

Aufgabe 19 Ableitungen

Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

- | | | |
|------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| a) $f(x) = 8x^2 - x + 5$ | e) $f(x) = \ln(e^x) - e^{\ln(x)}$ | i) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^3}$ |
| b) $f(x) = x + \ln(x) + e^x$ | f) $f(x) = (x-1)^2$ | j) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ |
| c) $f(x) = \sqrt{x^3}$ | g) $f(x) = x^3 e^x$ | k) $f(x) = x + 10^{x-1}$ |
| d) $f(x) = \frac{5}{x^5}$ | h) $f(x) = \ln(x)(x + e^x)$ | l) $f(x) = \ln(\ln(x))$ |

Aufgabe 20 Extremstellen

Finde alle Extremstellen der folgenden Funktionen. Untersuche jeweils, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt und ob dieses nur lokal oder auch global gilt.

- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| a) $f(x) = x^2 - 16x + 10$ | d) $j(x) = 0.5x^4 - 2x^3 + 2x^2$ |
| b) $g(x) = x^3 - 3x$ | e) $k(x) = e^x - x$ |
| c) $h(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x$ | |

Aufgabe 21 Monotonie und Konvexität

Untersuche die folgenden Funktionen auf Monotonie und Konvexität

- | | | |
|-----------------------|---------------------------|------------------------|
| a) $f(x) = x^2 - x$ | c) $h(x) = \sqrt{x}$ | e) $k(x) = (\ln(x))^2$ |
| b) $g(x) = -x^3 + 3x$ | d) $j(x) = \frac{x}{e^x}$ | |

Aufgabe 22 Boss Battle

Gebe den Definitions- und Wertebereich der folgenden Funktion an und berechne alle Nullstellen sowie die Grenzwerte gegen plus/minus unendlich.

Finde alle Extremstellen und untersuche jeweils, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt und ob dieses nur lokal oder auch global gilt. Untersuche die Funktion abschließend auf Monotonie und Konvexität.

$$f(x) = x^4 - 4x$$



LÖSUNGEN AUF FOLGENDEN SEITEN





Aufgabe 19 Ableitungen

- a) $f(x) = 8x^2 - x + 5$ Terme getrennt mit Potenzregel ableiten
 $f'(x) = 16x - 1$
- b) $f(x) = x + \ln(x) + e^x$ Terme getrennt ableiten
 $f'(x) = 1 + x^{-1} + e^x$
- c) $f(x) = \sqrt{x^3}$ Keine Kettenregel nötig
 $= (x^3)^{0.5} = x^{1.5}$ Potenz ausschreiben, dann Potenzregel anwenden
 $f'(x) = 1.5x^{0.5}$
- d) $f(x) = \frac{5}{x^5}$ Keine Quotientenregel nötig
 $= 5x^{-5}$ Potenz ausschreiben, dann Potenzregel anwenden
 $f'(x) = -25x^{-6} = \frac{-25}{x^6}$
- e) $f(x) = \ln(e^x) - e^{\ln(x)}$ Funktion erst mal genauer anschauen!
 $= x - x = 0$
 $f'(x) = 0$
- f) $f(x) = (x-1)^2$ Funktion erst mal genauer anschauen!
 $= x^2 - 2x + 1$
 $f'(x) = 2x - 2$
- g) $f(x) = x^3 e^x$ Produktregel, $g(x) = x^3$, $h(x) = e^x$
 $f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x$ $g'(x) = 3x^2$, $h'(x) = e^x$
 $= e^x(3x^2 + x^3)$
- h) $f(x) = \ln(x)(x+e^x)$ Produktregel, $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = x+e^x$
 $f'(x) = \frac{x+e^x}{x} + \ln(x)(1+e^x)$ $g'(x) = x^{-1}$, $h'(x) = 1+e^x$



i) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^3}$ Quotientenregel mit $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = x^3$
 $g'(x) = x^{-1}$, $h'(x) = 3x^2$

$$f'(x) = \frac{x^{-1}x^3 - \ln(x)3x^2}{(x^3)^2}$$

$$= \frac{x^2 - \ln(x)3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{1 - 3 \cdot \ln(x)}{x^4}$$

j) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ Kettenregel mit $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(\dots)}$$

$g'(x) = x^{-1}$, $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

k) $f(x) = x + 10^{x-1}$ Umschreiben zu Potenz mit Basis e

$$= x + (e^{\ln(10)})^{x-1}$$

Potenzen von Potenzen

$$= x + e^{\ln(10)(x-1)}$$

Kettenregel mit $g(x) = e^x$, $h(x) = \ln(10)(x-1)$

$$f'(x) = 1 + \ln(10)e^{(\dots)}$$

$g'(x) = e^x$, $h'(x) = \ln(10)$

$$= 1 + \ln(10)e^{\ln(10)(x-1)}$$

$$= 1 + \ln(10) \cdot 10^{(x-1)}$$

l) $f(x) = \ln(\ln(x))$ Kettenregel mit $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = \ln(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(\dots)}$$

$g'(x) = x^{-1}$, $h'(x) = x^{-1}$

$$= \frac{1}{x \ln(x)}$$



Aufgabe 20 Extremstellen

a) $f(x) = x^2 - 16x + 10$

Summanden mit Potenzregel ableiten

$$f'(x) = 2x - 16 \stackrel{!}{=} 0$$

Erste Ableitung nullsetzen

$$\Rightarrow x = 8$$

Bei $x=8$ könnte eine Extremstelle sein

$$f''(x) = 2$$

2. Ableitung ist eine positive Konstante.
Wir müssen die Stelle nicht mal einsetzen,
sie kann nur ein Minimum sein!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Von der Stelle $x=8$ ausgehend steigt die
Funktion in beide Richtungen gegen unendlich.
Damit muss das Minimum global sein.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

b) $g(x) = x^3 - 3x$

Summanden mit Potenzregel ableiten

$$g'(x) = 3x^2 - 3 \stackrel{!}{=} 0$$

Erste Ableitung nullsetzen

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 3$$

Nach x auflösen

$$\Leftrightarrow x^2 = 1$$

Es gibt zwei Kandidaten für eine Extremstelle

$$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$$

$$g''(x) = 6x$$

2. Ableitung ist keine Konstante; wir müssen einsetzen

$$g''(1) = 6$$

Bei $x=1$ haben wir ein Minimum

$$g''(-1) = -6$$

Bei $x=-1$ haben wir ein Maximum

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

Weder das Minimum noch das Maximum können global
sein, da $g(x)$ sowohl gegen plus als auch minus unendlich
geht. Es gibt also immer eine Stelle mit noch größerem
bzw. kleinerem Funktionswert!



c) $h(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x$

Summanden mit Potenzregel ableiten

$$h'(x) = -6x^2 + 4x + 2 \stackrel{!}{=} 0$$

Erste Ableitung nullsetzen

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{-12}$$

Mitternachtsformel anwenden

$$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{3}$$

Es gibt zwei Kandidaten für eine Extremstelle

$$h''(x) = -12x + 4$$

2. Ableitung ist keine Konstante; wir müssen einsetzen

$$h''(1) = -8$$

Bei $x=1$ haben wir ein Maximum

$$h''(-\frac{1}{3}) = 8$$

Bei $x=-1/3$ haben wir ein Minimum

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \infty$$

Weder das Minimum noch das Maximum können global sein, da $h(x)$ sowohl gegen plus als auch minus unendlich geht. Es gibt also immer eine Stelle mit noch größerem bzw. kleinerem Funktionswert!

d) $j(x) = 0.5x^4 - 2x^3 + 2x^2$

Summanden mit Potenzregel ableiten

$$j'(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x \stackrel{!}{=} 0$$

Erste Ableitung nullsetzen

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 6x + 4) = 0$$

x ausklammern

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

Die erste Lösung ist direkt erkennbar

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4}$$

Die anderen gibt es über die Mitternachtsformel

$$\Rightarrow x_2 = 2, x_3 = 1$$

Es gibt drei Kandidaten für eine Extremstelle

$$j''(x) = 6x^2 - 12x + 4$$

2. Ableitung ist keine Konstante; wir müssen einsetzen

$$j''(0) = 4$$

Bei $x=0$ haben wir ein Minimum

$$j''(1) = -2$$

Bei $x=1$ haben wir ein Maximum

$$j''(2) = 4$$

Bei $x=2$ haben wir ein Minimum

$$\lim_{x \rightarrow \infty} j(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} j(x) = \infty$$

Über die Grenzwerte können wir ein globales Maximum ausschließen. Bei den Minima müssen wir den Funktionswert vergleichen. Da $j(0)=j(2)$ sind beide Minima global.



e) $k(x) = e^x - x$	Summanden mit Potenzregel ableiten
$k'(x) = e^x - 1 \stackrel{!}{=} 0$	Erste Ableitung nullsetzen
$\Leftrightarrow e^x = 1$	Logarithmus $\ln(\dots)$ auf beiden Seiten
$\Leftrightarrow x = 0$	Nur eine mögliche Extremstelle!
$k''(x) = e^x$	2. Ableitung ist keine Konstante; wir müssen einsetzen
$k''(0) = 1$	Bei $x=0$ haben wir ein Minimum
$\lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = \infty$	Das Minimum muss global sein!
$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \infty$	

Aufgabe 21 Monotonie und Konvexität

a) $f(x) = x^2 - x$	
$f'(x) = 2x - 1$	Muss genauer untersucht werden!
$f''(x) = 2$	Ist immer >0 und damit ist die Funktion konvex in ganz \mathbb{R}
$2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0.5$	Streng monoton steigend in $(0.5, \infty)$
$2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0.5$	Streng monoton fallend in $(-\infty, 0.5)$
b) $g(x) = -x^3 + 3x$	
$g'(x) = -3x^2 + 3$	Später näher anschauen ...
$g''(x) = -6x$	Konvex für $x < 0$, konkav für $x > 0$
$g'(x) = -3x^2 + 3 \stackrel{!}{=} 0$	Suche Nullstelle der Ableitung
$\Leftrightarrow 3 = 3x^2$	
$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$	
$x < -1 \Rightarrow g'(x) < 0$	Streng monoton fallend in $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 1 \Rightarrow g'(x) > 0$	Streng monoton steigend in $(-1, 1)$
$x > 1 \Rightarrow g'(x) < 0$	Streng monoton fallend in $(1, \infty)$



c) $h(x) = \sqrt{x}$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ist immer > 0 und damit ist die Funktion streng monoton steigend auf dem Defb.

$$h''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

Ist immer < 0 und damit ist die Funktion konkav auf dem Definitionsbereich

d) $j(x) = \frac{x}{e^x}$

Wende Quotientenregel an

$$j'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2}$$

Kürze mit e^x

$$= \frac{1-x}{e^x}$$

Der Nenner ist immer positiv. Beim Zähler kommt es auf den Wert von x an!

$$x > 1 \Rightarrow j'(x) < 0$$

Streng monoton fallend in $(1, \infty)$

$$x < 1 \Rightarrow j'(x) > 0$$

Streng monoton wachsend in $(-\infty, 1)$

$$j''(x) = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2}$$

Erneute Anwendung der Quotientenregel

$$= \frac{-1 - (1-x)}{e^x}$$

$$= \frac{x-2}{e^x}$$

Der Nenner ist immer positiv. Beim Zähler kommt es auf den Wert von x an!

$$x > 2 \Rightarrow j''(x) > 0$$

Funktion ist konvex in $(2, \infty)$

$$x < 2 \Rightarrow j''(x) < 0$$

Funktion ist konkav $(-\infty, 2)$

e) $k(x) = (\ln(x))^2$

Wende Produkt- oder Kettenregel an

$$k'(x) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

Zusammenfassen

$$= \frac{2\ln(x)}{x}$$

Die Funktion ist nur für positive x definiert. Setzen wir positive Werte ein, ist der Nenner auf jeden Fall positiv. Beim Zähler müssen wir aufpassen!

$$x > 1 \Rightarrow \ln(x) > 0$$

Streng monoton steigend in $(1, \infty)$

$$x < 1 \Rightarrow \ln(x) < 0$$

Streng monoton fallend in $(0, 1)$



$$k''(x) = \frac{2x^{-1}x - 2 \ln(x)}{x^2} \quad \text{Anwendung der Quotientenregel}$$

$$= \frac{2 - 2 \ln(x)}{x^2} \quad \begin{array}{l} \text{Der Nenner ist auf jeden Fall positiv!} \\ \text{Beim Zähler müssen wir erneut aufpassen!} \end{array}$$

$$x > e \Rightarrow \ln(x) > 1 \Rightarrow f''(x) < 0 \quad \text{Funktion ist konkav in } (e, \infty)$$

$$x < e \Rightarrow \ln(x) < 1 \Rightarrow f''(x) > 0 \quad \text{Funktion ist konvex } (0, e)$$

Aufgabe 22 Boss Battle

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$$

Der Definitionsbereich von $f(x) = x^4 - 4x$ ist ganz \mathbb{R}
Den Wertebereich stellen wir vorerst mal zurück

$$f(x) = x^4 - 4x$$

Ableitungen mit Potenzregel berechnen

$$f'(x) = 4x^3 - 4$$

$$f''(x) = 12x^2$$

Immer positiv und damit konvex in \mathbb{R}

$$f'(x) = 4x^3 - 4 \stackrel{!}{=} 0$$

Ableitungen mit Potenzregel berechnen

$$\Leftrightarrow 4x^3 = 4$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 1$$

$$\Rightarrow x = 1$$

Eine mögliche Stelle für einen Extremwert...

$$f''(1) = 12$$

... und zwar ein Minimum!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

Über die Grenzwerte erkennen wir, dass das Minimum global sein muss.

$$f''(1) = 12$$

... und zwar ein Minimum!

$$f(1) = -3$$

Der Funktionswert dort zeigt uns den Wertebereich

$$x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0$$

Streng monoton steigend in $(1, \infty)$

$$x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0$$

Streng monoton fallend in $(-\infty, 1)$

$$f(x) = x^4 - 4x \stackrel{!}{=} 0$$

Fehlen nur noch die Nullstellen

$$\Leftrightarrow x(x^3 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt[3]{4}$$