

# Tutorium Generale

## Wirtschaftsmathematik

# Einheit IV

Der Name "Analysis I" verrät uns zwei Dinge:

Wir werden etwas analysieren. Konkret wird es um Funktionen und eine Vielzahl von Eigenschaften gehen, auf die wir diese Funktionen untersuchen können.

Es gibt eine später "Analysis II". Die Besonderheit von Analysis I ist, dass wir uns auf Funktionen mit genau einer Variable beschränken.



## Analysis I

- Ableitungsregeln
- Mehr Ableitungsregeln
- Extremstellen
- Monotonie
- Konvexität

# IV

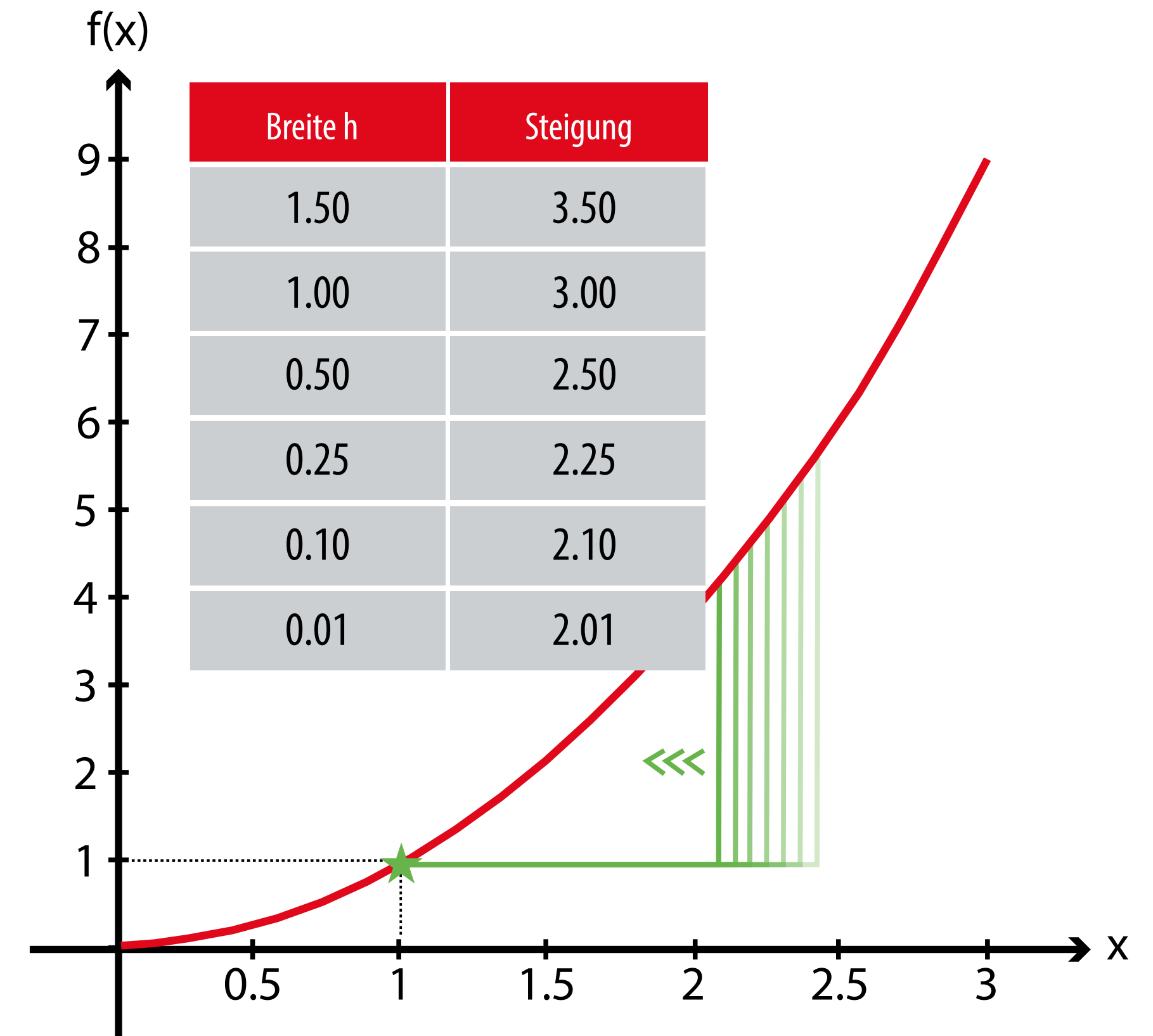
# Ableitungsregeln

Wir wissen nun, dass wir die Steigung einer Funktion an einer Stelle  $x_0$  durch Grenzwertbetrachtung berechnen können:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Wie berechnen wir diesen Grenzwert?

Tatsächlich werden wir nicht mit dem Grenzwert direkt arbeiten.



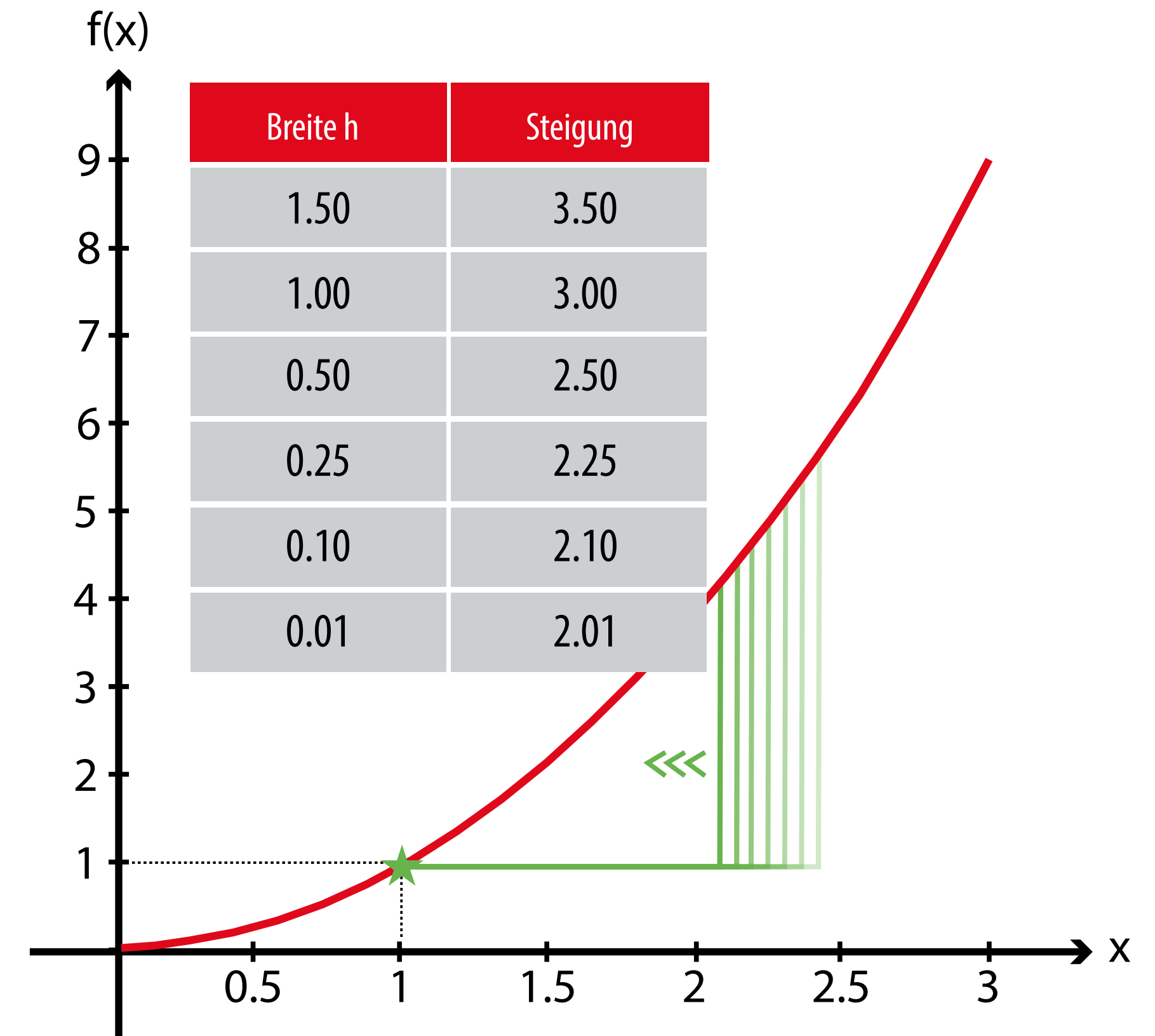
# Ableitungsregeln

Stattdessen lernen wir Ableitungsregeln kennen, mit denen wir zu einer gegebenen Funktion ihre Ableitung berechnen können.

Um die Steigung an einer Stelle zu erhalten setzen wir dann einfach die entsprechende Stelle in die Ableitung ein!

Wir beginnen mit einfachen Regeln für einzelne Terme

Danach kommen Regeln für Kombinationen von Termen.



# Ableitungsregeln

Die wichtigste Regel für einzelne Terme ist die Potenzregel.

**Potenzregel** Multipliziere den Faktor vor dem x mit dessen Exponenten und verringere den Exponenten um 1.

$$\begin{aligned}f(x) &= 8x^4 \\f'(x) &= 4 \cdot 8x^{4-1} \\&= 32x^3\end{aligned}$$

*Potenzregel*

$$f(x) = a \cdot x^b$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= a \cdot x^{b-1} \\&= b \cdot a \cdot x^{b-1}\end{aligned}$$

# Ableitungsregeln

Die Potenzregel gilt auch für negative Exponenten

$$f(x) = \frac{5}{x^2} = 5x^{-2} \quad f'(x) = -10x^{-3} = \frac{-10}{x^3}$$

Die Potenzregel gilt nicht nur für ganzzahlige Exponenten

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{0.5} \quad f'(x) = 0.5x^{-0.5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Erinnerung

$$a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

# Ableitungsregeln

Die Potenzregel gilt auch für den Exponenten 0. Eine Konsequenz davon ist die **Nullregel**: Summanden in denen die Variable nach der abgeleitet wird nicht vorkommt, fallen bei der Ableitung weg.

$$f(x) = 5x - 3 = 5x - 3x^0$$
$$f'(x) = 5$$

Erinnerung

$$a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

# Ableitungsregeln

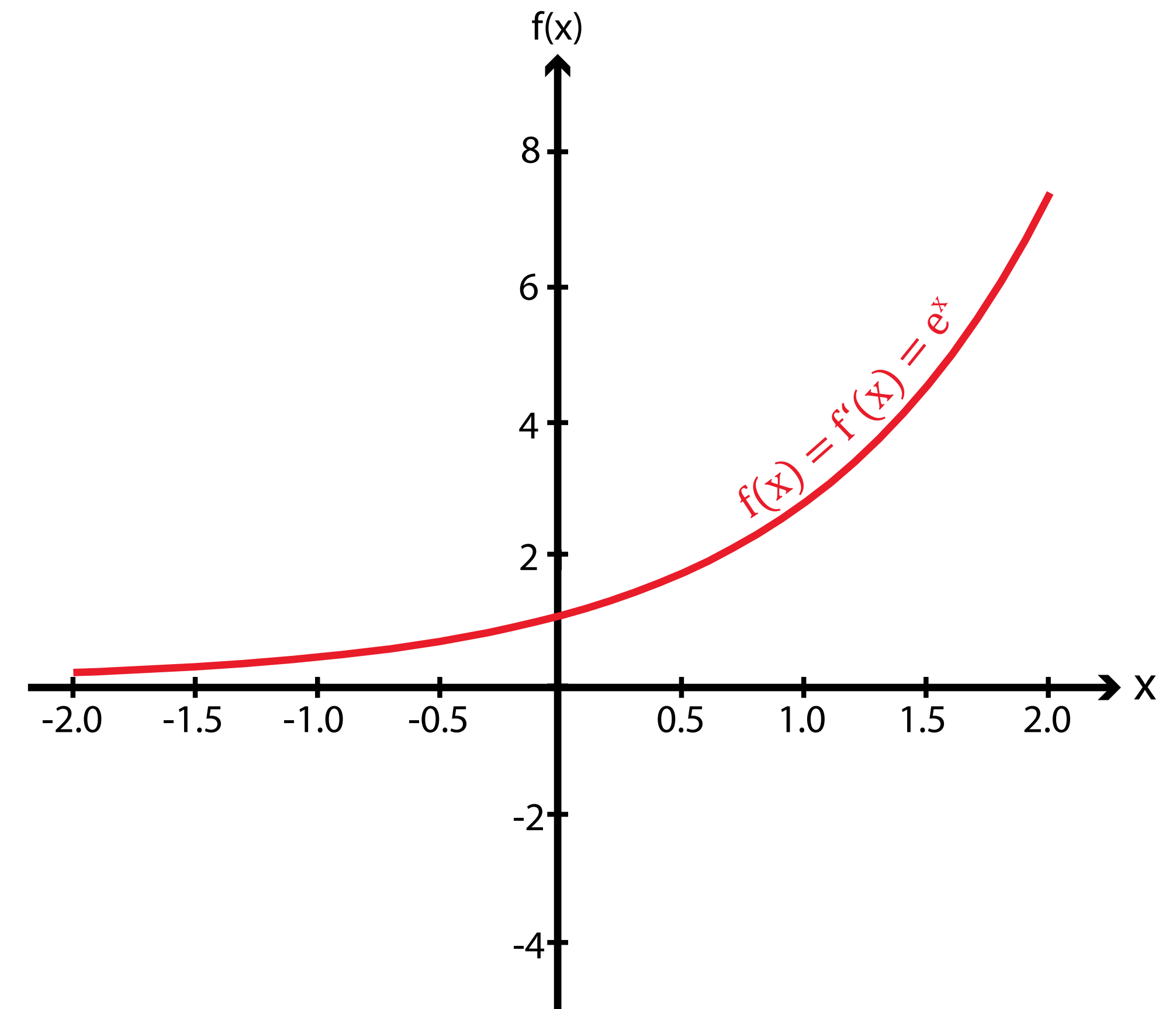
Bei Exponentialfunktionen mit der eulerschen Zahl  $e$  als Basis ...

$$f(x) = a \cdot e^x \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

mit  $e \approx 2.71828$

...ist die Ableitung gleich der ursprünglichen Funktion:

$$f'(x) = a \cdot e^x$$





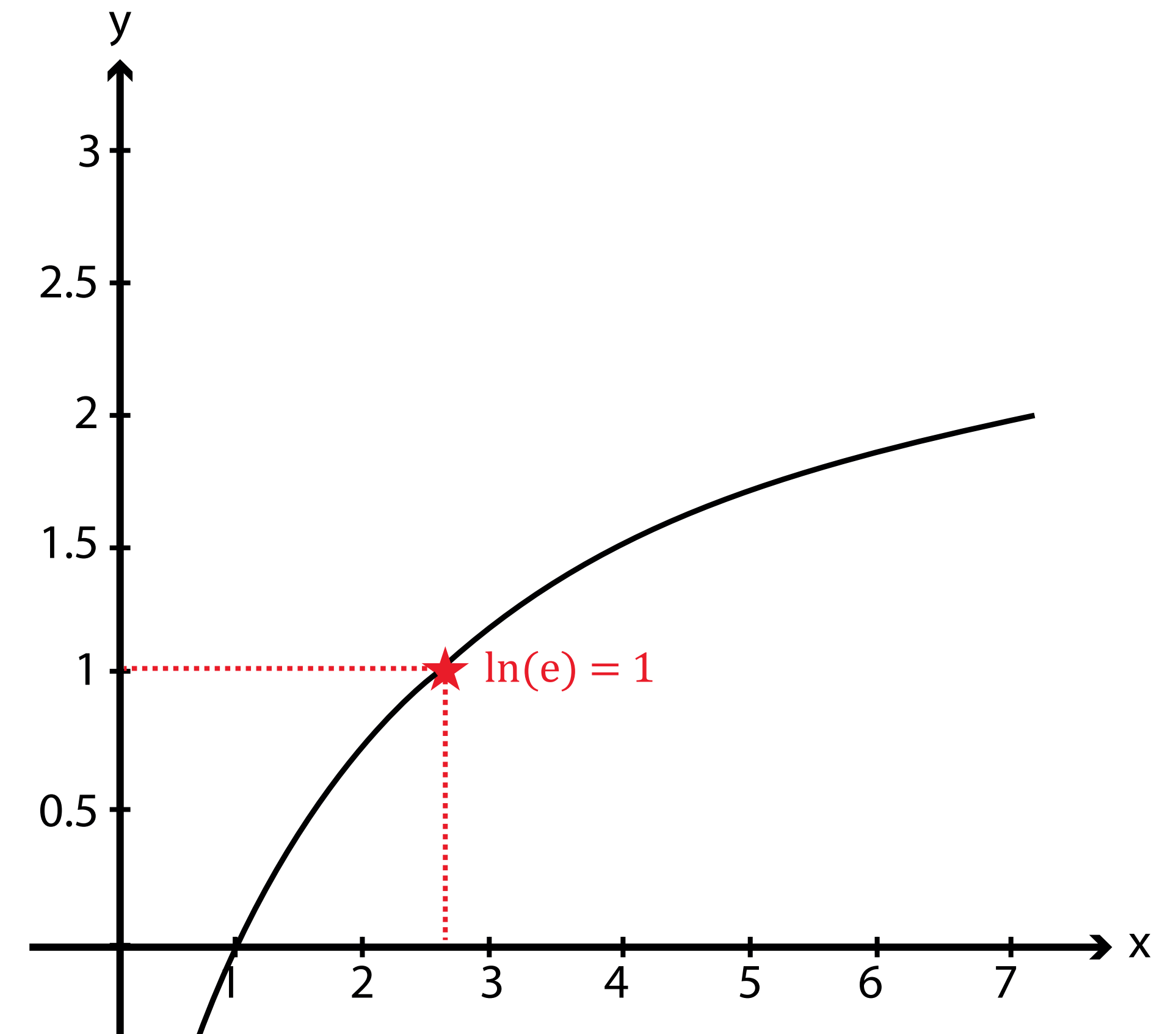
# Ableitungsregeln

Beim Logarithmus mit der eulerschen Zahl  $e$  als Basis ...

$$f(x) = a \cdot \ln(x) \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

...ist die Ableitung:

$$f'(x) = a \cdot x^{-1}$$



# Ableitungsregeln

**Summenregel** Besteht eine Funktion aus mehreren mit  $\pm$  verbundenen Termen, werden die Summanden separat abgeleitet.

$$\begin{array}{rccccccc} f(x) & = & 0.25x^4 & - & x^2 & + & 5e^x \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f'(x) & = & x^3 & - & 2x & + & 5e^x \end{array}$$

Summenregel

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Berechne die erste Ableitung folgender Funktionen:

$$f(x) = x^2 - \ln(x) + e^x$$

$$g(x) = \frac{1 + x^7 + x \ln(x)}{x}$$

# Mehr Ableitungsregeln

**Produktregel** Besteht eine Funktion aus zwei durch Multiplikation verbundene Teilfunktionen ...

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

so ist die Ableitung dieser Funktion gegeben durch:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

$$f'(x) = \underbrace{g'(x) \cdot h(x)}_{\text{Linke Funktion ableiten, Rechte Funktion belassen}} + \underbrace{g(x) \cdot h'(x)}_{\text{Rechte Funktion ableiten, Linke Funktion belassen}}$$

Linke Funktion ableiten  
Rechte Funktion belassen

Rechte Funktion ableiten  
Linke Funktion belassen

Reihenfolge ist irrelevant  
da Addition kommutativ ist

# Mehr Ableitungsregeln

Beispiel für Produktregel:

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$= 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot x^{-1}$$

$$= 2x \cdot \ln(x) + x$$

Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Linke Funktion ableiten  
Rechte Funktion belassen

Rechte Funktion ableiten  
Linke Funktion belassen

Reihenfolge ist irrelevant  
da Addition kommutativ ist

# Mehr Ableitungsregeln

**Quotientenregel** Besteht eine Funktion aus zwei durch Division verbundene Teilfunktionen ...

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

so ist die Ableitung dieser Funktion gegeben durch:

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot g(x)}{h(x)^2}$$

*Quotientenregel*

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Reihenfolge ist relevant  
da Subtraktion nicht kommutativ ist

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$$

# Mehr Ableitungsregeln

**Quotientenregel** Besteht eine Funktion aus zwei durch Division verbundene Teilfunktionen ...

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Zählerfunktion } g(x) = e^x \\ \longrightarrow \text{Nennerfunktion } h(x) = x^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x x^2 - 2x e^x}{x^4} \\ &= \frac{e^x (x^2 - 2x)}{x^4} = \frac{e^x (x - 2)}{x^3} \end{aligned}$$

*Quotientenregel*

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Reihenfolge ist relevant  
da Subtraktion nicht kommutativ ist

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$$

# Mehr Ableitungsregeln

**Kettenregel** Besteht eine Funktion aus zwei miteinander verketteten Teilfunktionen ...

$$f(x) = g(h(x))$$

...dann bezeichnen wir  $g(x)$  als äußere und  $h(x)$  als innere Funktion. Die Ableitung ist gegeben durch ...

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$$

...das Produkt von innerer und äußerer Ableitung.

Kettenregel

$$f(x) = \overbrace{g(h(x))}^{\text{Äußere Fkt.}}$$

$\underbrace{h(x)}_{\text{Innere Fkt.}}$

$$f'(x) = \underbrace{h'(x)}_{\text{Innere Ableitung}} \overbrace{g'(h(x))}^{\text{Äußere Ableitung}}$$

$\underbrace{h(x)}_{\text{Innere Fkt.}}$



# Mehr Ableitungsregeln

Beispiel zur Kettenregel:

$$f(x) = \ln(5x^2 + 3x)$$

Äußere Funktion:  $g(x) = \ln(x)$   
Innere Funktion:  $h(x) = 5x^2 + 3x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x) \cdot g'(h(x)) \\ &= (10x+3) \cdot (5x^2+3x)^{-1} \\ &= \frac{10x+3}{5x^2+3x} \end{aligned}$$

Kettenregel

$$f(x) = \overbrace{g(h(x))}^{\text{Äußere Fkt.}}$$

Innere Fkt.

$$f'(x) = \underbrace{h'(x)}_{\text{Innere Ableitung}} \cdot \overbrace{g'(h(x))}^{\text{Äußere Ableitung}}$$

Innere Fkt.

Berechne die erste Ableitung folgender Funktionen:

$$f(x) = xe^x$$

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$h(x) = 2^{(x^2)}$$

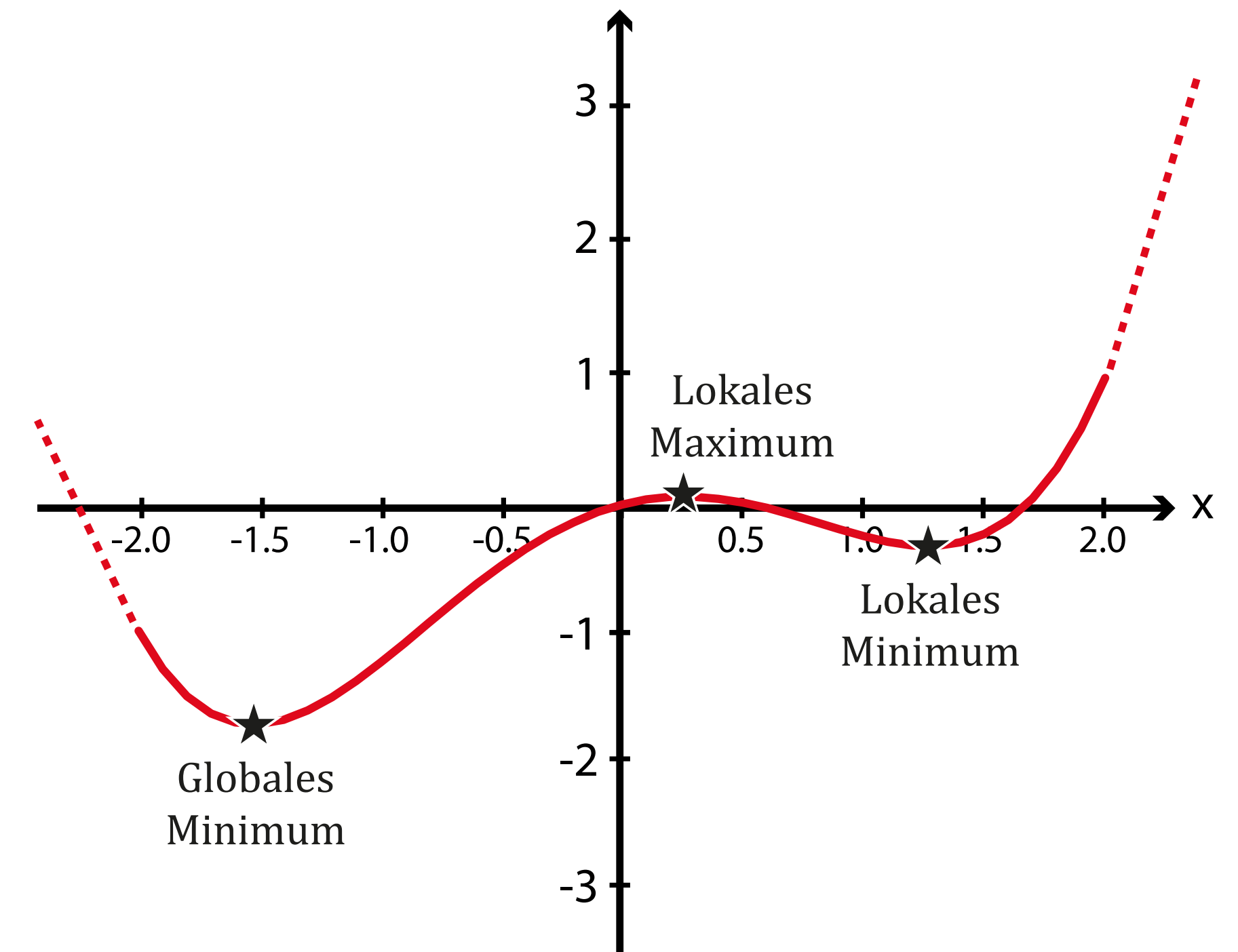
# Extremstellen

Wir unterscheiden in Minima und Maxima sowie zwischen globalen und lokalen Extremstellen.

**Globales Maximum** Es gibt keine Stelle auf dem Definitionsbereich an dem ein höherer Funktionswert erreicht wird.

**Globales Minimum** Es gibt keine Stelle auf dem Definitionsbereich an dem ein kleinerer Funktionswert erreicht wird.

Nicht jede Funktion hat beides und einige haben keines!

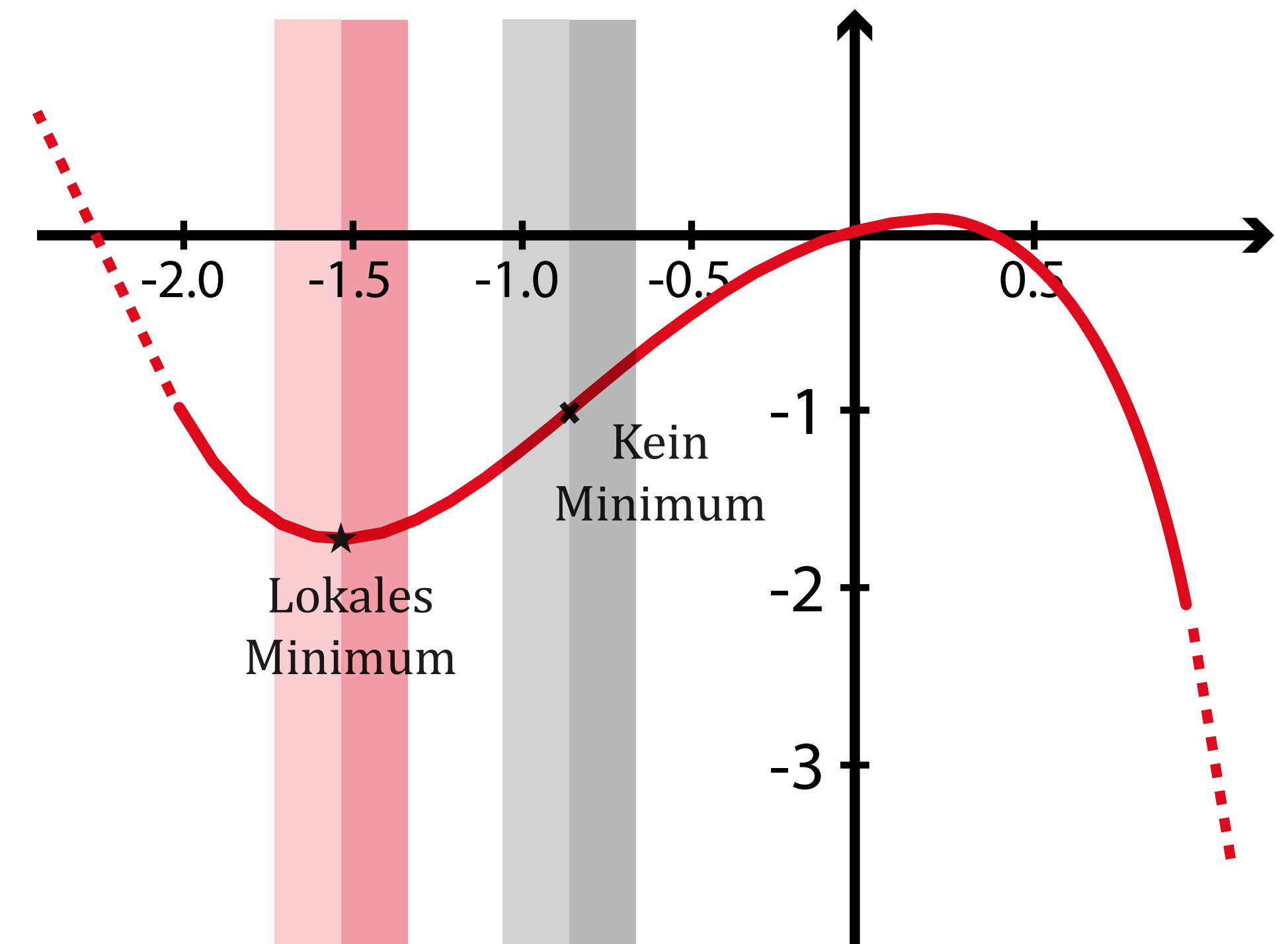


# Extremstellen

Wir unterscheiden in Minima und Maxima sowie zwischen globalen und lokalen Extremstellen.

**Lokales Maximum** Es gibt einen kleinen Bereich um die Stelle innerhalb dessen kein größerer Funktionswert erreicht wird.

**Lokales Minimum** Es gibt einen kleinen Bereich um die Stelle innerhalb dessen kein kleinerer Funktionswert erreicht wird.



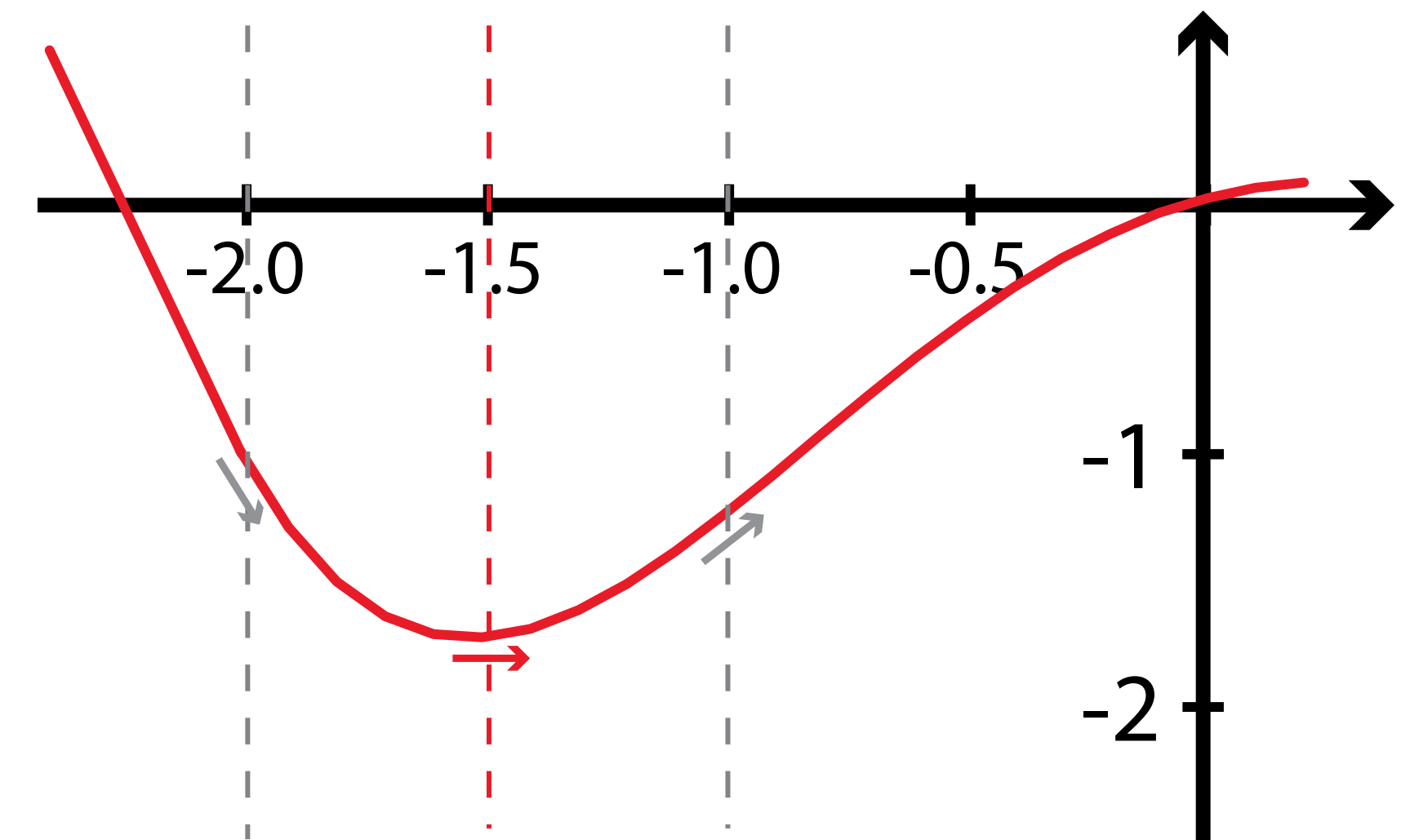
# Extremstellen

Damit eine Extremstelle bei  $x_0$  vorliegen kann, muss die Steigung an dieser Stelle 0 sein.

Wäre die Steigung zum Beispiel positiv, würde die Funktion nach rechts steigen und nach links fallen.

**Kein Minimum** Wir finden keinen noch so kleinen Bereich um  $x_0$  in welchem alle Funktionswerte größer als  $x_0$  sind.

**Kein Maximum** Wir finden keinen noch so kleinen Bereich um  $x_0$  in welchem alle Funktionswerte kleiner als  $x_0$  sind.

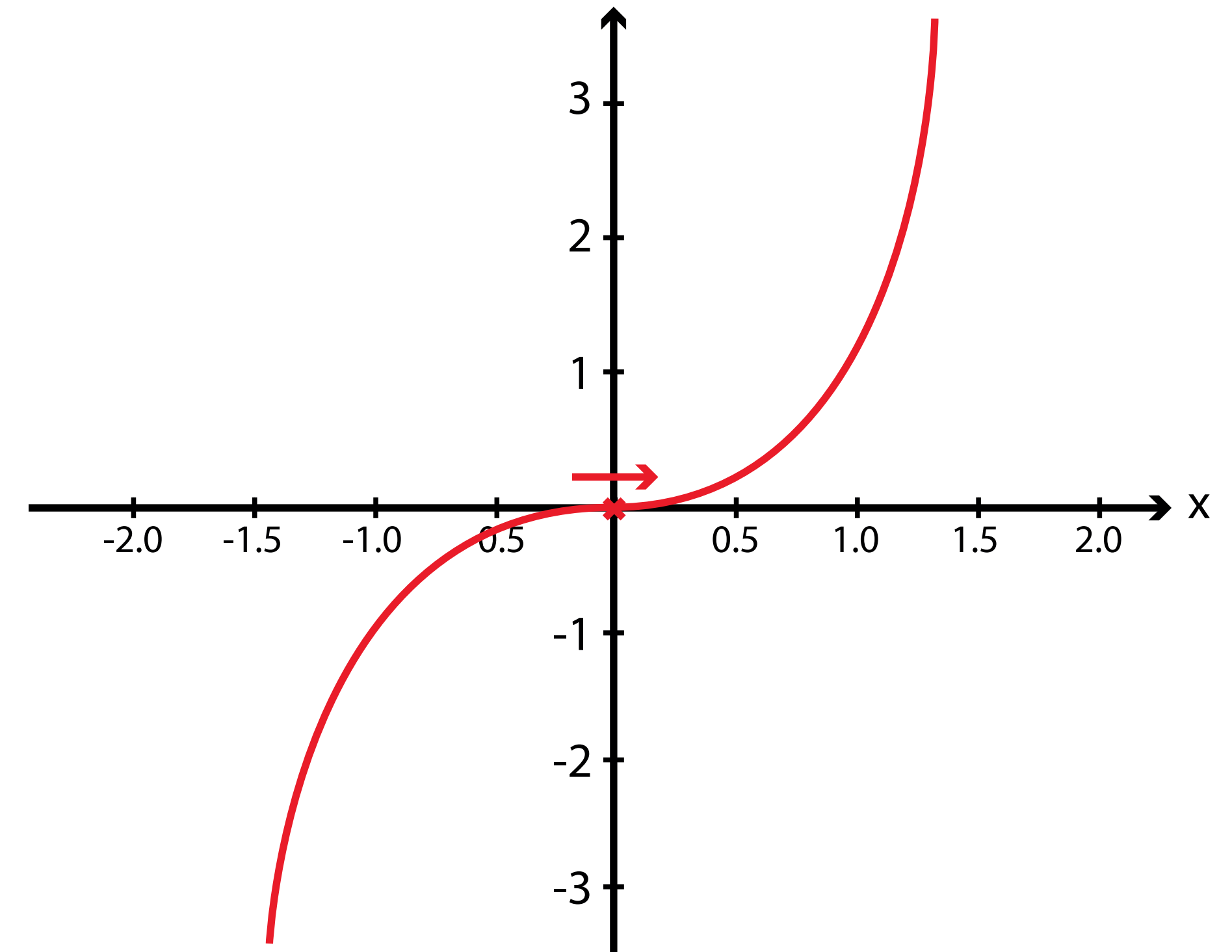


# Extremstellen

**Notwendige Bedingung** Ist  $x_0$  ein Extremum, d. h. ein Minimum oder Maximum der Funktion  $f(x)$ , dann gilt  $f'(x_0) = 0$

Die umgekehrte Logik funktioniert nicht! Es kann Stellen mit Ableitung  $f'(x_0) = 0$  geben an denen  $f(x)$  kein Extremum hat.

Wir brauchen eine zusätzliche hinreichende Bedingung!



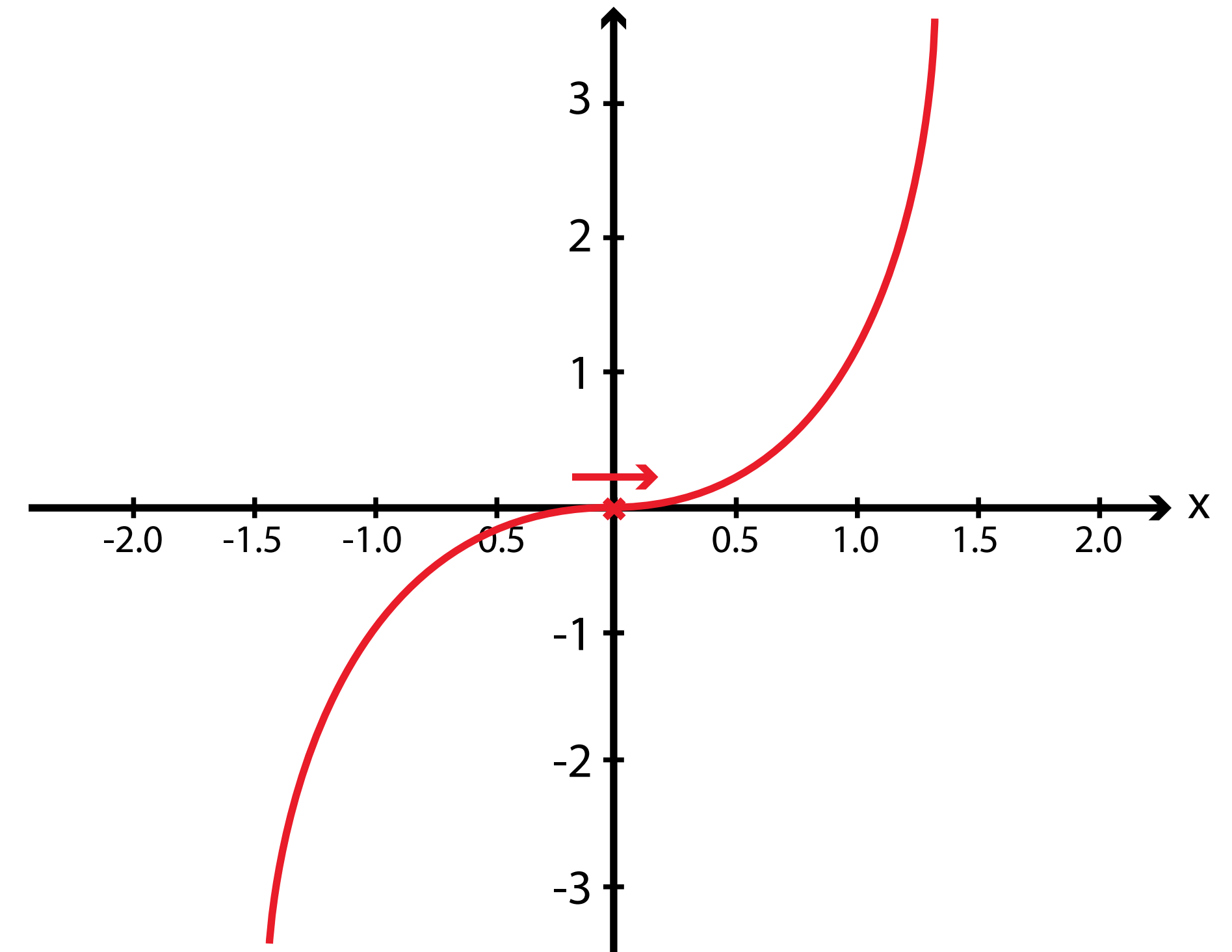
# Extremstellen

Ist  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) < 0$  dann ist die Stelle  $x_0$  ein lokales Maximum von  $f(x)$ .

Ist  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) > 0$  dann ist die Stelle  $x_0$  ein lokales Minimum von  $f(x)$ .

Ist  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) = 0$  dann ist die Stelle  $x_0$  ein Sattelpunkt von  $f(x)$ , aber keine Extremstelle.

Ob die Extremstellen nicht nur lokal, sondern auch global sind müssen wir ausknobeln. Dabei helfen Grenzwerte und Logik!



Finde alle Extremstellen der folgenden Funktionen und gib ihre Ausprägung an!

$$f(x) = 8x^2 - 4x + 2$$

$$g(x) = -0.5x^4 + x^2$$



# Monotonie

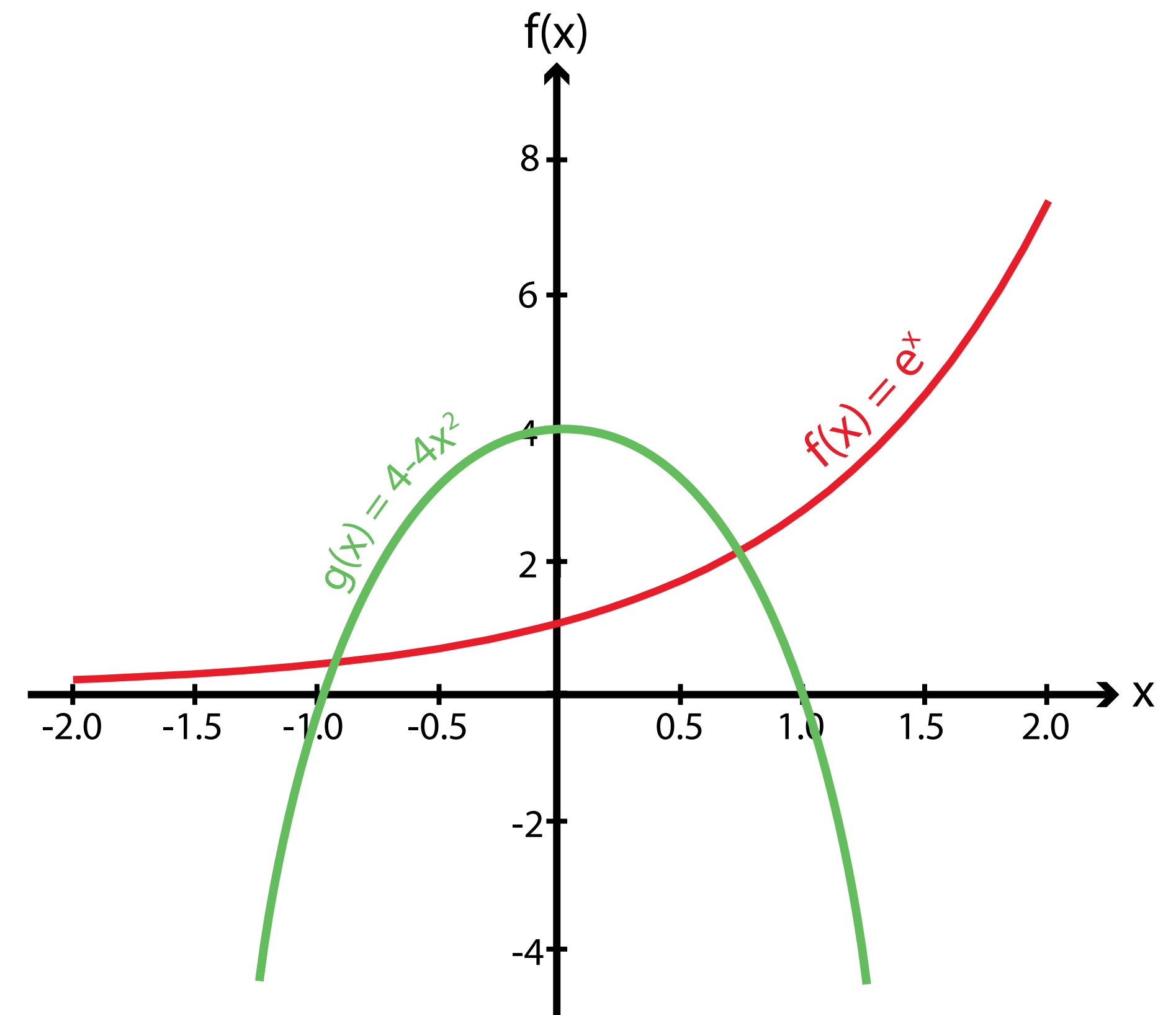
Eine Funktion  $f(x)$  ist genau dann monoton steigend in der Variable  $x$ , wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall x > x_0 \text{ gilt } f(x) \geq f(x_0)$$

Eine Funktion  $f(x)$  ist genau dann streng monoton steigend in der Variable  $x$ , wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall x > x_0 \text{ gilt } f(x) > f(x_0)$$

Die Begriffe monoton fallend und streng monoton fallend sind analog dazu mit definiert.



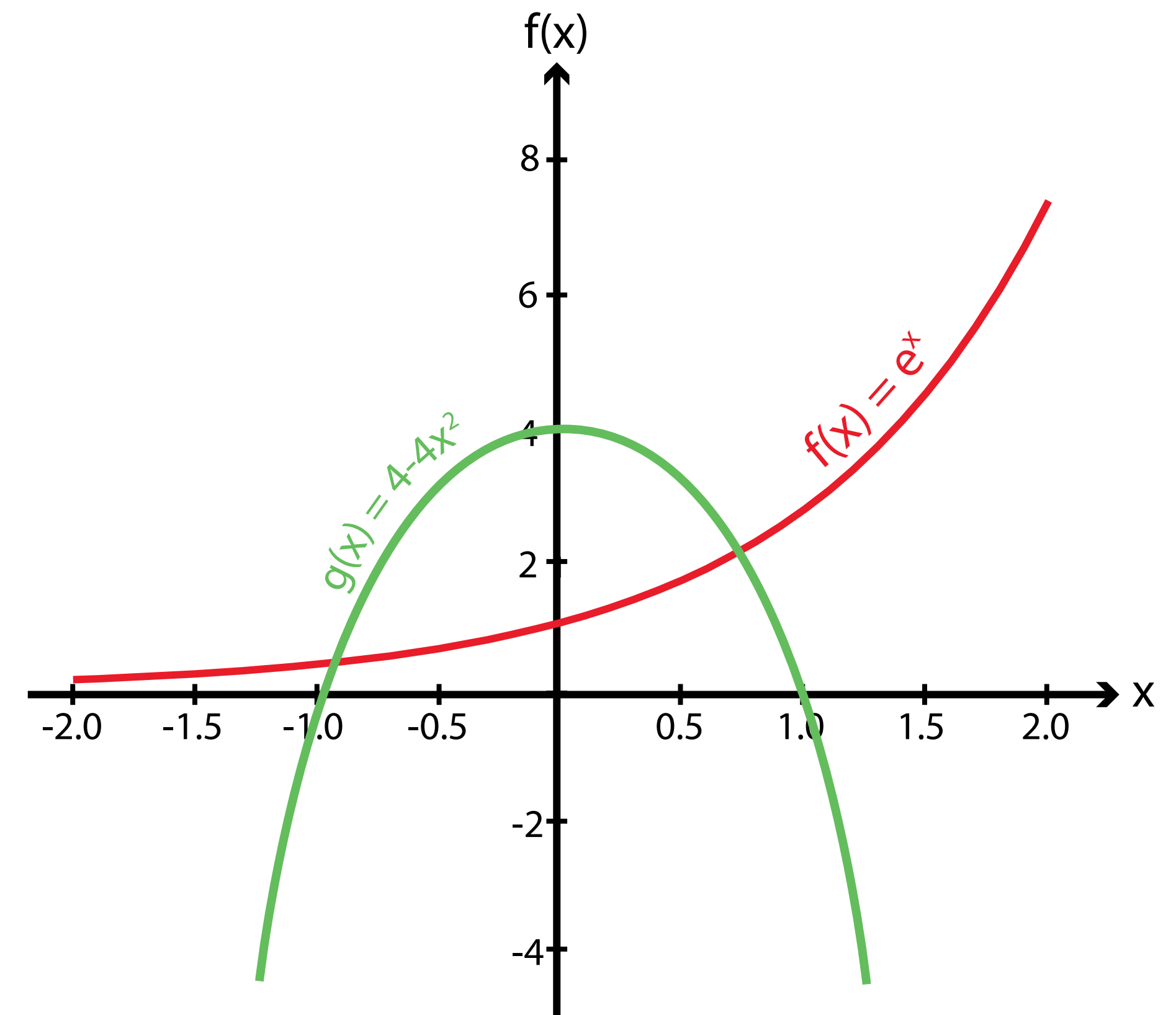
# Monotonie

Eine Funktion  $f(x)$  ist genau dann monoton steigend in der Variable  $x$ , wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

wenn ich etwas größeres einsetze,  
muss mindestens gleich viel herauskommen

Eine Funktion  $f(x)$  ist genau dann streng monoton steigend in der Variable  $x$ , wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

wenn ich etwas größeres einsetze,  
muss etwas größeres herauskommen



# Monotonie

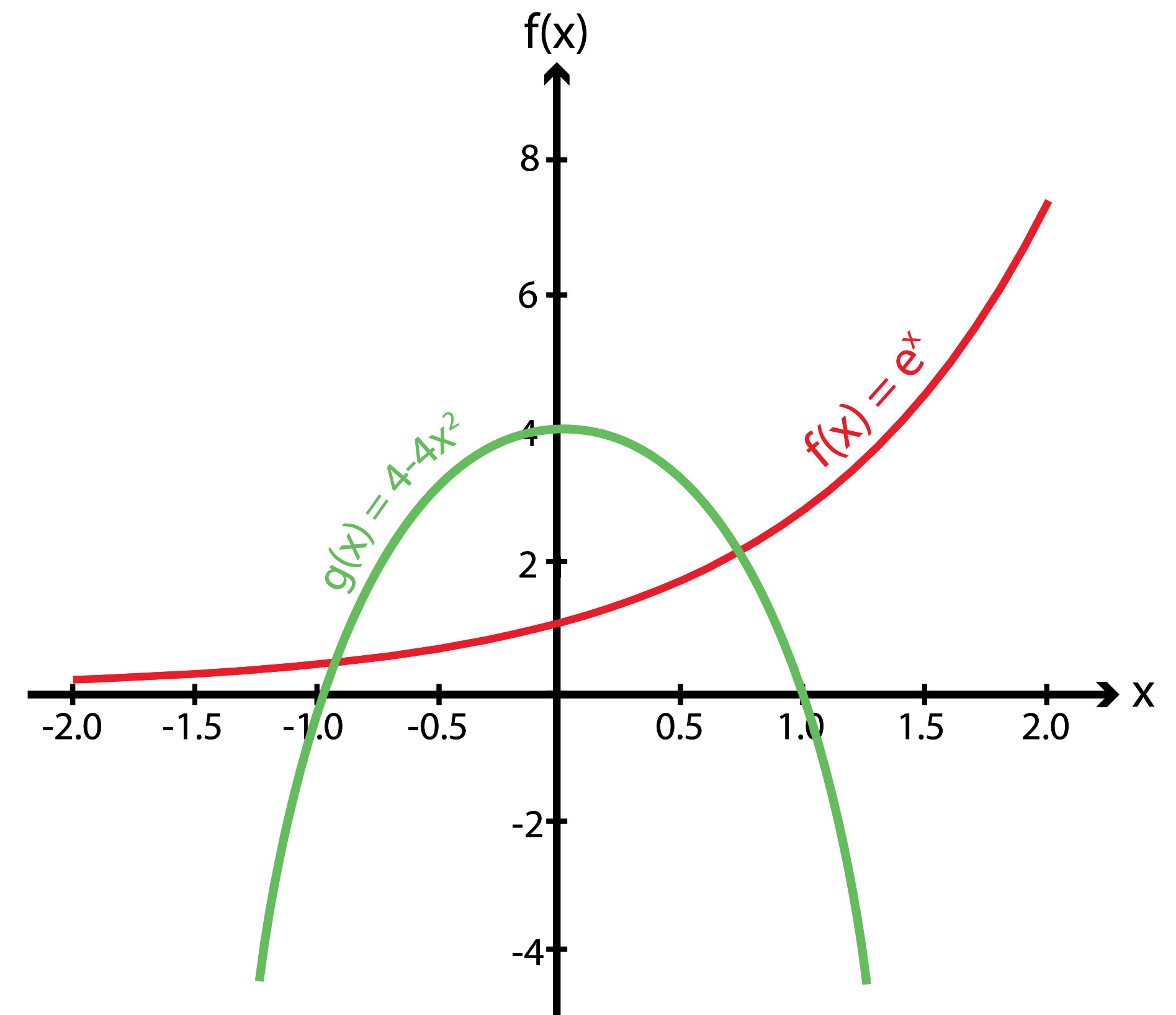
Eine Funktion  $f(x)$  ist genau dann monoton steigend in der Variable  $x$  im Intervall  $I$ , wenn gilt:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

Eine Funktion  $f(x)$  ist genau dann streng monoton steigend in der Variable  $x$  im Intervall  $I$ , wenn gilt:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$$

Die Begriffe monoton fallend und streng monoton fallend sind analog dazu mit definiert.



Untersuche die folgenden Funktionen auf Monotonie und Konvexität

$$f(x) = 4 - 4x^2$$

$$g(x) = e^x$$

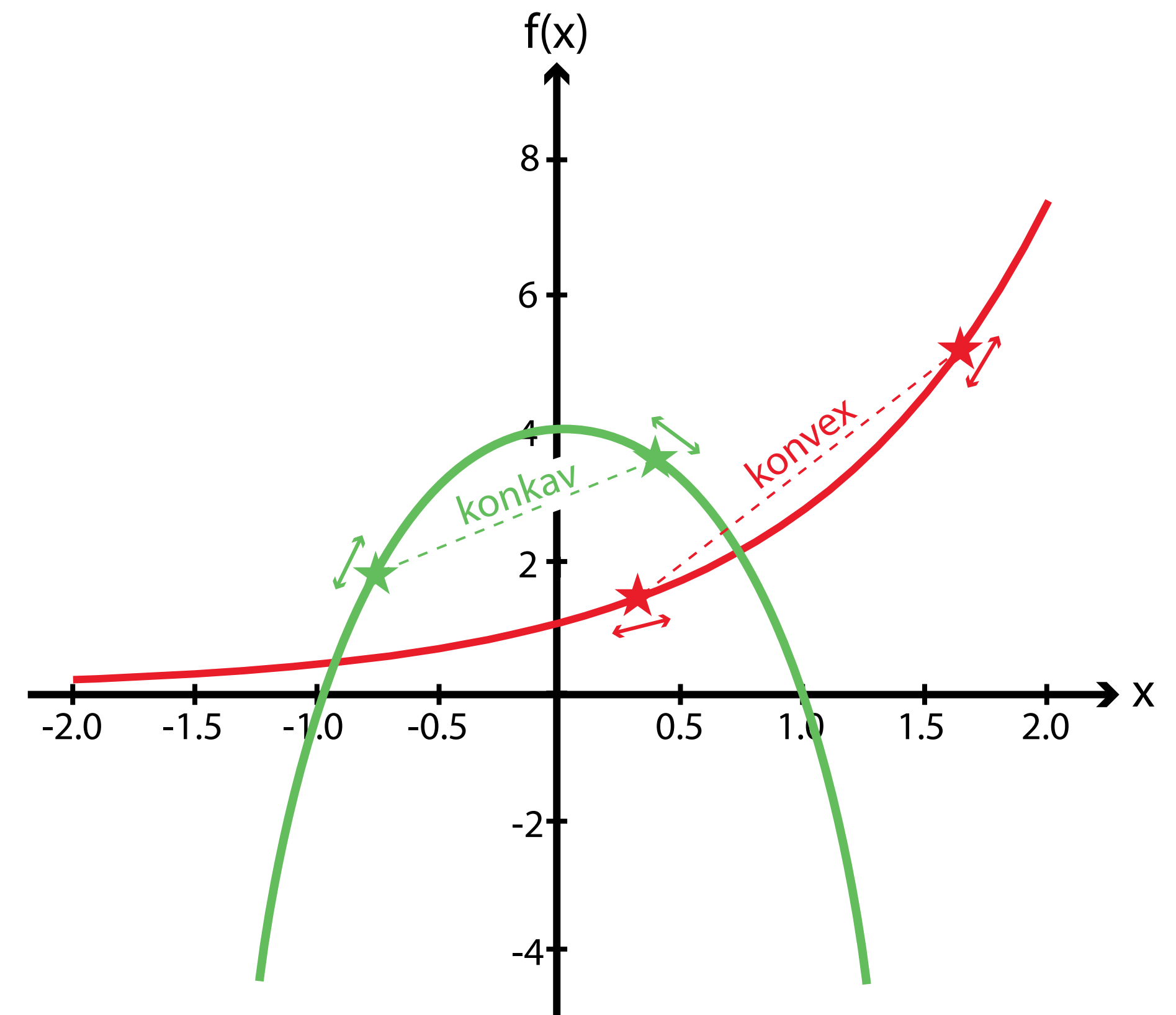
$$h(x) = \ln(x^2)$$

# Konvexität

Seien  $x_1, x_2$  zwei beliebige Stellen für die  $f(x)$  definiert ist.

Eine Funktion  $f(x)$  ist genau dann konvex, wenn die Verbindung zwischen den Punkten  $(x_1, f(x_1))$  und  $(x_2, f(x_2))$  immer über dem Kurvenverlauf liegt.

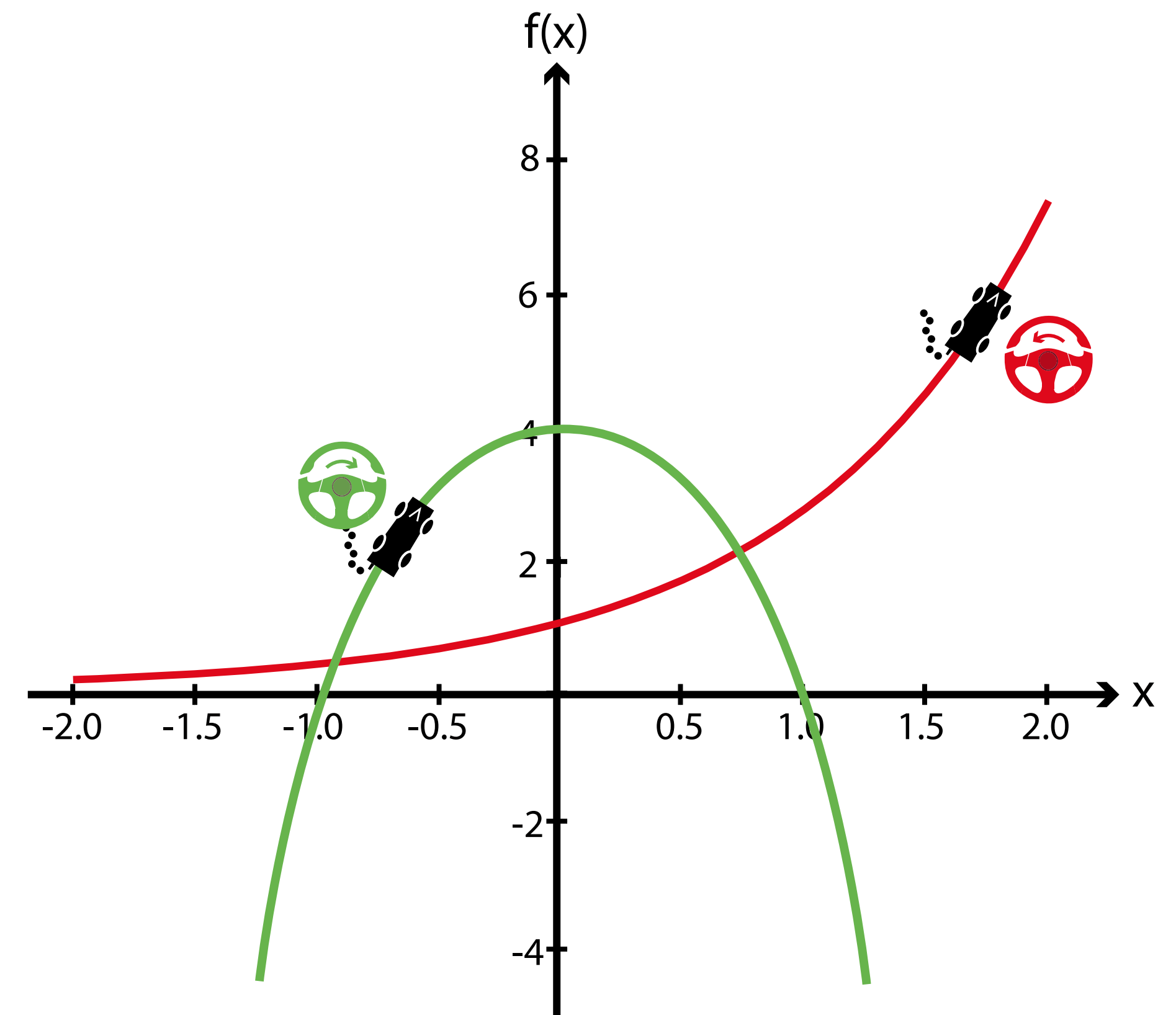
Eine Funktion  $f(x)$  ist genau dann konkav, wenn die Verbindung zwischen den Punkten  $(x_1, f(x_1))$  und  $(x_2, f(x_2))$  immer unter dem Kurvenverlauf liegt.



# Konvexität

Eine Funktion  $f(x)$  ist genau dann konvex auf einem Intervall  $I$ , wenn ein "Fahrzeug" dort nach links lenken müsste um auf der Kurve zu bleiben.

Eine Funktion  $f(x)$  ist genau dann konkav auf einem Intervall  $I$ , wenn ein "Fahrzeug" dort nach rechts lenken müsste um auf der Kurve zu bleiben.



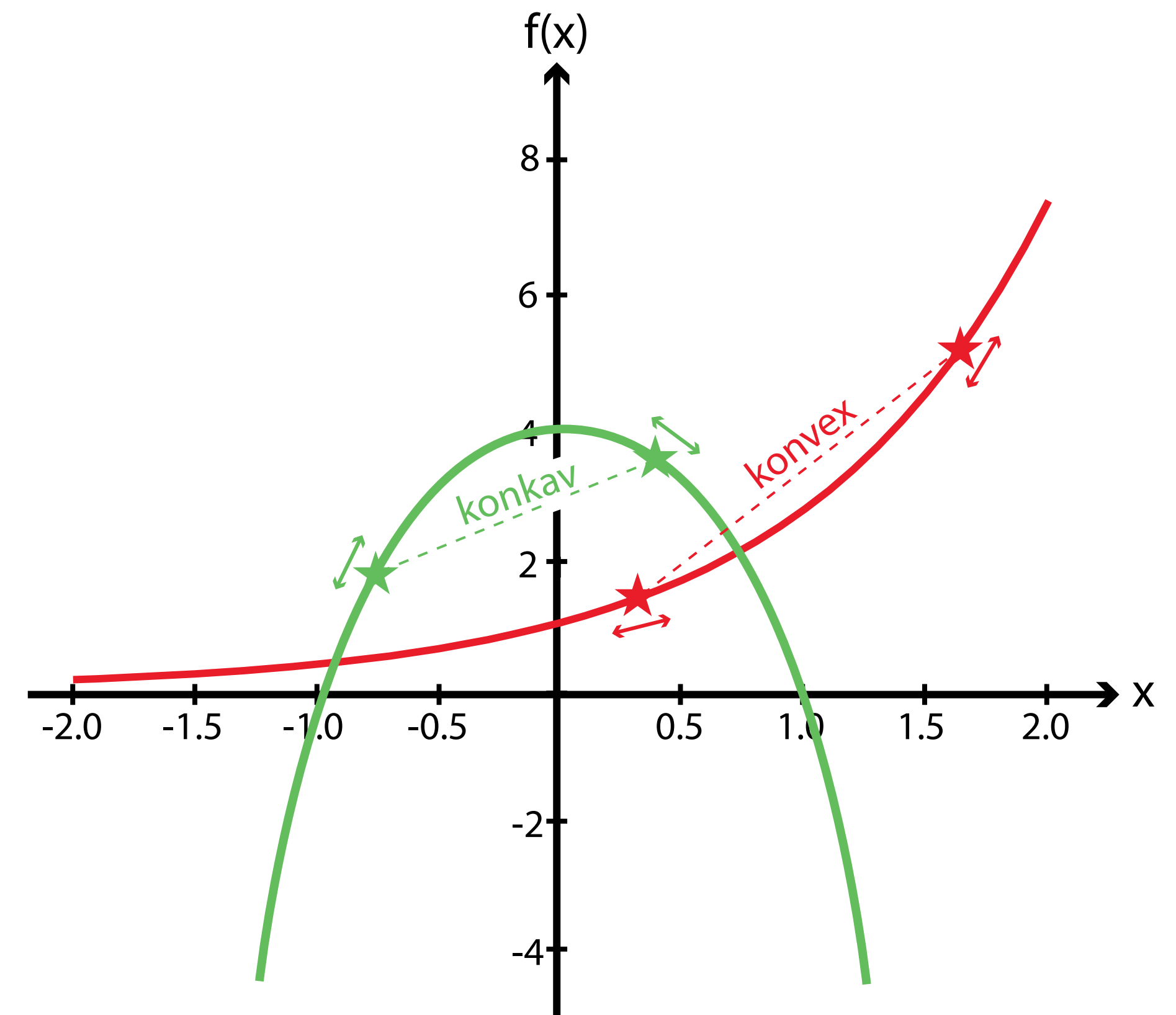
# Konvexität

Eine Funktion  $f(x)$  ist dann konvex in der Variable  $x$  im Intervall  $I$ , wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

Eine Funktion  $f(x)$  ist dann konkav in der Variable  $x$  im Intervall  $I$ , wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$$



Untersuche die folgenden Funktionen auf Monotonie und Konvexität

$$f(x) = 4 - 4x^2$$

$$g(x) = e^x$$

$$h(x) = \ln(x^2)$$