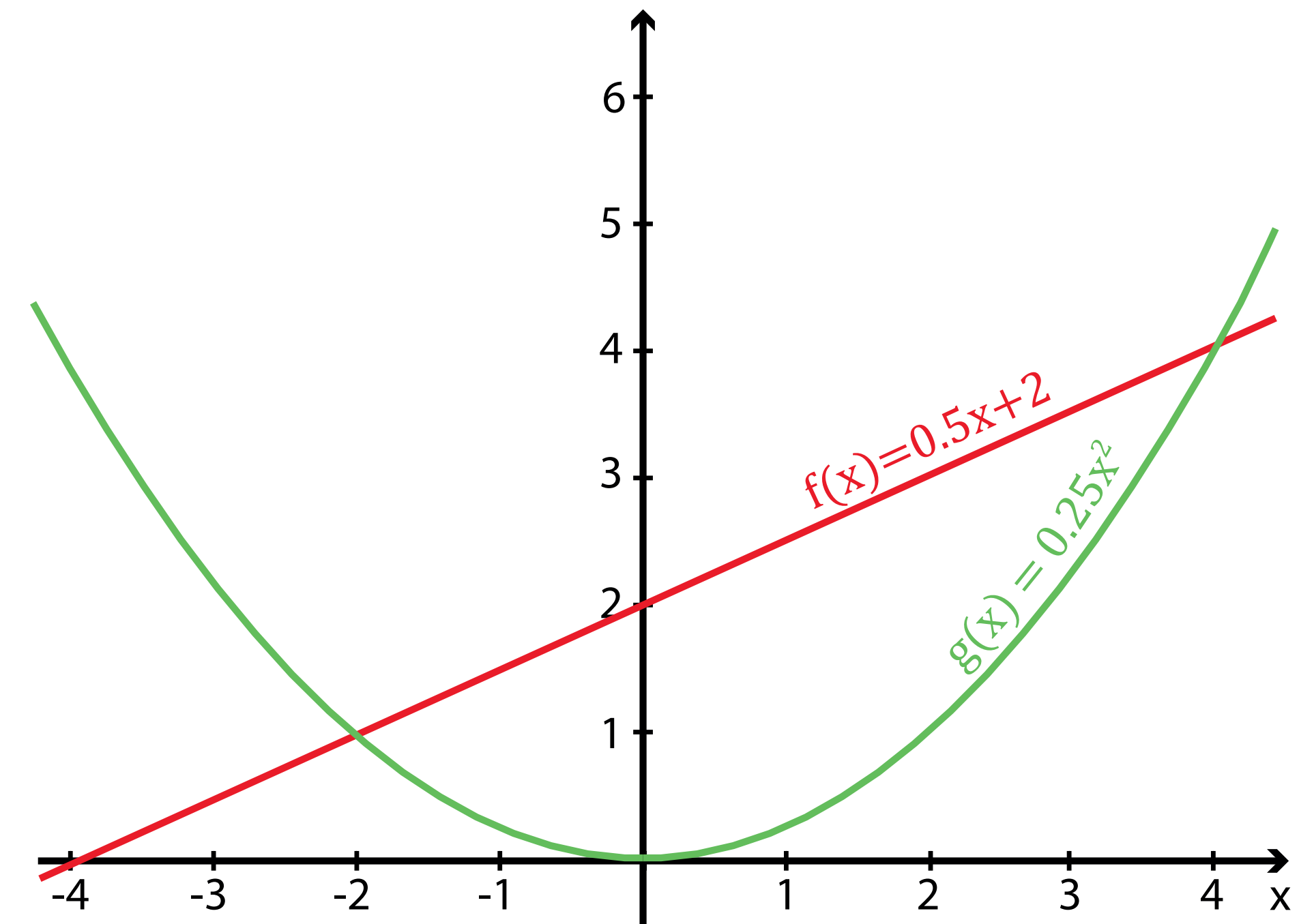
Funktionen

Funktionen bestehen aus einem Namen, einer Auflistung von Variablen in Klammern und einer Rechengvorschrift.

Zwei einfache Beispiele:

$$f(x) = 0.5x + 2 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = 0.25x^2 \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$



Funktionen

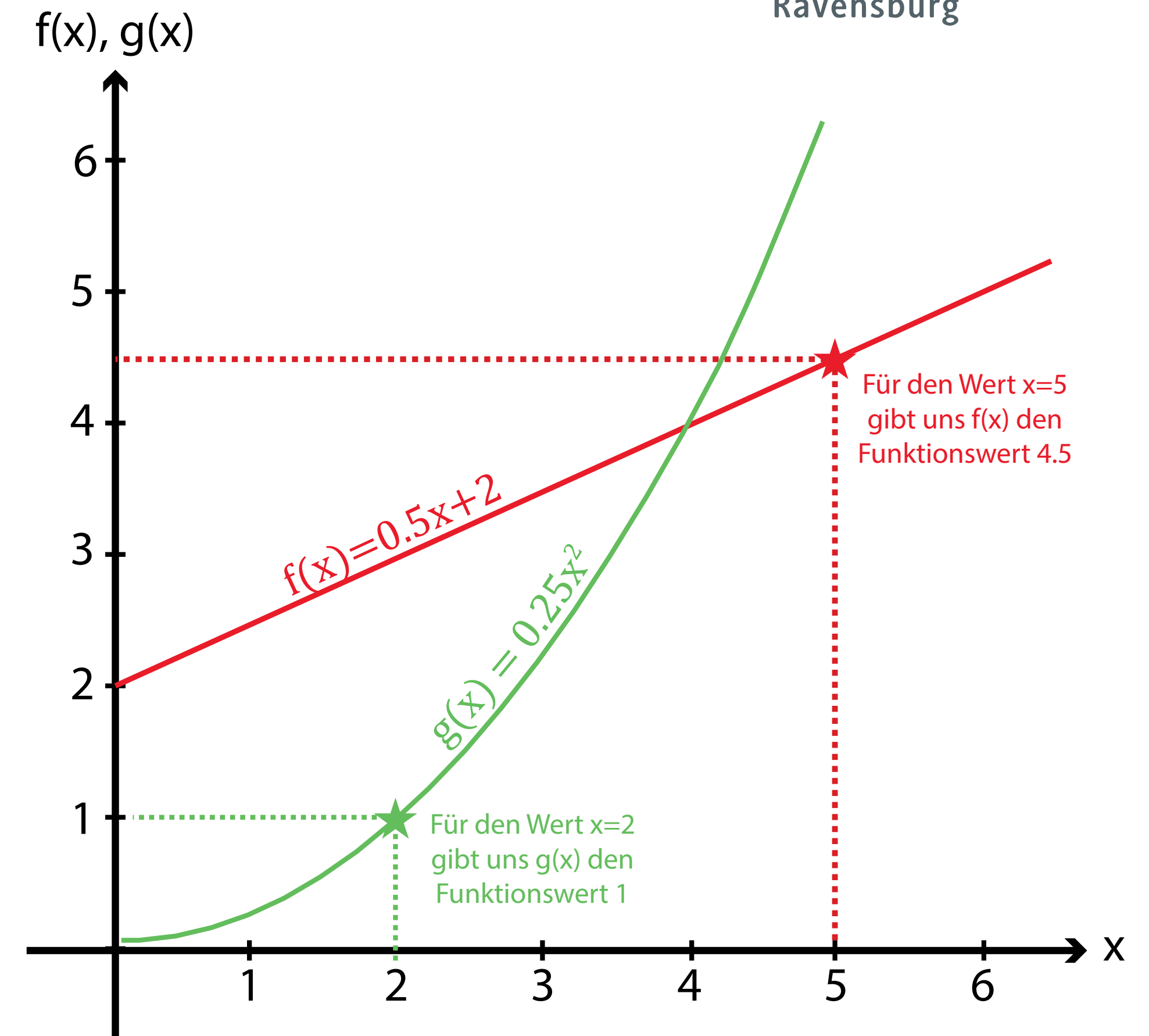
Übergeben wir der Funktion Werte für ihre Variablen, erhalten wir einen Funktionswert.

$$f(x) = 0.5x + 2$$

$$f(5) = 0.5 \cdot 5 + 2 = 4.5$$

$$g(x) = 0.25x^2$$

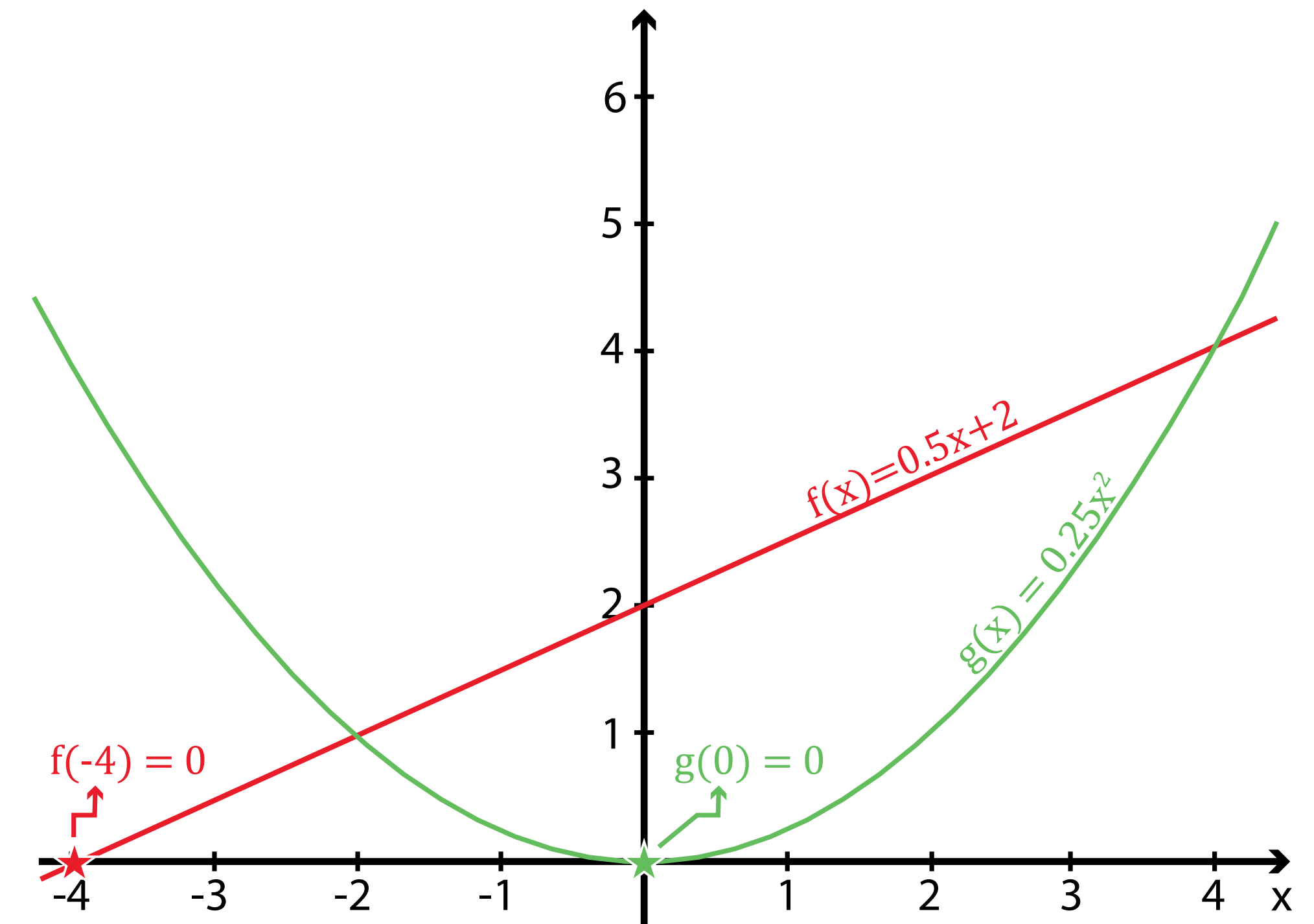
$$g(2) = 0.25 \cdot 2^2 = 1$$



Nullstellen

Neben Funktionswerten an bestimmten Stellen suchen wir oft die **Nullstellen** einer Funktion. Um diese zu finden, setzen wir die Funktion gleich 0 und lösen die entstehende Gleichung!

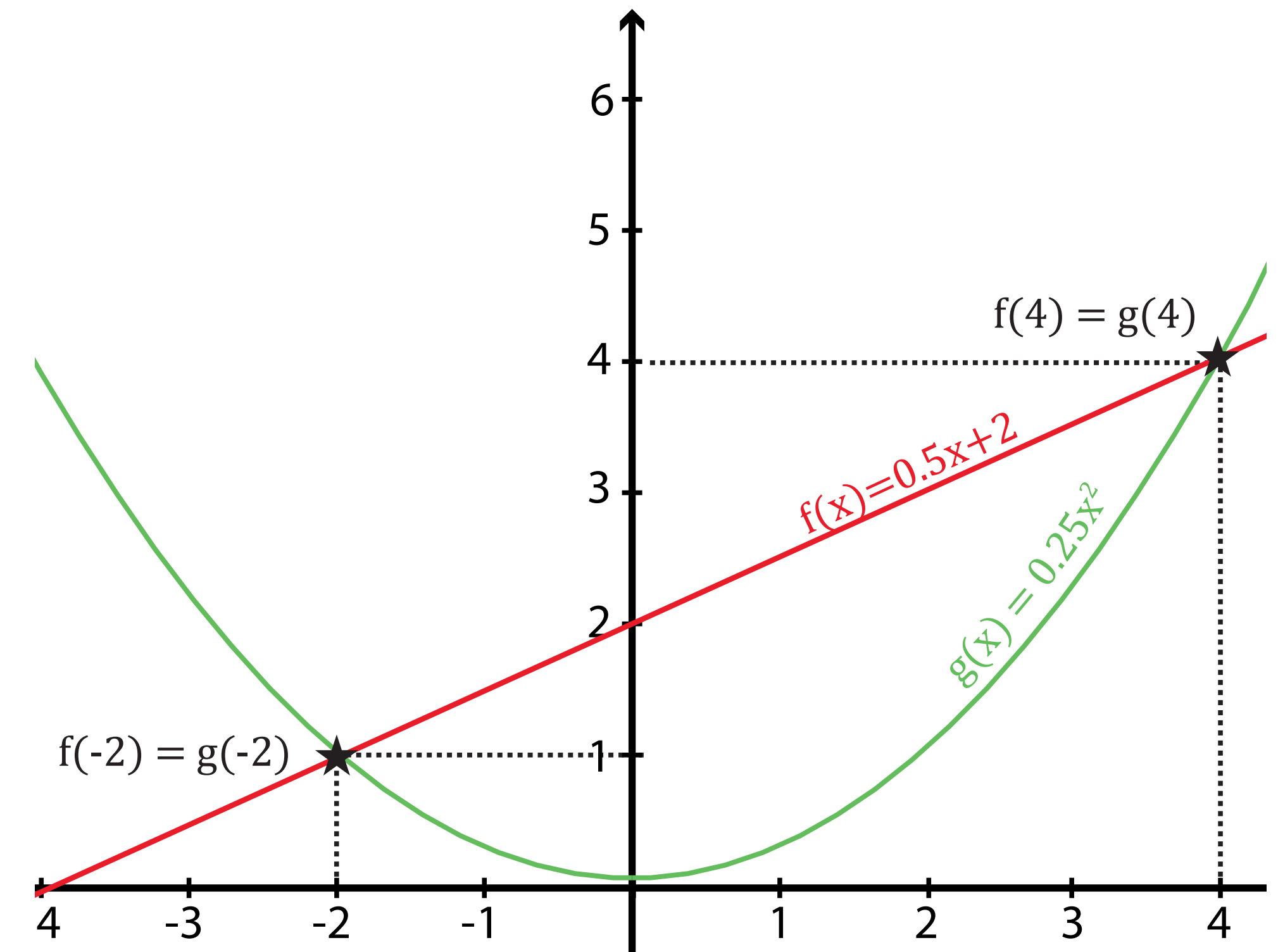
$$\begin{aligned} f(x) &= 0.5x + 2 \stackrel{!}{=} 0 && | -2 \\ &\Leftrightarrow 0.5x = -2 && | : 0.5 \\ &\Rightarrow x = -4 \end{aligned}$$



Schnittstellen

Auch bei der Suche nach den **Schnittstellen** einer Funktion arbeiten wir mit Gleichungen: Wir setzen die beiden Funktionen gleich und finden dadurch Werte, bei denen beide Funktionen denselben Wert aufweisen.

$$\begin{aligned} 0.5x + 2 &\stackrel{!}{=} 0.25x^2 \quad | - 0.25x^2 \\ \Leftrightarrow -0.25x^2 + 0.5x + 2 &= 0 \quad | \text{MN-Formel} \\ \Rightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 4 \end{aligned}$$



Finde alle Nullstellen der Funktionen f und g , sowie die Schnittpunkte der beiden Funktionen.

$$f(x) = x^2 + x$$

$$g(x) = x + 2$$

$$f(x) = \ln(x^2)$$

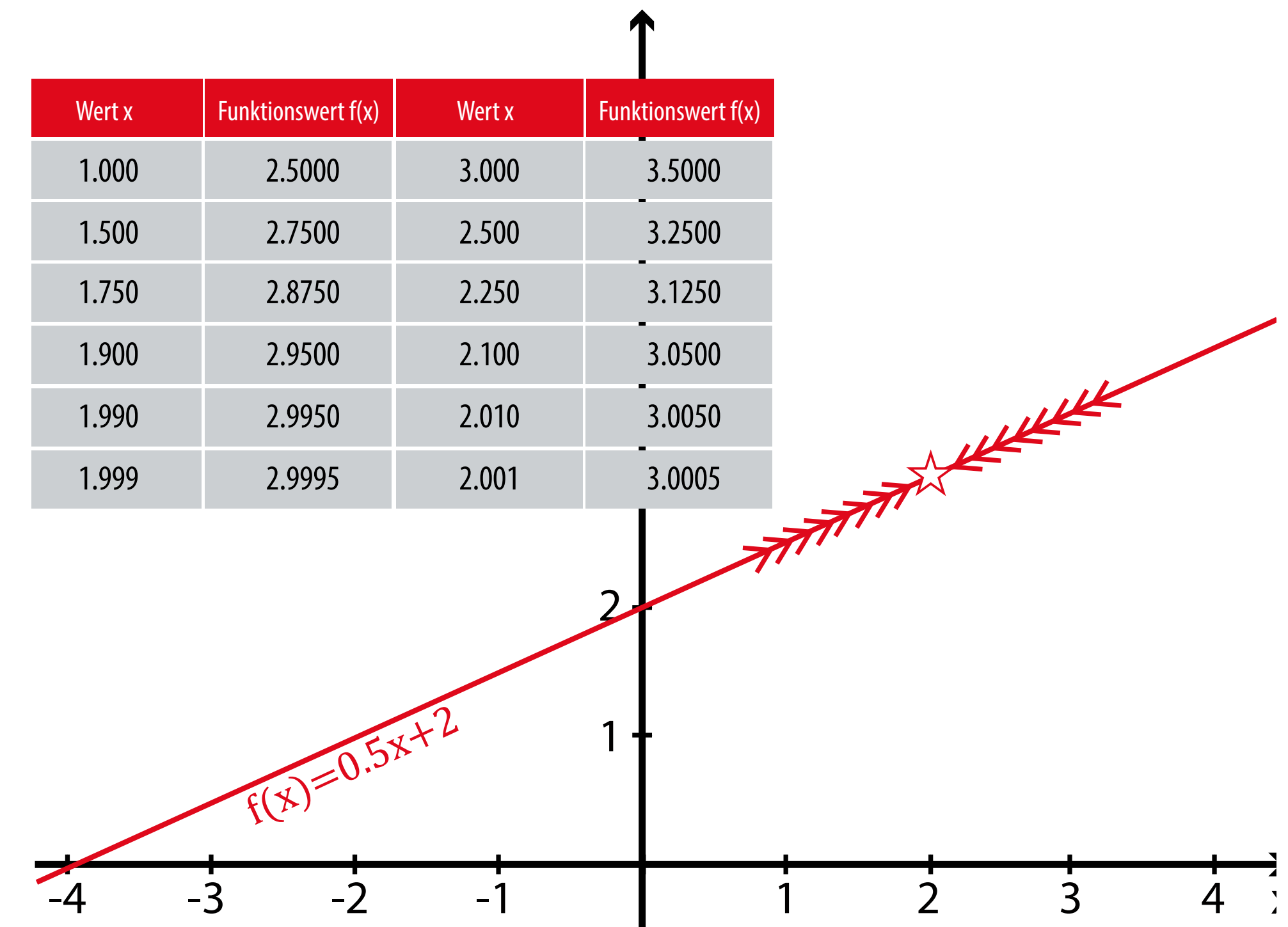
$$g(x) = \ln(2x) - \ln(x)$$

Grenzwerte

Bei einem Grenzwert untersuchen wir, gegen welchen Wert der Funktionswert strebt, wenn wir eine Variable immer näher an einem bestimmten Wert legen.

$$f(x) = 0.5x + 2 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

An vielen Stellen ist eine Grenzwertbetrachtung witzlos. Das Ergebnis entspricht dem Funktionswert.



Grenzwerte

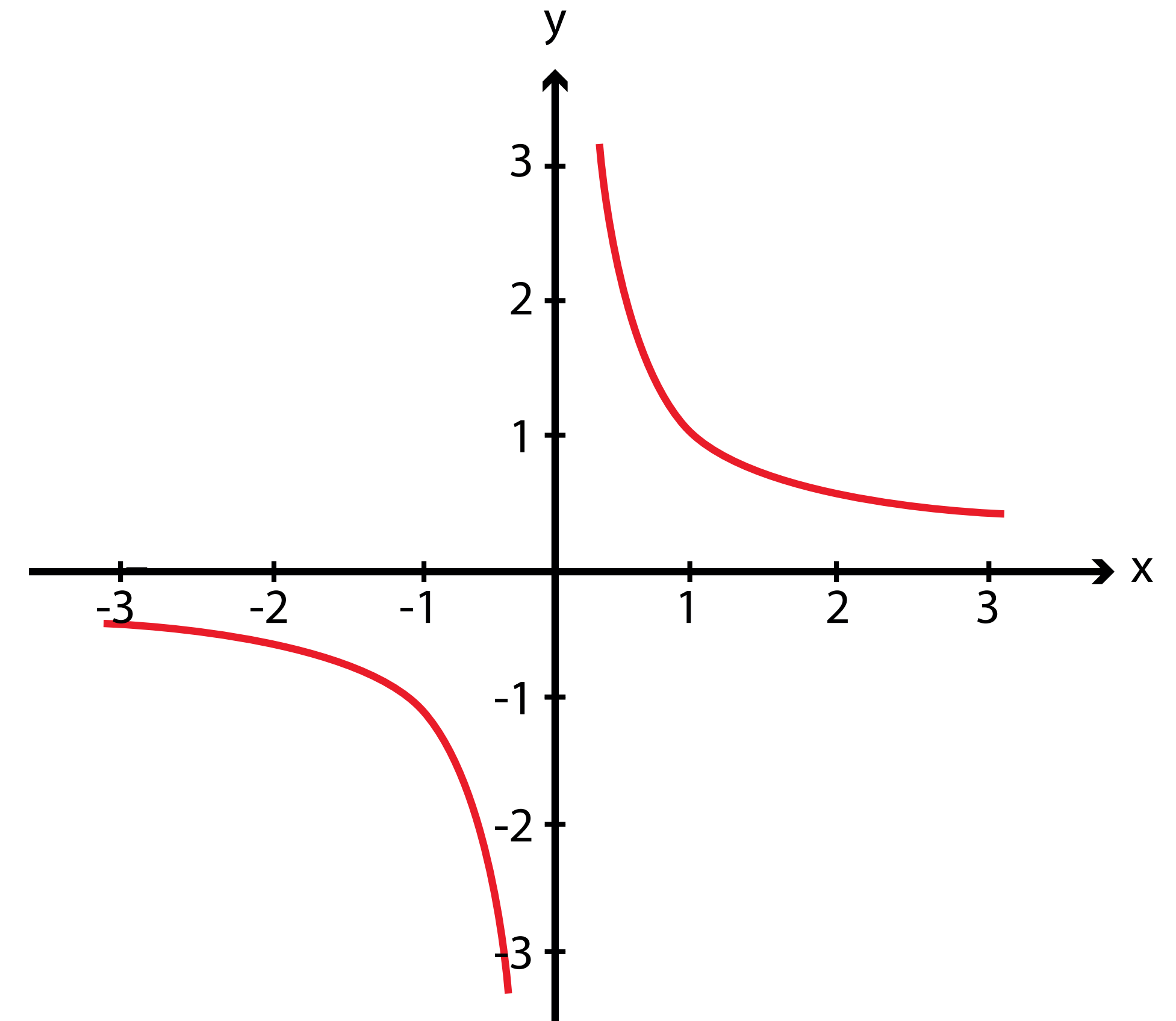
Der Grenzwert ist dann interessant, wenn wir eine Stelle betrachten, die wir in die Funktion nicht einsetzen können. Entweder weil die Funktion dort nicht definiert ist oder ...

$$f(x) = 1/x \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

... weil wir den Wert gegen unendlich gehen lassen!

$$f(x) = 1/x \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Aber wie können wir diese Grenzwerte berechnen, wenn wir sie nicht wie hier aus einem Schaubild herausnehmen?



Grenzwerte (unendlich)

Besteht die Funktion aus einem einzelnen Monom mit einem Exponenten aus den natürlichen Zahlen ...

$$f(x) = ax^b$$

... dann können wir den Grenzwert für x gegen unendlich aus der Tabelle rechts ablesen!

Grenzwerte von Monomen	$\lim_{x \rightarrow -\infty}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty}$
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

Grenzwerte (unendlich)

Bei einer Polynomfunktion mit natürlichen Exponenten (aka. ganzrationale Funktion) betrachten wir das Monom mit dem höchsten Exponenten und wenden dieselbe Tabelle an.

$$f(x) = 3x^5 + 8x^4 - x^2 + x$$

Bei dem Beispiel oben betrachten wir nur $3x^5$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^5 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5 = -\infty$$

Grenzwerte von Monomen	$\lim_{x \rightarrow -\infty}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty}$
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

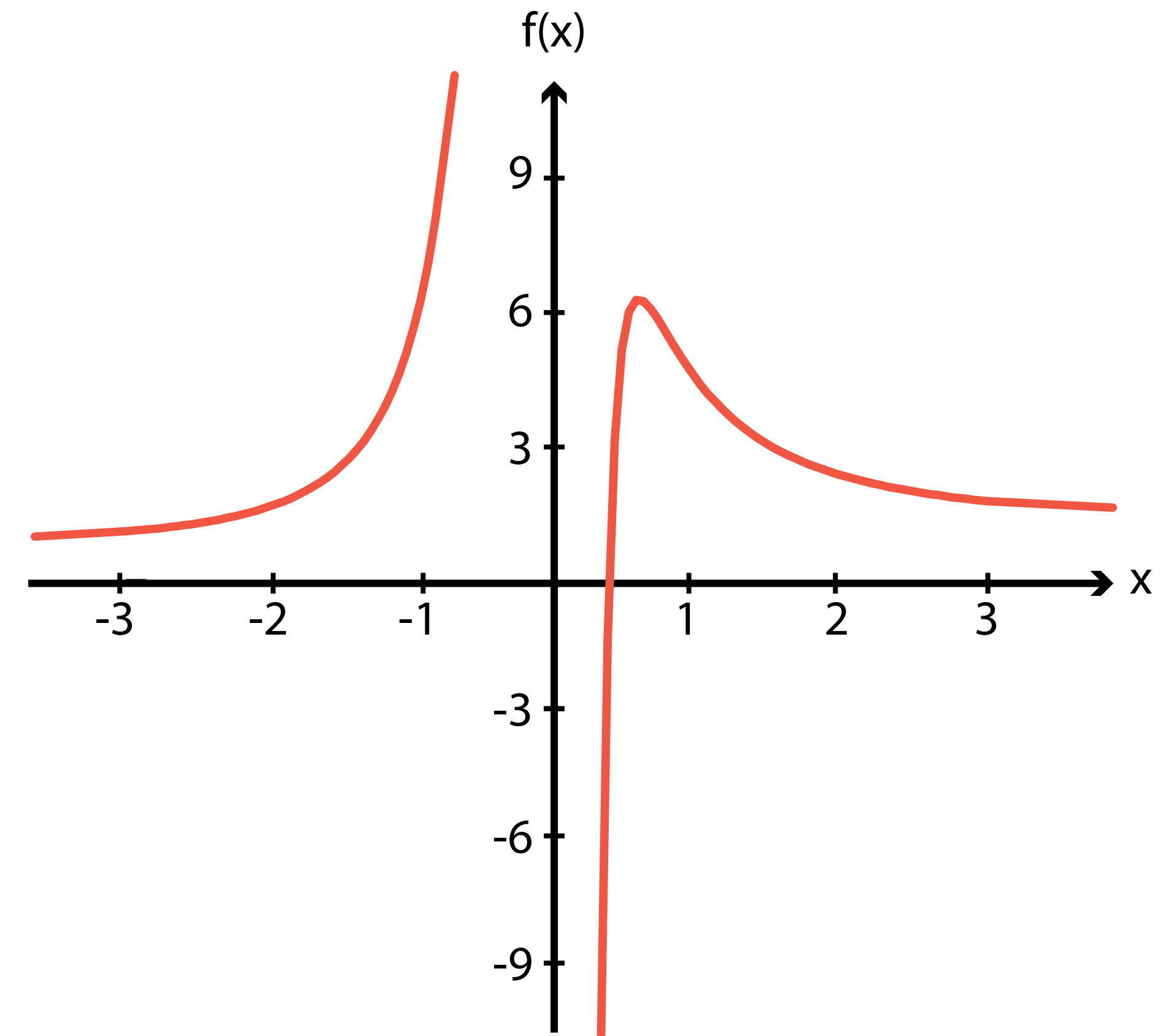
Grenzwerte (unendlich)

Gebrochen rationalen Funktion sind Quotienten zweier ganz-rationaler Funktionen. Bei diesen vergleichen wir die stärkste Potenz im Zähler mit der stärksten Potenz im Nenner.

$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x^3}$$

Ist die Potenz im Nenner stärker, ist der Grenzwert 0.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$



Grenzwerte (unendlich)

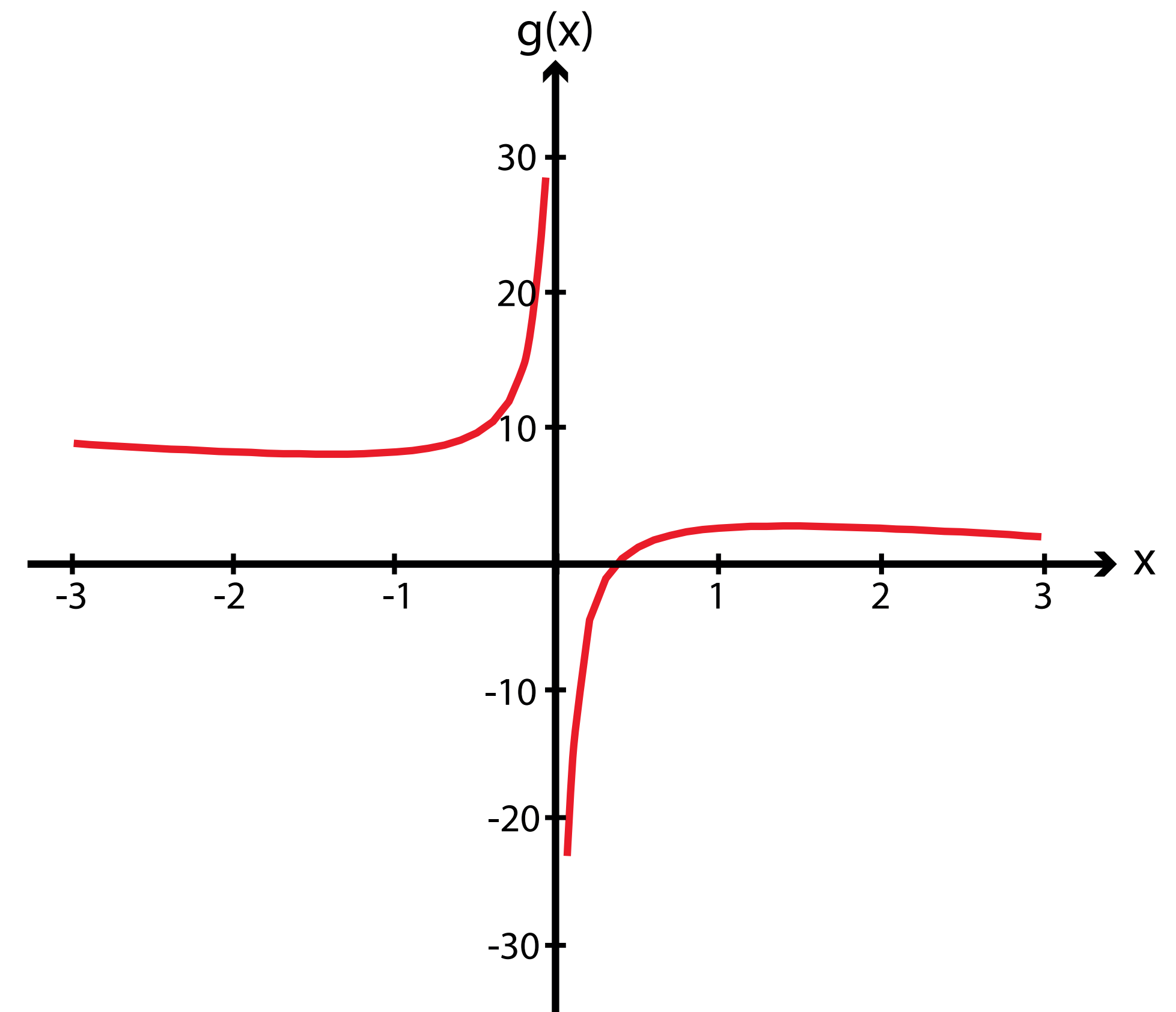
Gebrochen rationalen Funktion sind Quotienten zweier ganz-rationaler Funktionen. Bei diesen vergleichen wir die stärkste Potenz im Zähler mit der stärksten Potenz im Nenner.

$$g(x) = \frac{-x^2 + 5x - 2}{x}$$

Ist die Potenz im Zähler stärker, ist der Grenzwert unendlich. Das Vorzeichen ergibt sich "indirekt aus der Tabelle".

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{-\infty}{-\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{-\infty}{\infty} = -\infty$$



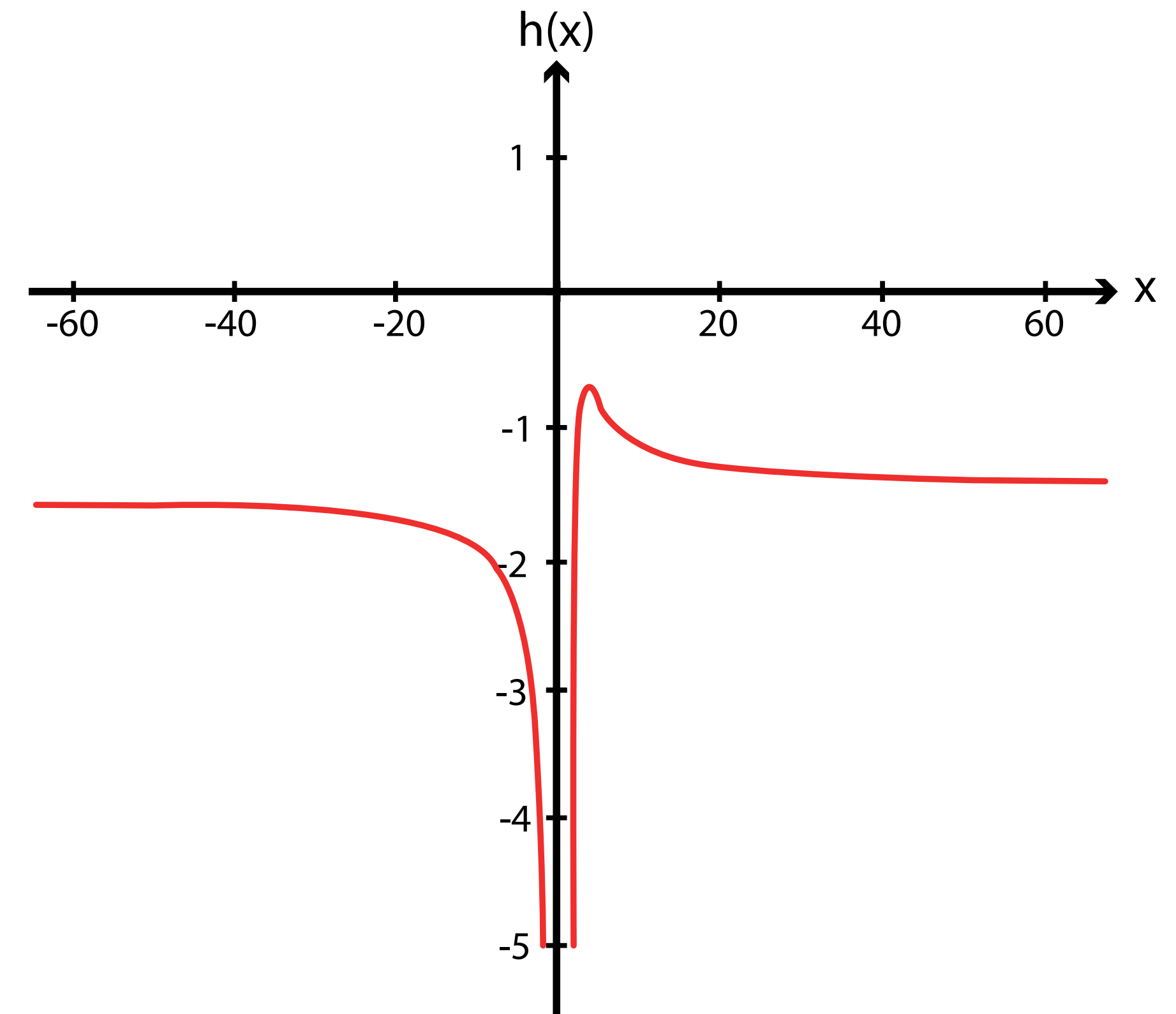
Grenzwerte (unendlich)

Gebrochen rationalen Funktion sind Quotienten zweier ganz-rationaler Funktionen. Bei diesen vergleichen wir die stärkste Potenz im Zähler mit der stärksten Potenz im Nenner.

$$h(x) = \frac{-3x^2 + 8x - 10}{2x^2}$$

Bei einem Gleichstand entspricht der Grenzwert dem Quotienten aus den beiden Vorfaktoren, hier -3 geteilt durch 2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\frac{3}{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\frac{3}{2}$$



Grenzwerte (unendlich)

Logarithmen sind schwächer als Potenzen, auch wenn im Argument des Logarithmus x^2 oder Ähnliches steht.

$$f(x) = 3x^5 + 8x^4 - x^2 + x + \ln(x^3)$$

Bei dem Beispiel oben betrachten wir nur $3x^5$. Wir müssen allerdings achten, ob der Logarithmus nicht zu ungültigen Werten führt!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^5 = \infty$$

~~$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5 = \infty$$~~

Grenzwerte von Monomen	$\lim_{x \rightarrow -\infty}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty}$
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

Grenzwerte (unendlich)

Exponentialfunktionen sind stärker als Potenzen, wenn ihr Exponent gegen $+\infty$ geht. Sie sind irrelevant, wenn ihr Exponent gegen $-\infty$ geht.

$$f(x) = -5x^4 + x^2 + e^x$$

Beim Grenzwert gegen $+\infty$ betrachten wir nur e^x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^4 = -\infty$$

Grenzwerte von Monomen	$\lim_{x \rightarrow -\infty}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty}$
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

Gebe die Grenzwerte für x gegen plus und minus unendlich an!

$$f(x) = -3x^4 + 2x + 5$$

$$g(x) = \frac{4x^5 - 3x}{2x^2}$$

$$h(x) = e^{-x} - x^2$$

$$k(x) = \frac{3x^4 + \ln(x)}{8x^4 - 20x}$$

Grenzwerte (Polstellen)

Polstellen sind Stellen einer Funktion, an denen wir durch 0 teilen würden. Im folgenden Beispiel dürfen wir keine 4 einsetzen, sonst teilen wir durch 0.

$$f(x) = \frac{1}{(x-4)}$$

Beim Grenzwert zu einer endlichen Stelle müssen wir unterscheiden, ob wir von links oder von rechts kommen. Das kann einen Unterschied machen, muss es aber nicht.

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = -\infty$$

Grenzwerte von Polstellen	$\lim_{x \rightarrow x_0-}$ von links	$\lim_{x \rightarrow x_0+}$ von rechts
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

Grenzwerte (Polstellen)

Verursachen mehrere Monome dieselbe Polstelle, müssen wir den Nenner näher untersuchen:

$$g(x) = \frac{1}{x^3 + x^2} = \frac{1}{x^2(x + 1)}$$

Jetzt können wir die Polstellen getrennt betrachten. Für die Polstelle bei der 0 gilt zum Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)+} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow (-1)-} f(x) = -\infty$$

Grenzwerte von Polstellen	$\lim_{x \rightarrow x_0-}$ von links	$\lim_{x \rightarrow x_0+}$ von rechts
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

Grenzwerte (Polstellen)

Steht im Zähler keine feste Zahl, sondern ein von x abhängiger Ausdruck müssen wir dessen Vorzeichen an der entsprechenden Stelle überprüfen!

$$h(x) = \frac{-x^2 + 3x}{x - 2}$$

Hier wäre die Polstelle bei x=2 und der Zähler hätte dort den Wert +2. Dementsprechend gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 2+} h(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 2-} h(x) = -\infty$$

Grenzwerte von Polstellen	$\lim_{x \rightarrow x_0 -}$ von links	$\lim_{x \rightarrow x_0 +}$ von rechts
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

Grenzwerte (Sonstiges)

Nähert sich das Argument einer Wurzel der 0, strebt der Wert dieses Terms gegen 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} = 0$$

Nähert sich das Argument eines Logarithmus der 0, strebt der Wert dieses Terms gegen minus unendlich.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x) = -\infty$$

Grenzwerte von Polstellen	$\lim_{x \rightarrow x_0 -}$ von links	$\lim_{x \rightarrow x_0 +}$ von rechts
Exponent ungerade Vorfaktor plus	$-\infty$	∞
Exponent ungerade Vorfaktor minus	∞	$-\infty$
Exponent gerade Vorfaktor plus	∞	∞
Exponent gerade Vorfaktor minus	$-\infty$	$-\infty$

Gebe die Grenzwerte für alle Polstellen an!

$$f(x) = \frac{15}{-x^4}$$

$$g(x) = \frac{2x - 8}{(x-3)^3}$$

$$h(x) = \frac{8}{x^2 - 2x + 1}$$

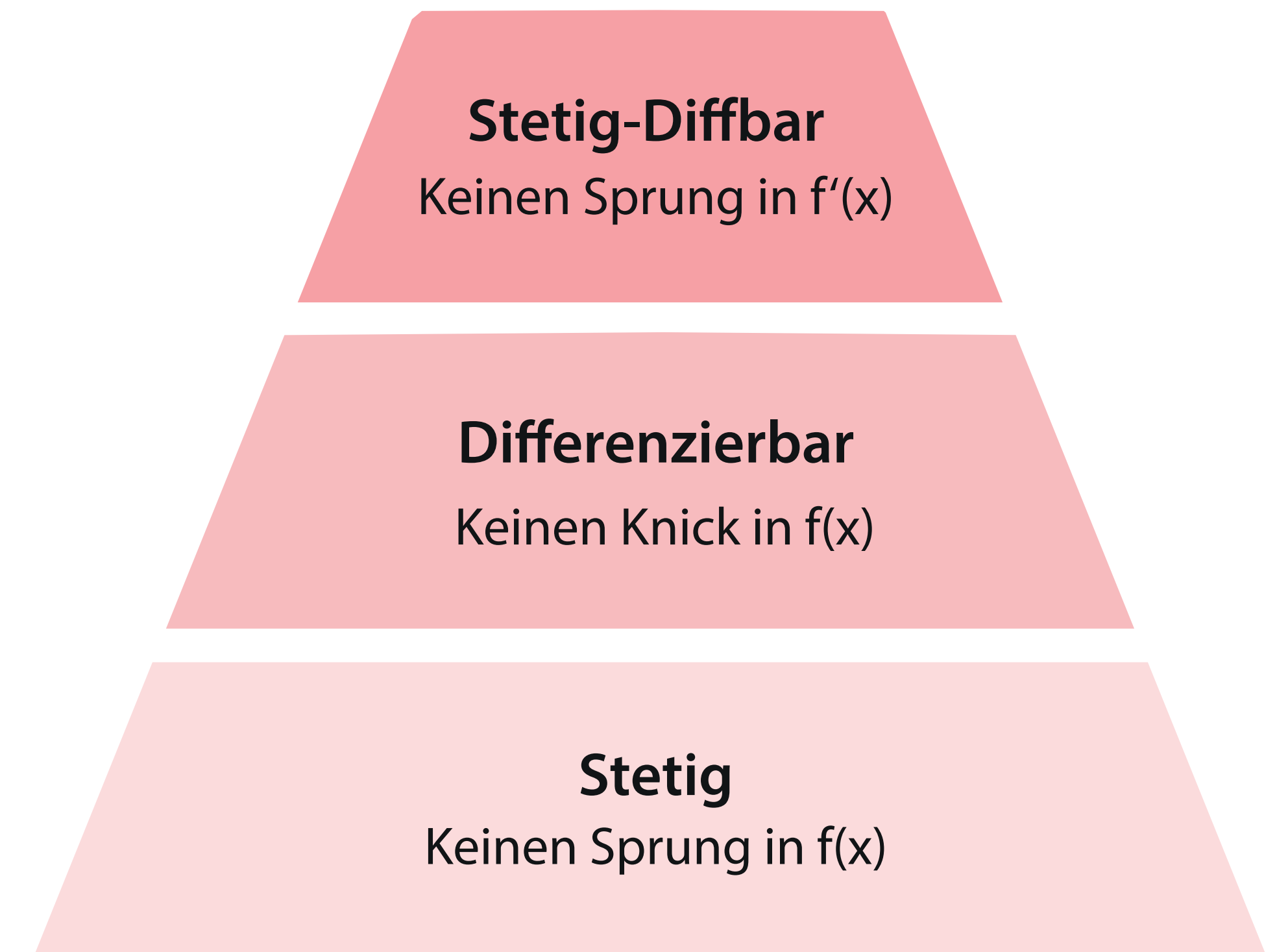
$$k(x) = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

Stetigkeit

Diese Eigenschaften bauen aufeinander auf:

Differenzierbare Funktionen sind immer auch stetig, aber stetige Funktionen sind nicht immer differenzierbar.

Die Bezeichnung "stetig differenzierbar" bedeutet, dass eine Funktion differenzierbar und ihre Ableitung stetig ist.

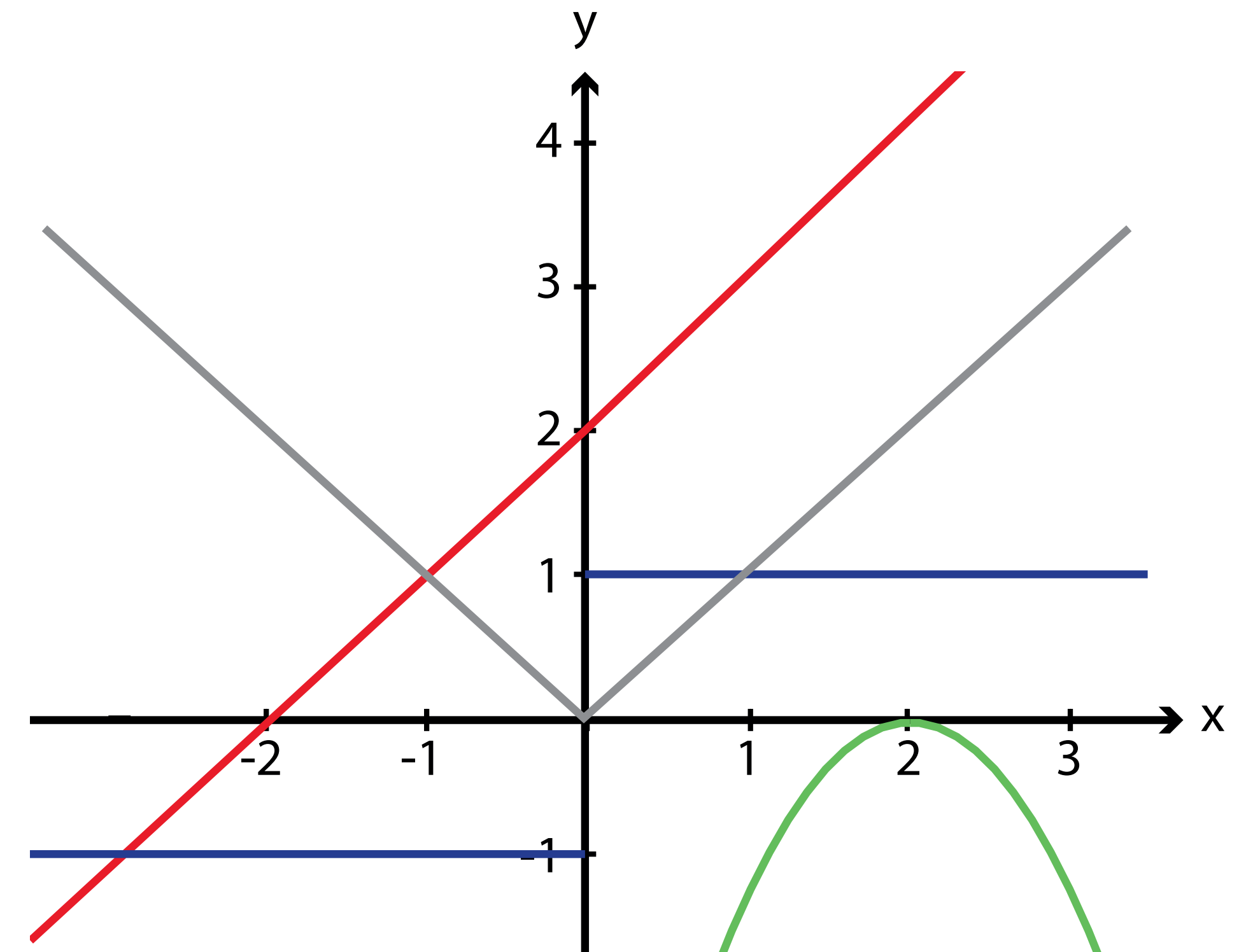


Stetigkeit

Wir können die Stetigkeit grafisch bzw. optisch definieren:

Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn ihr Schaubild keine Sprünge macht.

Nach diesen Definitionen sind alle Funktionen bis auf die Blaue stetig. Diese macht einen Sprung bei $x=0$, d. h. dort müssten wir den Stift neu ansetzen!



Stetigkeit

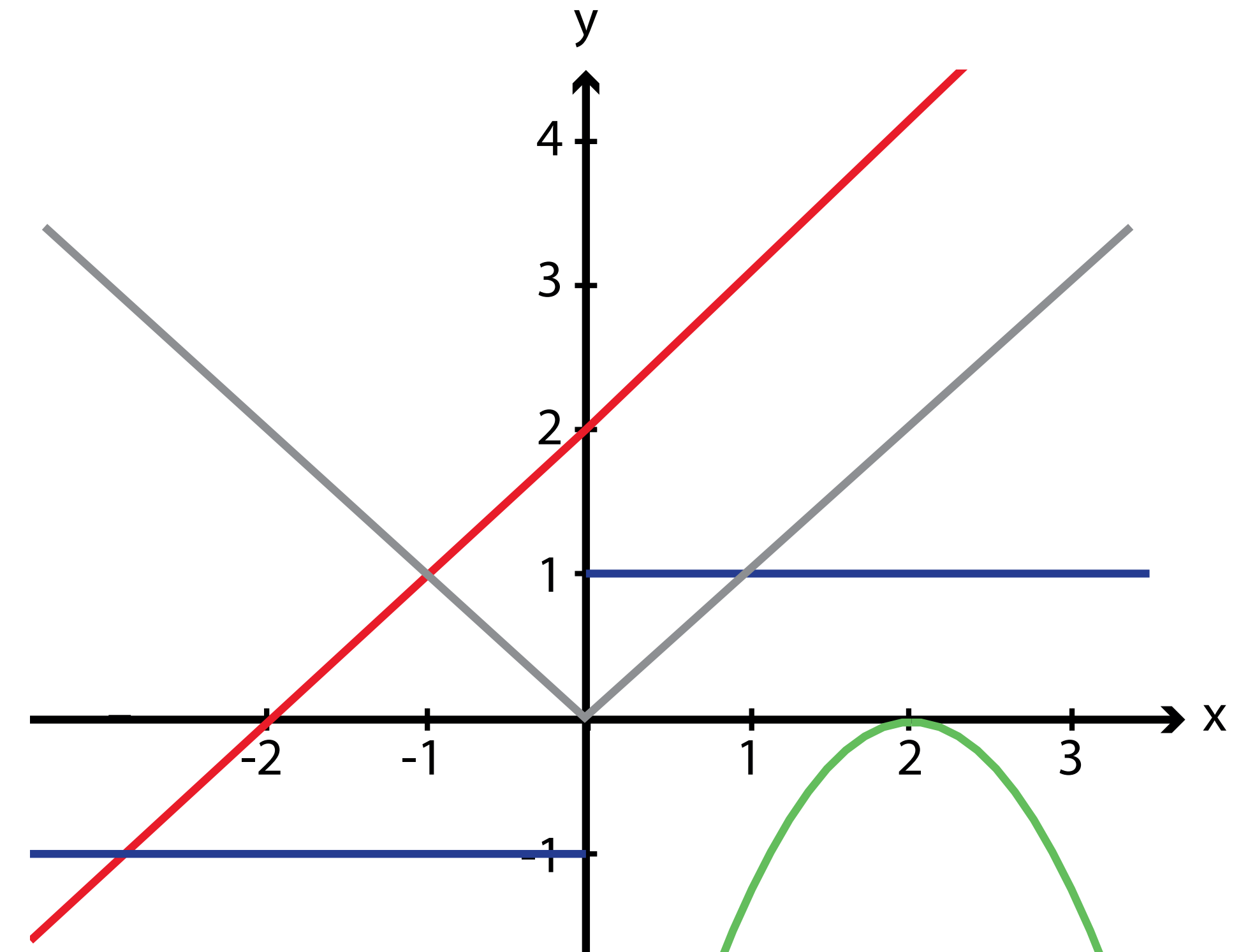
Grenzwertdefinition Eine Funktion ist genau dann stetig in einem Punkt x_0 wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Das ist insbesondere dann der Fall, wenn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Gilt diese Bedingung auf einem Intervall, ist die Funktion in diesem Intervall stetig.

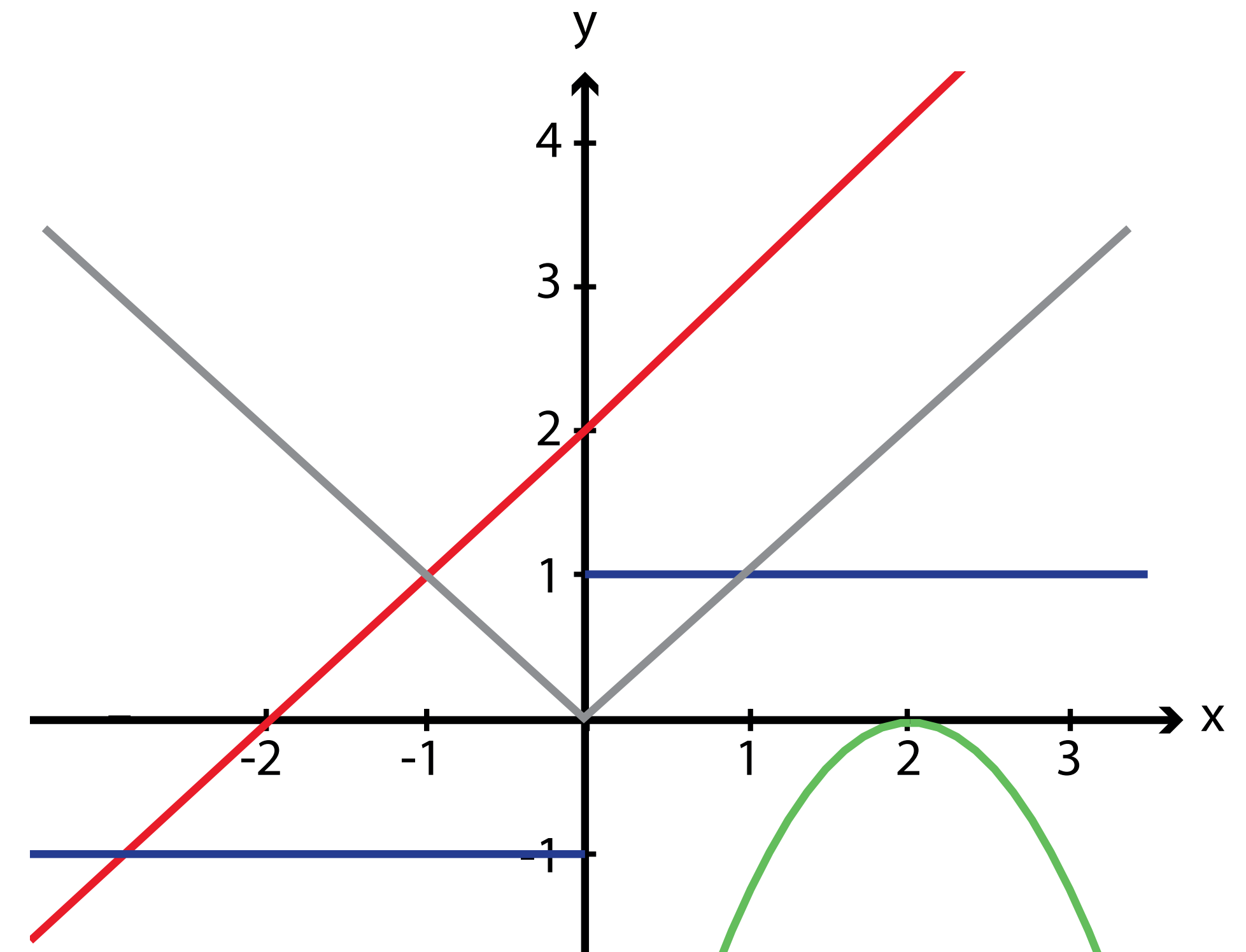


Differenzierbarkeit

Wir können Differenzierbarkeit grafisch bzw. optisch definieren:

Eine Funktion ist genau dann differenzierbar, wenn sie weder Sprünge noch Knickstellen hat.

Nach diesen Definitionen sind nur die rote und die grüne Funktion differenzierbar. Bei der Blauen haben wir einen Sprung und bei der grauen haben wir einen Knick.

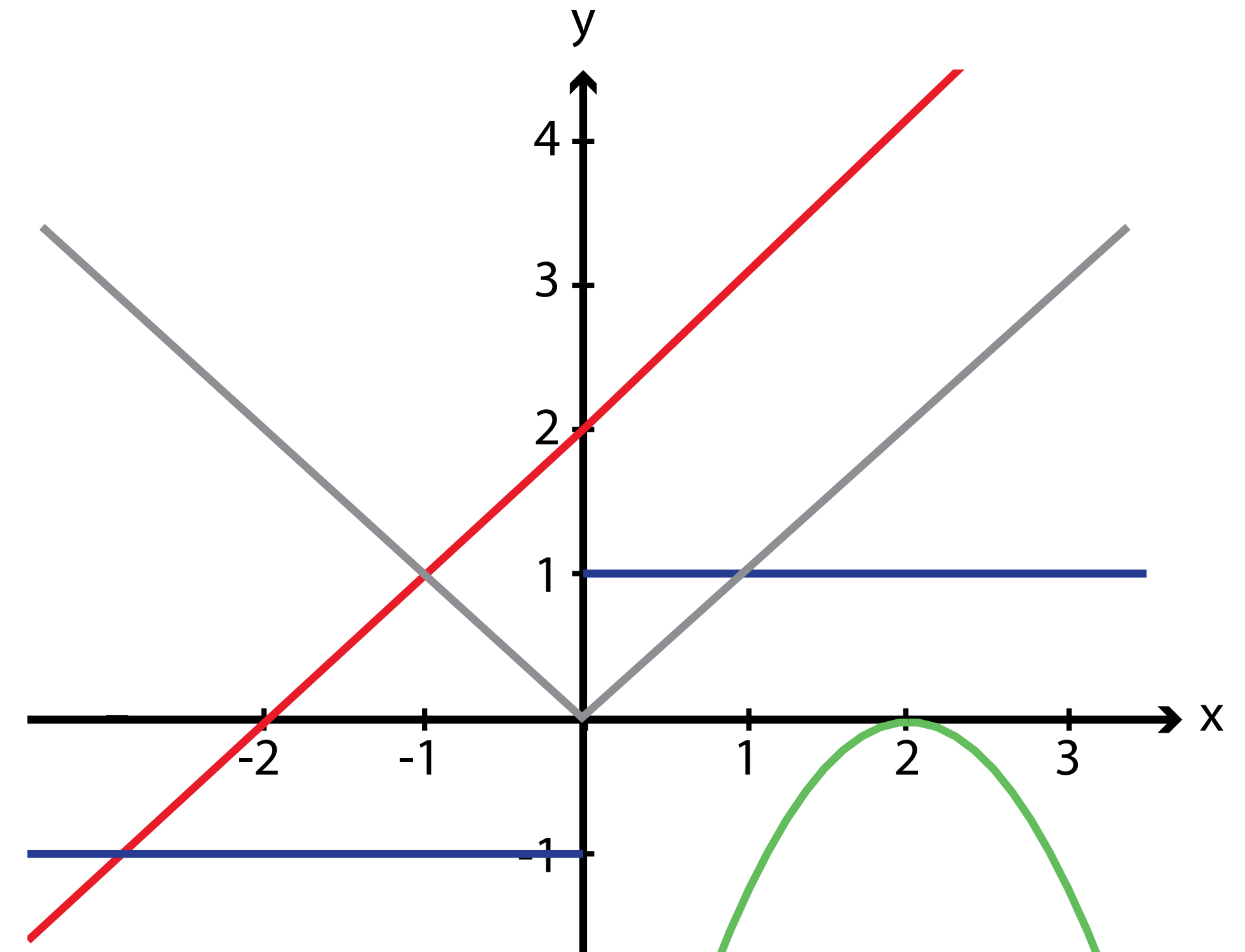


Differenzierbarkeit

Grenzwertdefinition Eine Funktion ist genau dann differenzierbar in einem Punkt x_0 wenn diese in einem Bereich um x_0 definiert ist und folgender Grenzwert existiert:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Gilt diese Bedingung auf einem Intervall, ist die Funktion in diesem Intervall stetig.

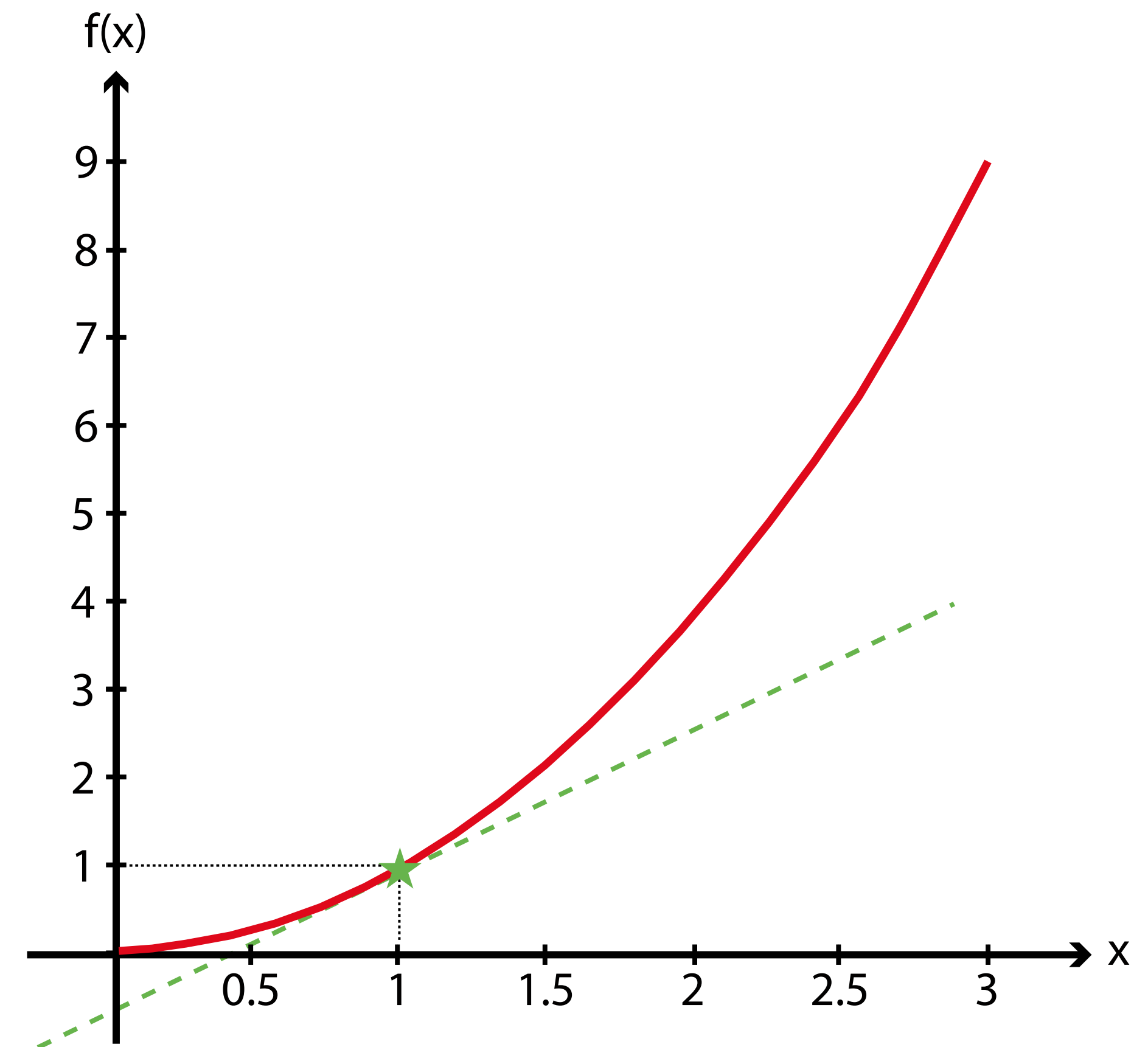


Ableitung

Mit dieser Bedingung für die Differenzierbarkeit sind wir bei der Definition der Ableitung angelangt.

Mit der Ableitung messen wir die Steigung einer Funktion an einer bestimmten Stelle x_0 .

Beispiel: Wie hoch ist die Steigung von $f(x)$ bei $x=1$?



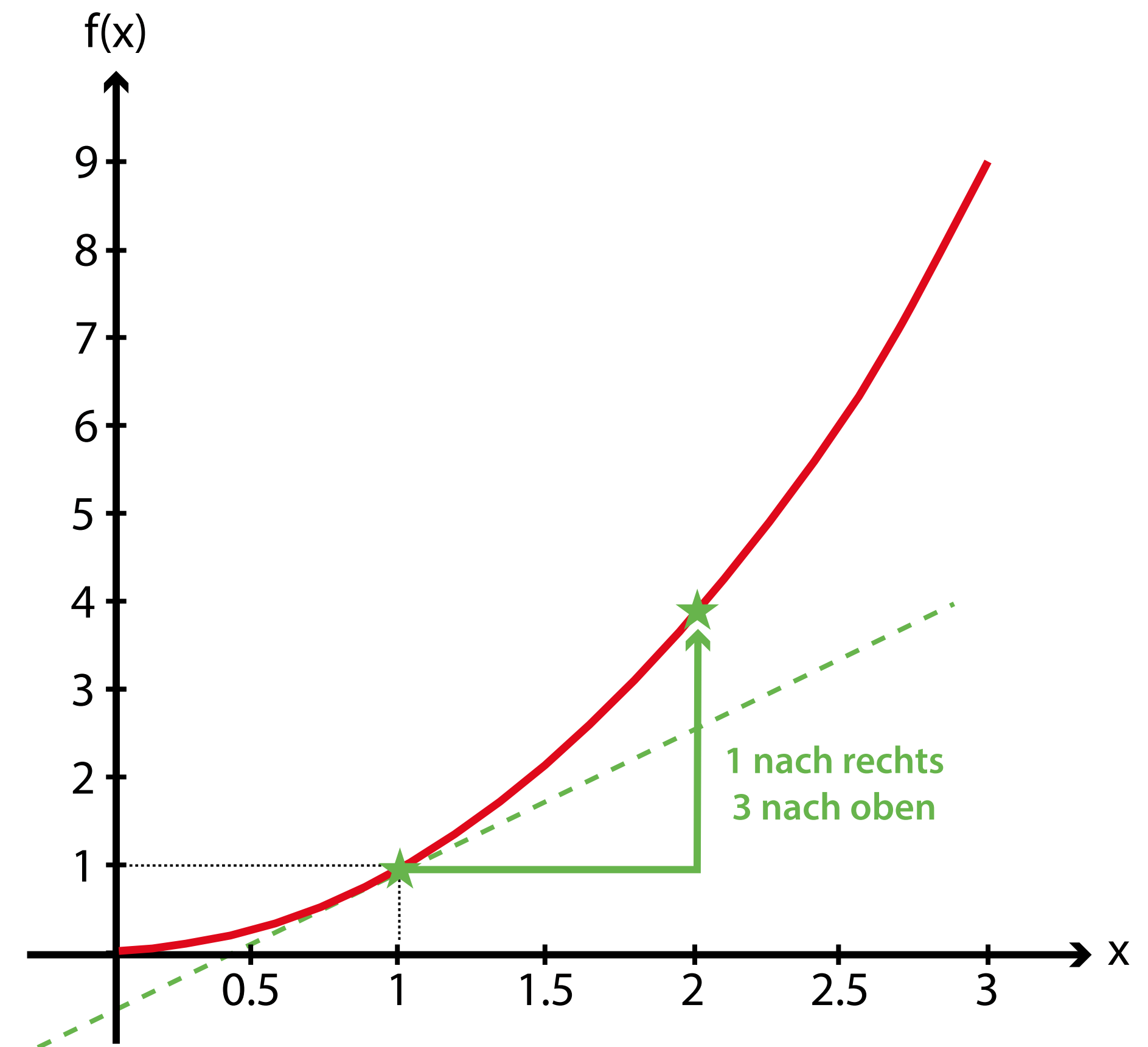
Ableitung

Näherung über Steigungsdreieck Die Steigung an der Stelle x_0 wird näherungsweise berechnet mit ...

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

... wobei h die Breite des Steigungsdreiecks ist. Verwenden wir zum Beispiel $x_0 = 1$ und $h = 1$ und erhalten damit den Wert:

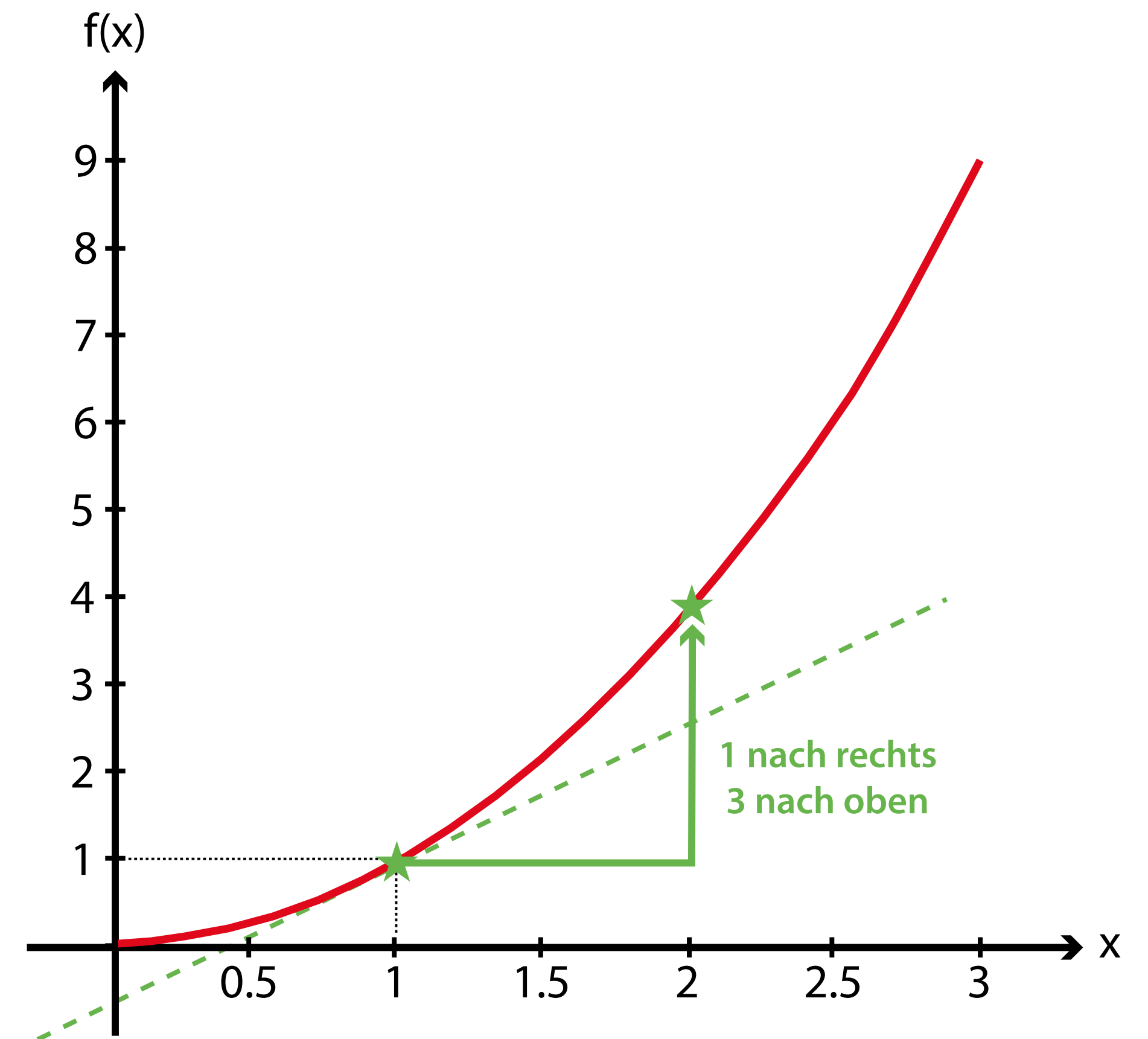
$$f'(x_0) \approx \frac{f(1+1) - f(1)}{1} = \frac{4 - 1}{1} = 3$$



Ableitung

Dieser Wert ist aber nicht die Steigung an der Stelle $x=1$ sondern die durchschnittliche Steigung zwischen $x=1$ und $x=1+h$.

Da die Kurve in diesem Bereich steiler wird überschätzen wir die Steigung bei $x=1$ deutlich.



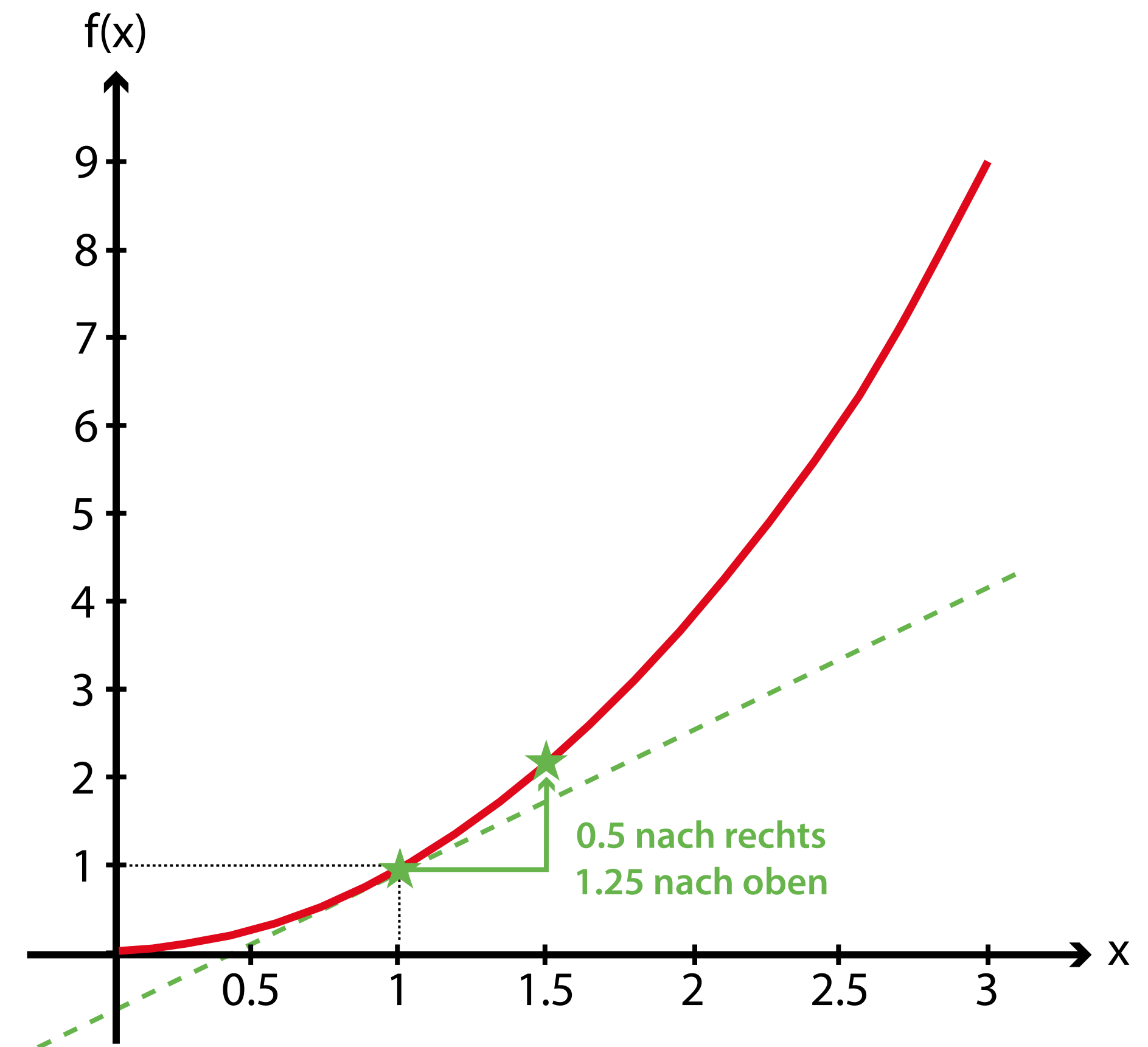
Ableitung

Die Näherung über Steigungsdreieck wird genauer, wenn wir die Breite des Dreiecks verkleinern.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(1.5) - f(1)}{0.5} \approx 2.50$$

Hier messen wir die durchschnittliche Steigung zwischen $x_0 = 1$ und dem Punkt $x_0 + h = 1.5$

Innerhalb dieses Bereichs ändert sich die Steigung der Kurve weniger, sodass wir die Steigung in x_0 recht gut nähern.



Ableitung

Die Näherung über Steigungsdreieck wäre genau, wenn die Breite des Dreiecks exakt 0 wäre. Wir können $h=0$ aber nicht in ...

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

... einsetzen, da wir sonst $0/0$ teilen. Was wir jedoch können ist den Grenzwert von h gegen 0 zu berechnen. Die Regeln dafür behandeln wir im nächsten Termin!

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

