Tutorium Generale

Wirtschaftsmathematik

Einheit V

In der "Analysis II" erweitern wir den ersten Teil der Analysis um:

Funktionen mit mehreren Variablen, dem damit verbundenen Konzept der partiellen Ableitung und dem Lagrange Verfahren.

Die Integralrechnung als Gegenstück der Differenzialrechnung.

Analysis II

- Mehrere Variablen
- Partielle Ableitungen
- Extremstellen
- Lagrangeverfahren

V

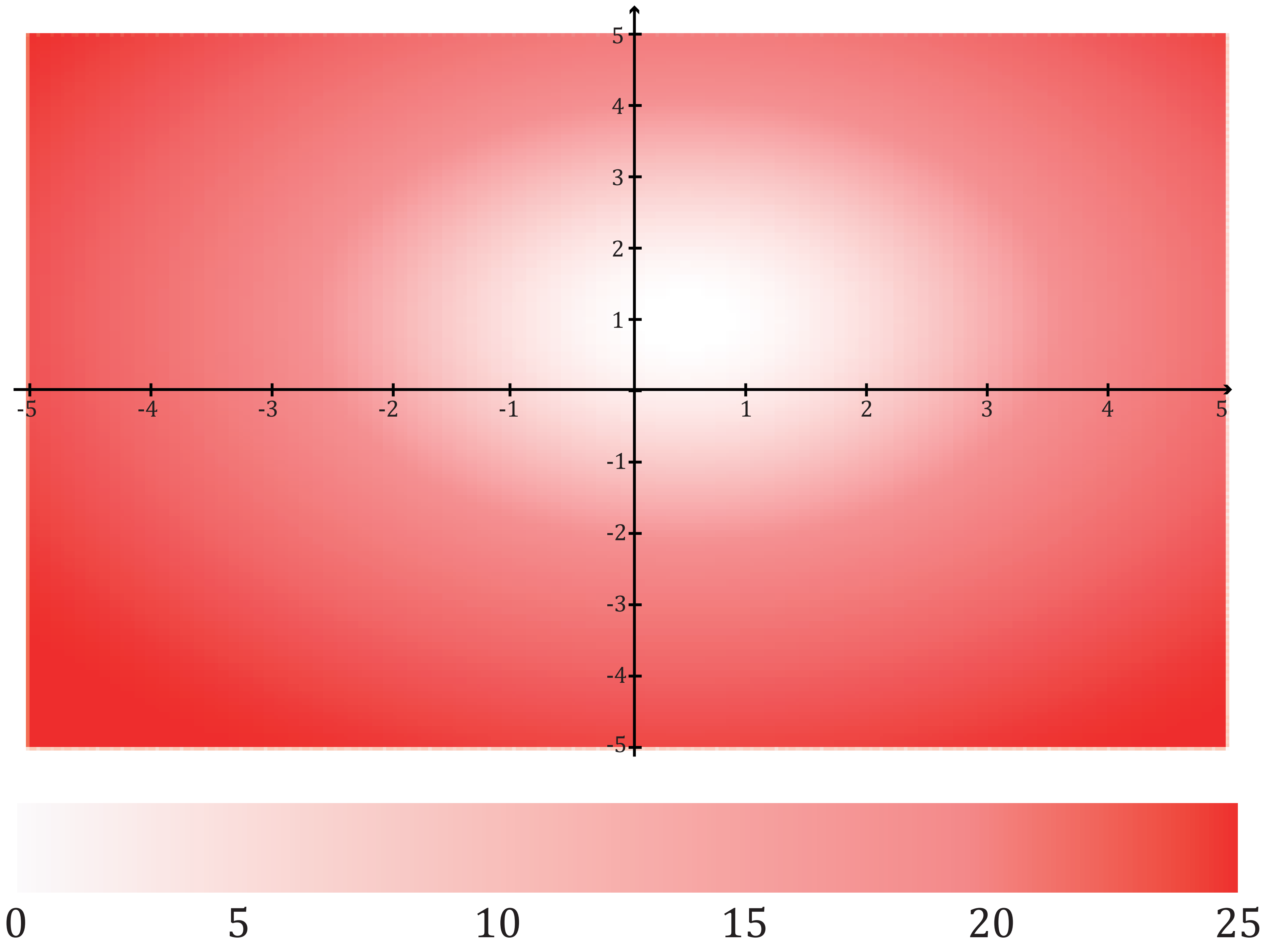
Mehrdimensionale Funktionen

Funktionen können von zwei oder mehr Variablen abhängig sein. Ein Beispiel:

$$f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20$$

Bei zwei Variablen ist die grafische Darstellung als Flächendiagramm oder als Heatmap möglich.

Ab drei Variablen lässt sich die Funktion i. d. R. nicht mehr visualisieren.



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

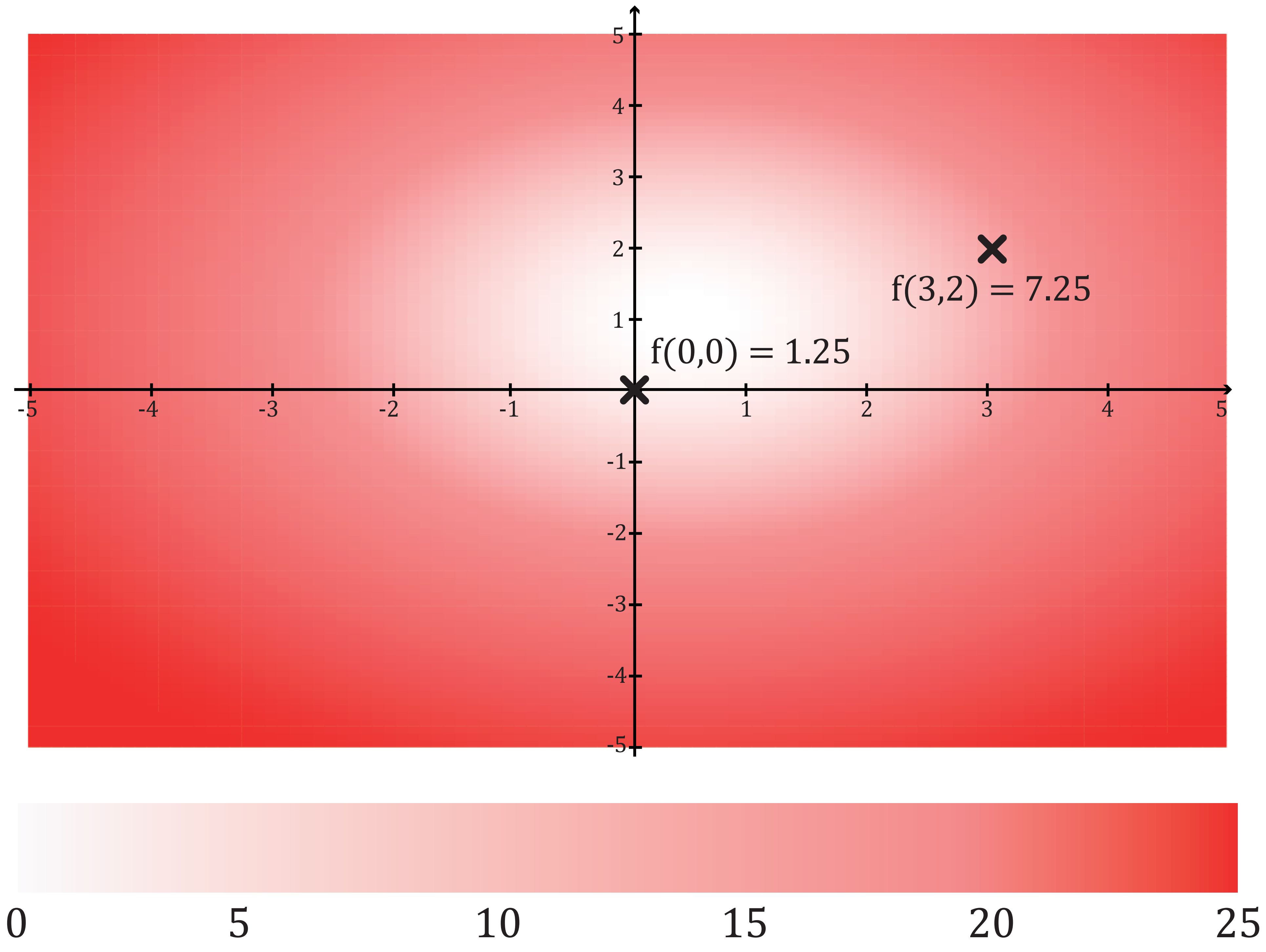
Mehrdimensionale Funktionen

Funktionswerte erhalten wir, indem wir für alle Variablen Werte einsetzen.

$$f(x,y) = x^2 - x + y^2 - 2y + 1.25$$

$$f(0,0) = 0^2 - 0 + 0^2 - 2 \cdot 0 + 1.25 = 1.25$$

$$f(3,2) = 3^2 - 3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 1.25 = 7.25$$



Mehrdimensionale Funktionen

Nullstellen von Funktionen mit mehreren Variablen finden wir durch Nullsetzen der Funktion und lösen der entstehenden Gleichung.

Häufig ist die Lösung keine Kombination von Zahlenwerten, sondern eine Gleichung, die uns sagt in welchem Verhältnis die Variablen stehen müssen.

Dieselbe Besonderheit ergibt sich bei Schnittstellen von zwei Funktionen mit mehreren Variablen.

$$f(x,y) = x^2 - y \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

$$g(x,y) = xy - 1 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$h(x,y) = x^2 + y^2 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ und } y = 0$$

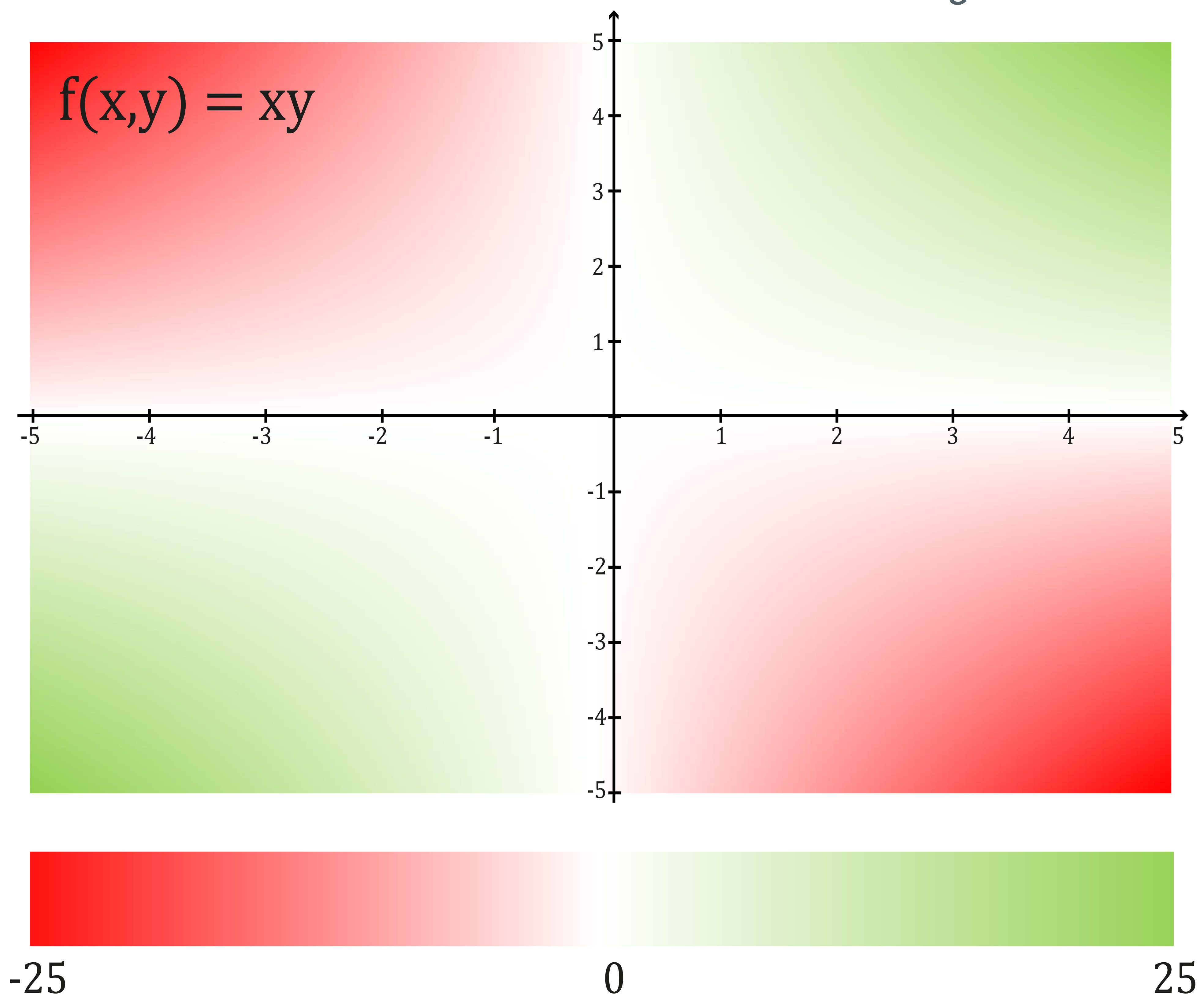
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Mehrdimensionale Funktionen

Bei Grenzwerten müssen wir nun aufpassen, welche Variable wir gegen einen bestimmten Wert bzw. unendlich laufen lassen.

Das Ergebnis des Grenzwerts kann von den Werten anderer Variablen abhängen!

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x,y) = \begin{cases} \infty & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \\ -\infty & \text{für } y < 0 \end{cases}$$



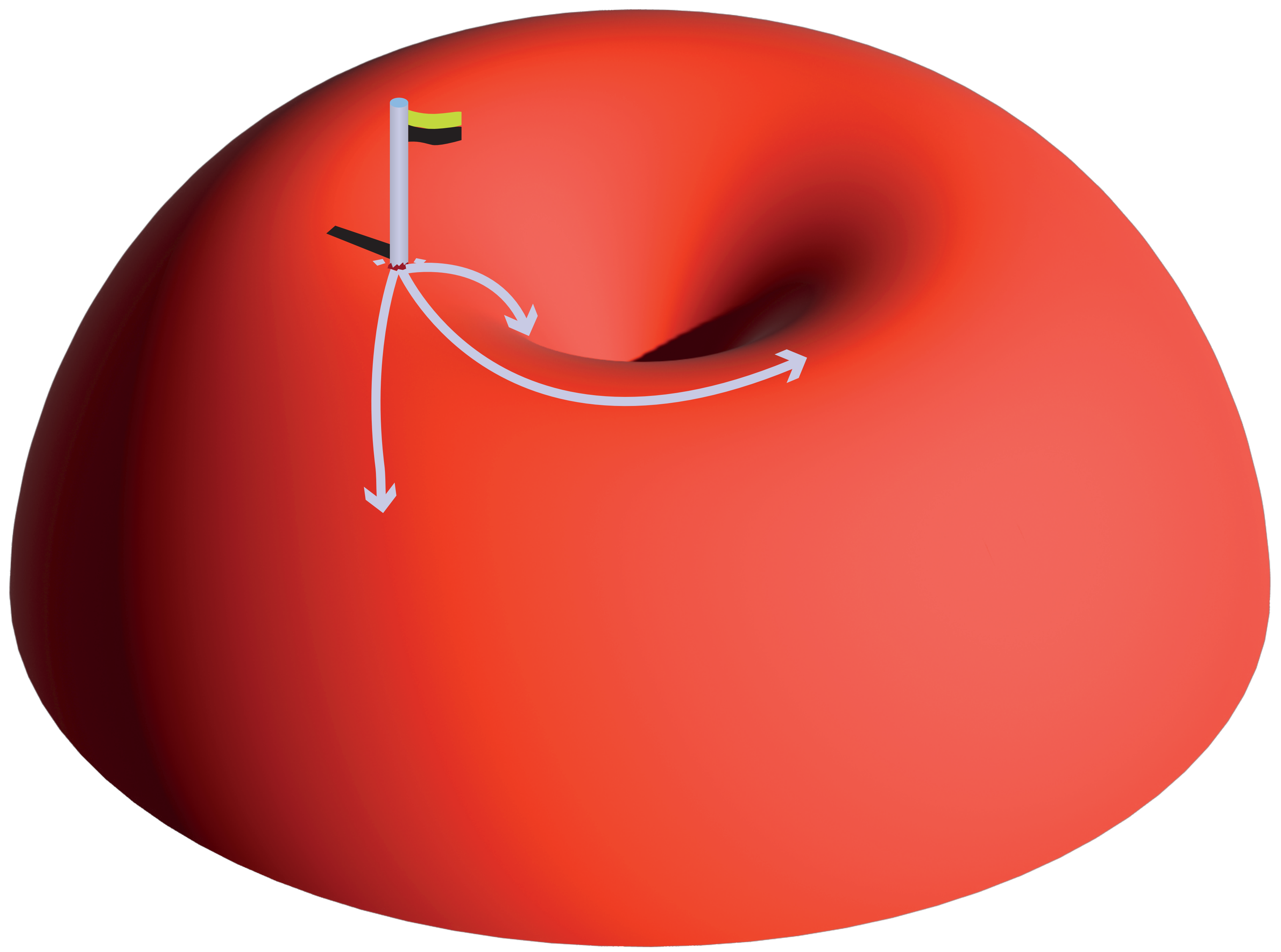
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Mehrdimensionale Funktionen

Die Ableitung einer mehrdimensionalen Funktion gibt ihre Steigung an. Betrachten wir dazu die rechts dargestellte Funktion.

Wie steil ist die Funktion an der Fahne?

- Gehen wir nach "rechts", geht es steil nach unten in das Loch.
- Gehen wir nach "vorne", ist es erst flach und wird dann steiler.
- Gehen wir im Kreis um den Krater, ist es komplett flach.



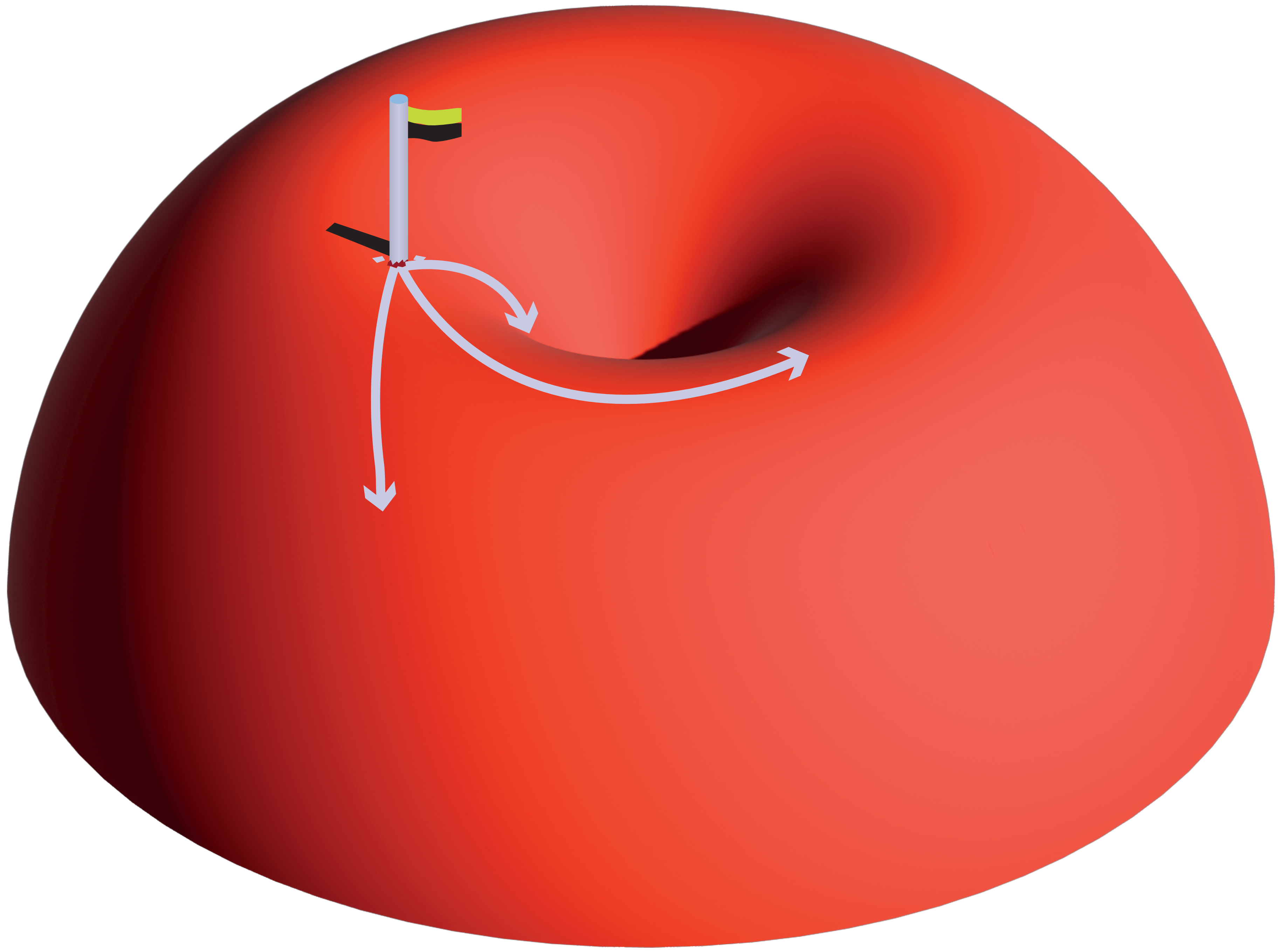
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Partielle Ableitungen

Je nachdem wie weit wir in Richtung x oder y gehen erhalten wir einen anderen Wert für die Steigung.

Sei dx die Änderung in Richtung x und dy die Änderung in Richtung y. Dann ist das totale Differenzial df definiert als:

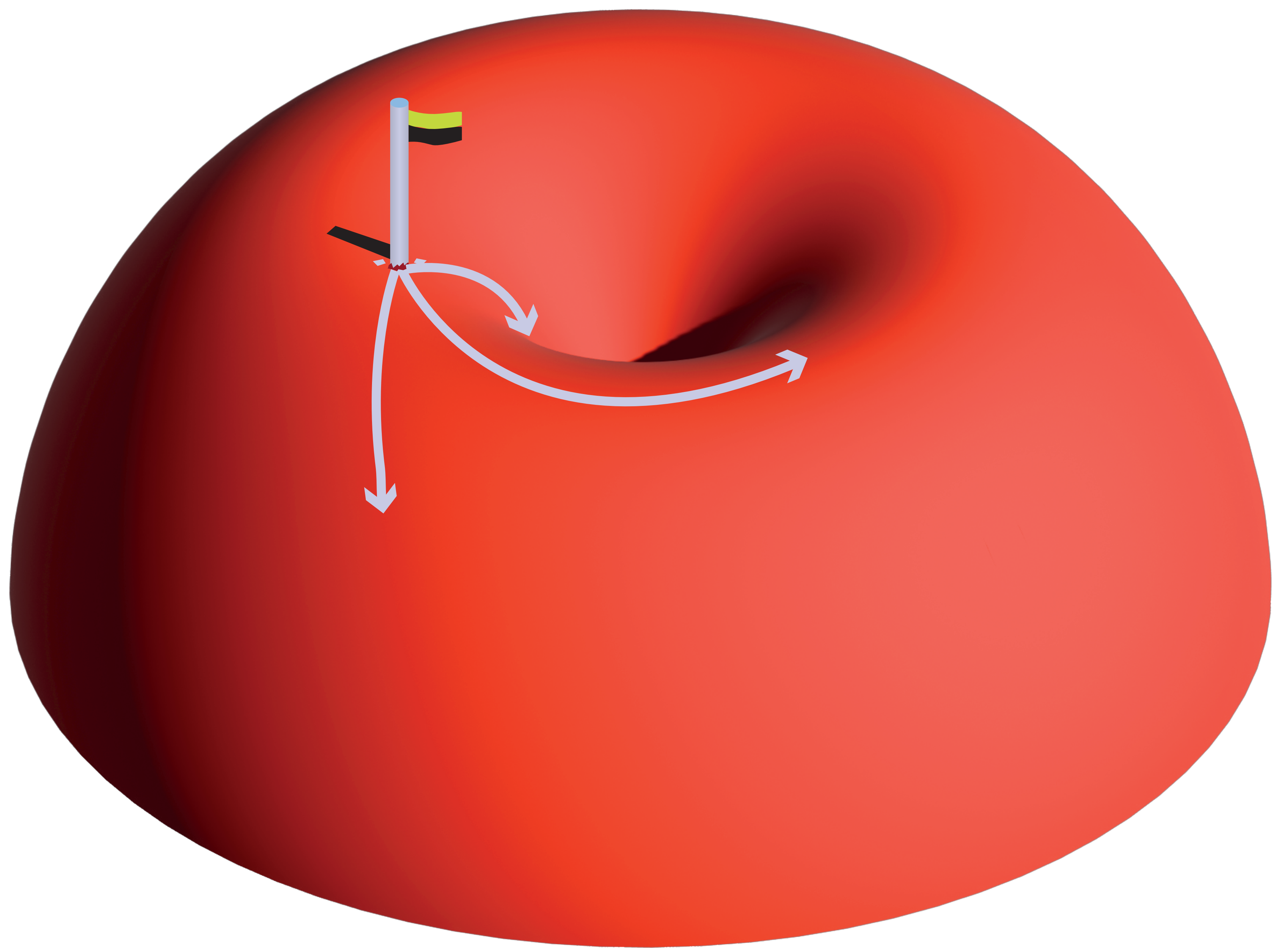
$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Partielle Ableitungen

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$



Die blau markierten Ausdrücke sind die partiellen Ableitungen der Funktion nach den Variablen x und y.

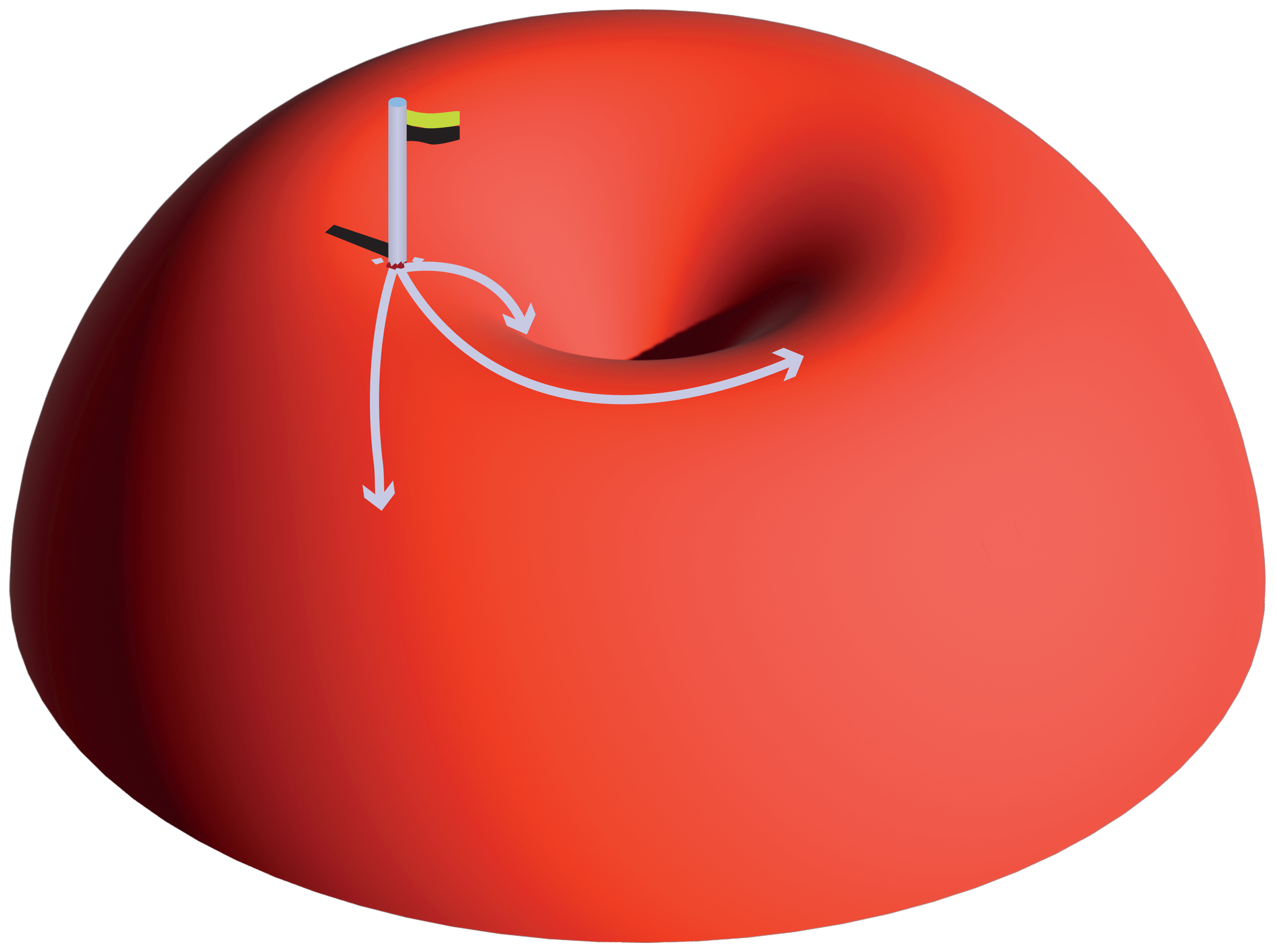
Die Rechenregeln sind dieselben wie bisher: Potenzregel, Summenregel, Produktregel usw. gelten auch partiell.

Wichtig Leiten wir partiell nach einer Variable ab, gelten alle anderen Variablen als Konstanten!

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Partielle Ableitungen

$$\mathrm{df} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{dy}$$



Die blau markierten Ausdrücke sind die partiellen Ableitungen der Funktion nach den Variablen x und y.

Die Rechenregeln sind dieselben wie bisher: Potenzregel, Summenregel, Produktregel usw. gelten auch partiell.

Wichtig Leiten wir partiell nach einer Variable ab, gelten alle anderen Variablen als Konstanten!

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Partielle Ableitungen

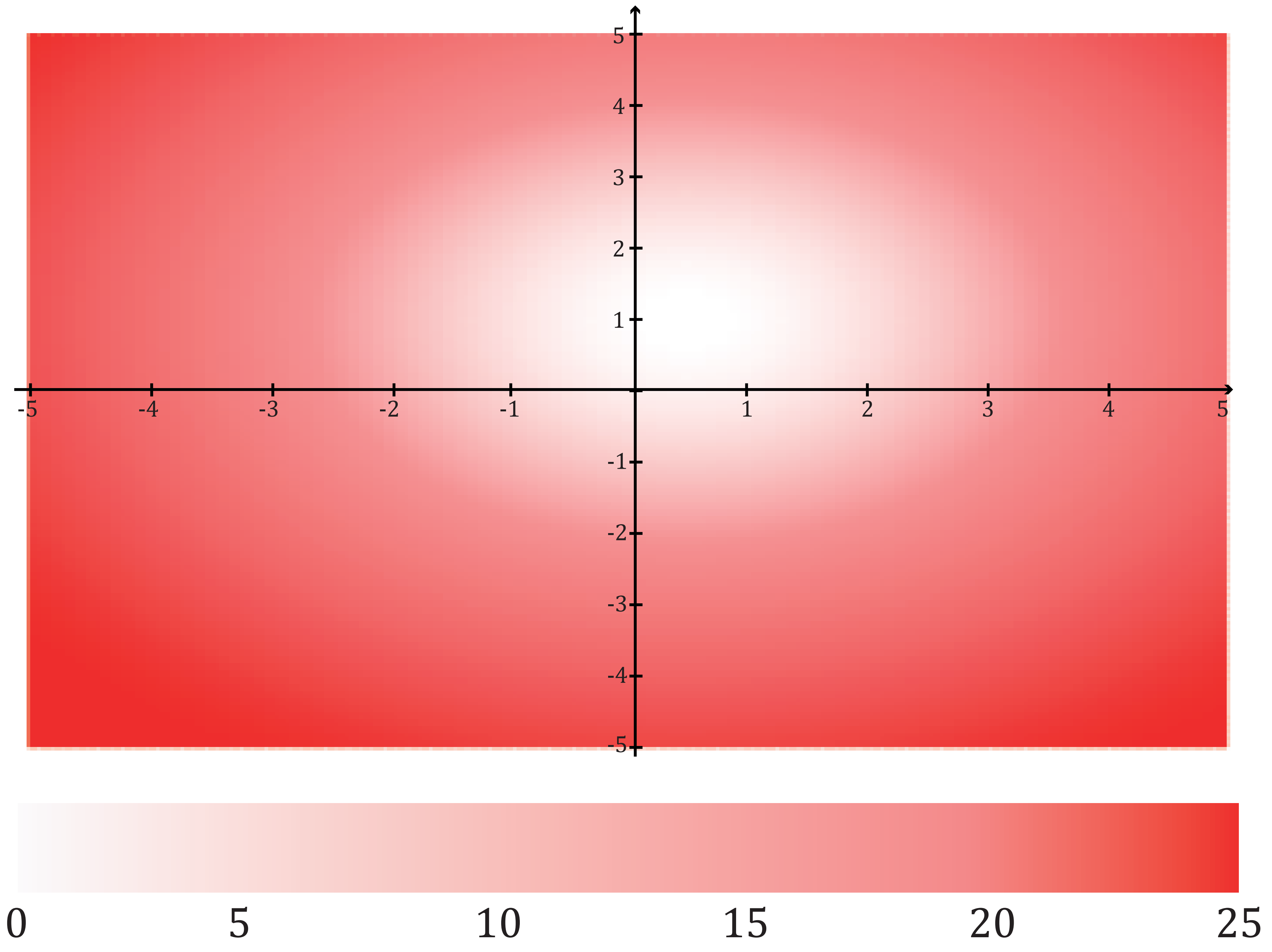
Bei der Beispielfunktion ...

$$f(x,y) = x^2 - x + y^2 - 2y + 1.25$$

...haben wir folgende partielle Ableitungen:

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$$



Berechnen Sie jeweils alle ersten partiellen Ableitungen!

$f(x,y) = x - xy^3 + x^2y$

$g(x,y) = y\sqrt{x} + \sqrt{xy}$

$h(x,y) = xy\ln(x) - xe^{y^2}$

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

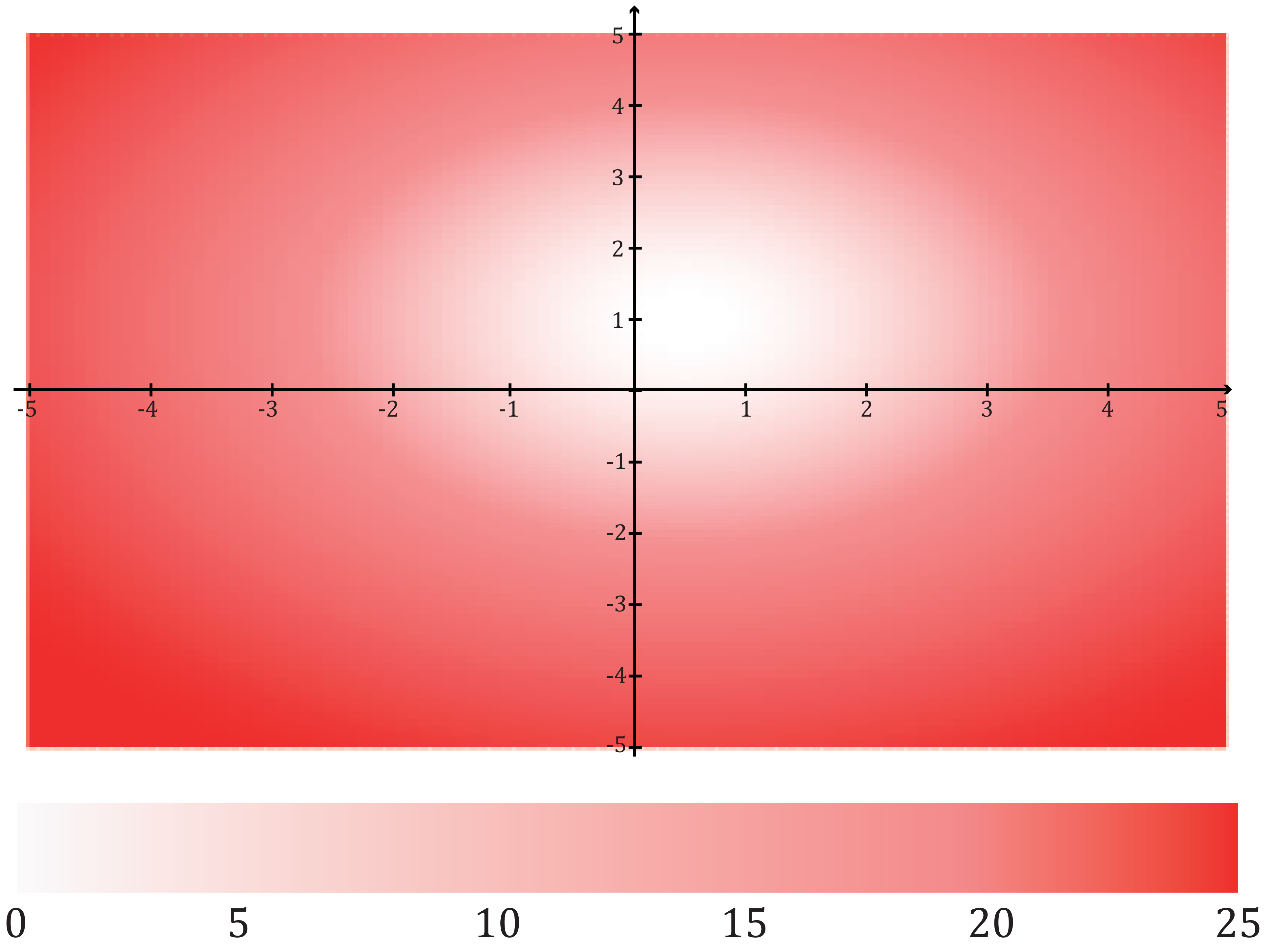
Extremstellen

Ähnlich wie bei eindimensionalen Funktionen können wir mit partiellen Ableitungen die Extremstellen von mehrdimensionalen Funktionen finden.

Notwendige Bedingung An einem Extrempunkt einer Funktion müssen die partiellen Ableitungen alle 0 sein.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 \overset{!}{=} 0 \implies x = 0.5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 \overset{!}{=} 0 \implies y = 1$$



DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Extremstellen

Die **hinreichende Bedingung** ist deutlich komplizierter als bei Funktionen mit einer Variablen. Wir müssten eine sogenannte Hessematrix aufstellen, ihre Eigenwerte berechnen und daraus auf ihre Definitheit schließen.

Wir beschränken uns daher auf die notwendige Bedingung.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(H - \lambda I) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\Rightarrow \text{H positiv definit}$$

$$\Rightarrow \text{Minimum}$$

An welchen Stellen sind die notwendigen Bedingungen für eine Extremstelle erfüllt?

$f(x,y) = x^2y^2 - xy$

$g(x,y) = x^4y^2$

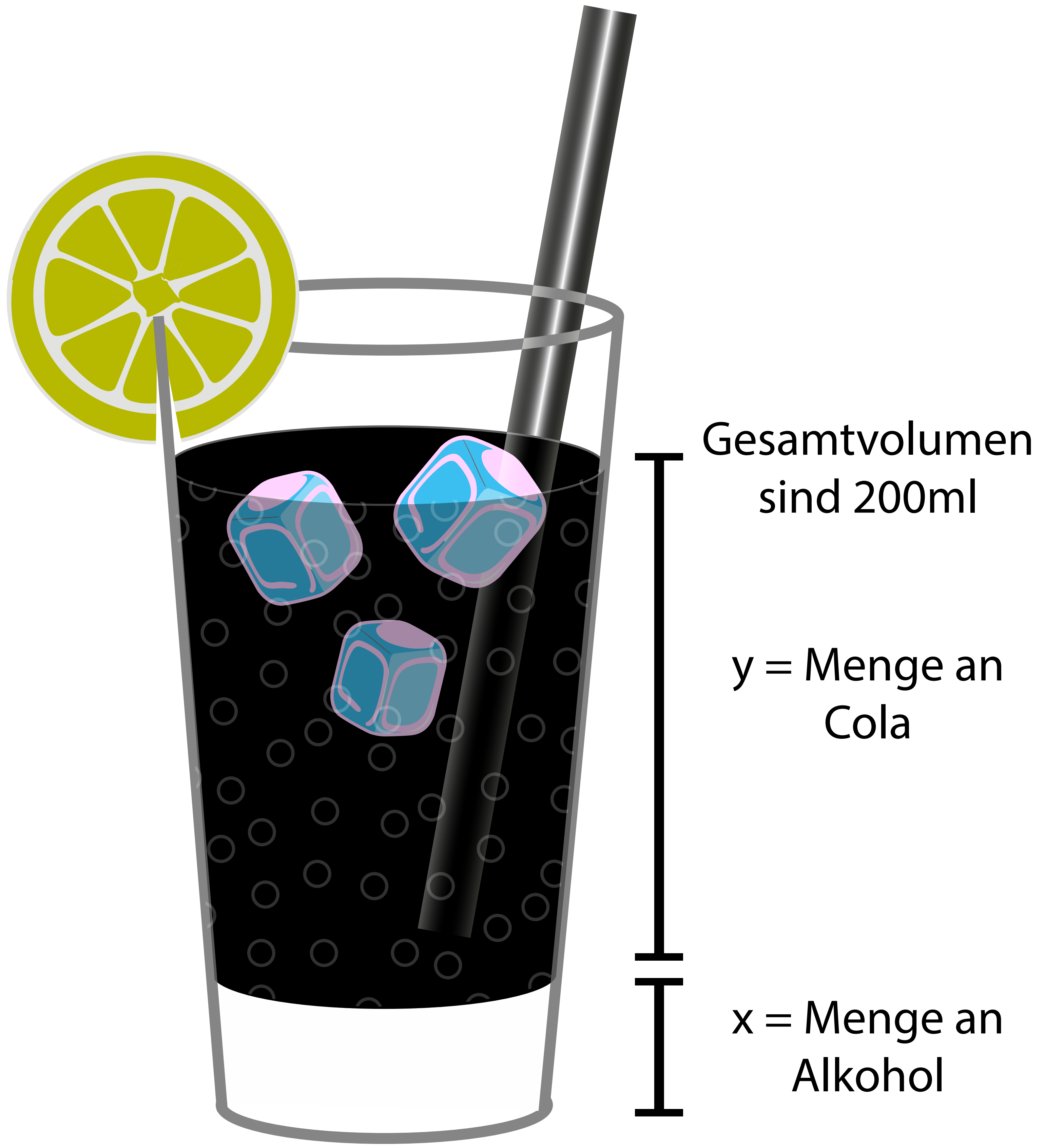
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Lagrange Verfahren

Idee Wir suchen ein Minimum/Maximum einer Funktion, wobei wir nur Stellen der Funktion berücksichtigen die bestimmte Bedingungen erfüllen.

Beispiel Ein Student möchte ein Glas Mische bestehend aus x cl Alkohol und y cl Cola trinken. Seine Nutzenfunktion wird durch $u(x,y) = xy^3$ beschrieben und in sein Glas passen 20cl.

Welche Mischung gibt ihm den höchsten Nutzen?



DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Lagrange Verfahren

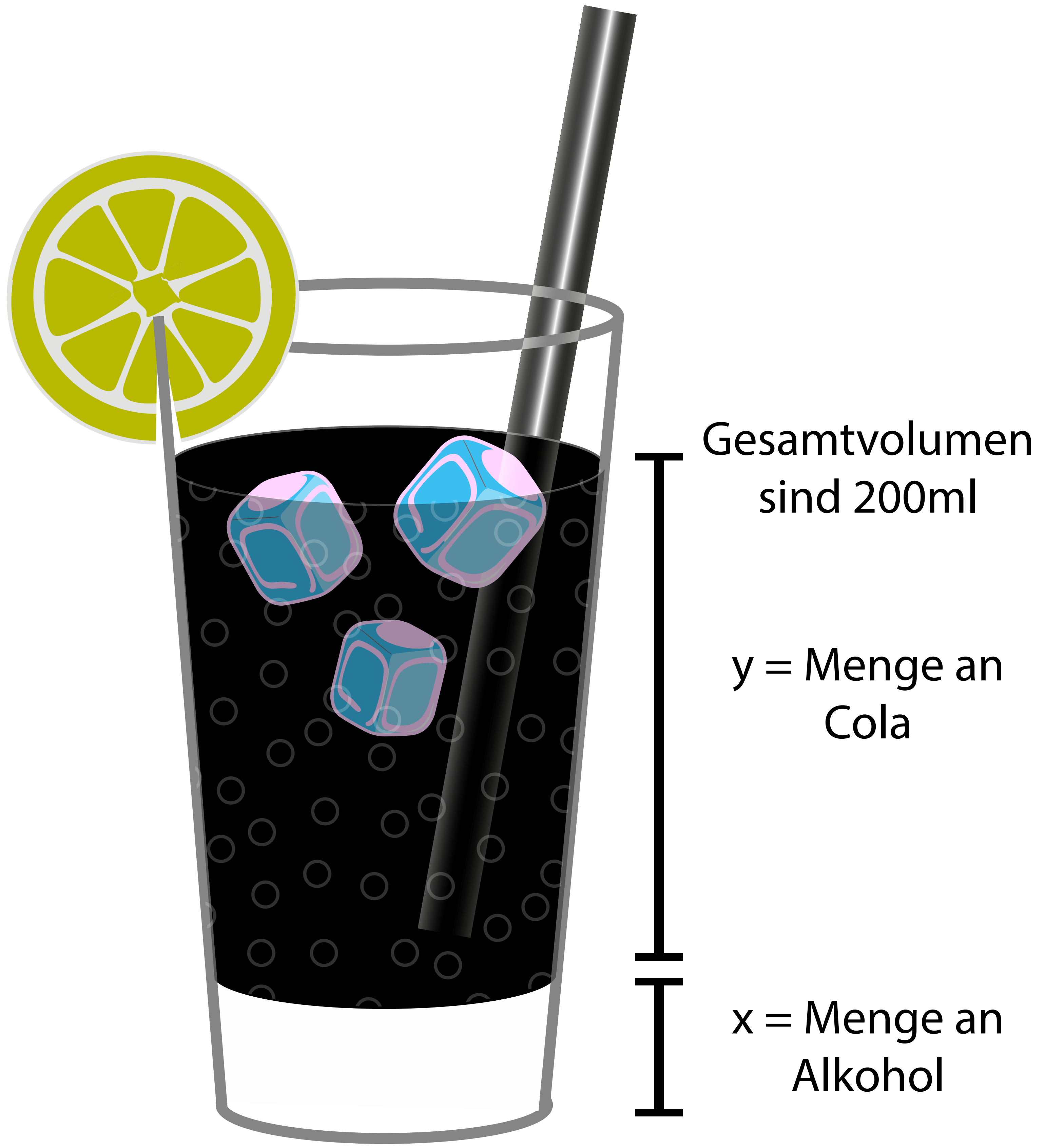
Naiver Lösungsansatz Wir berechnen die beiden partiellen Ableitungen der Nutzenfunktion und setzen diese 0.

Wir erhalten dabei aber ein Minimum. Wenn er nichts trinkt, hat er gar keinen Nutzen. Warum finden wir kein Maximum?

$$f(x,y) = xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3xy^2 \stackrel{!}{=} 0 \implies x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^3 \stackrel{!}{=} 0 \implies y = 0$$



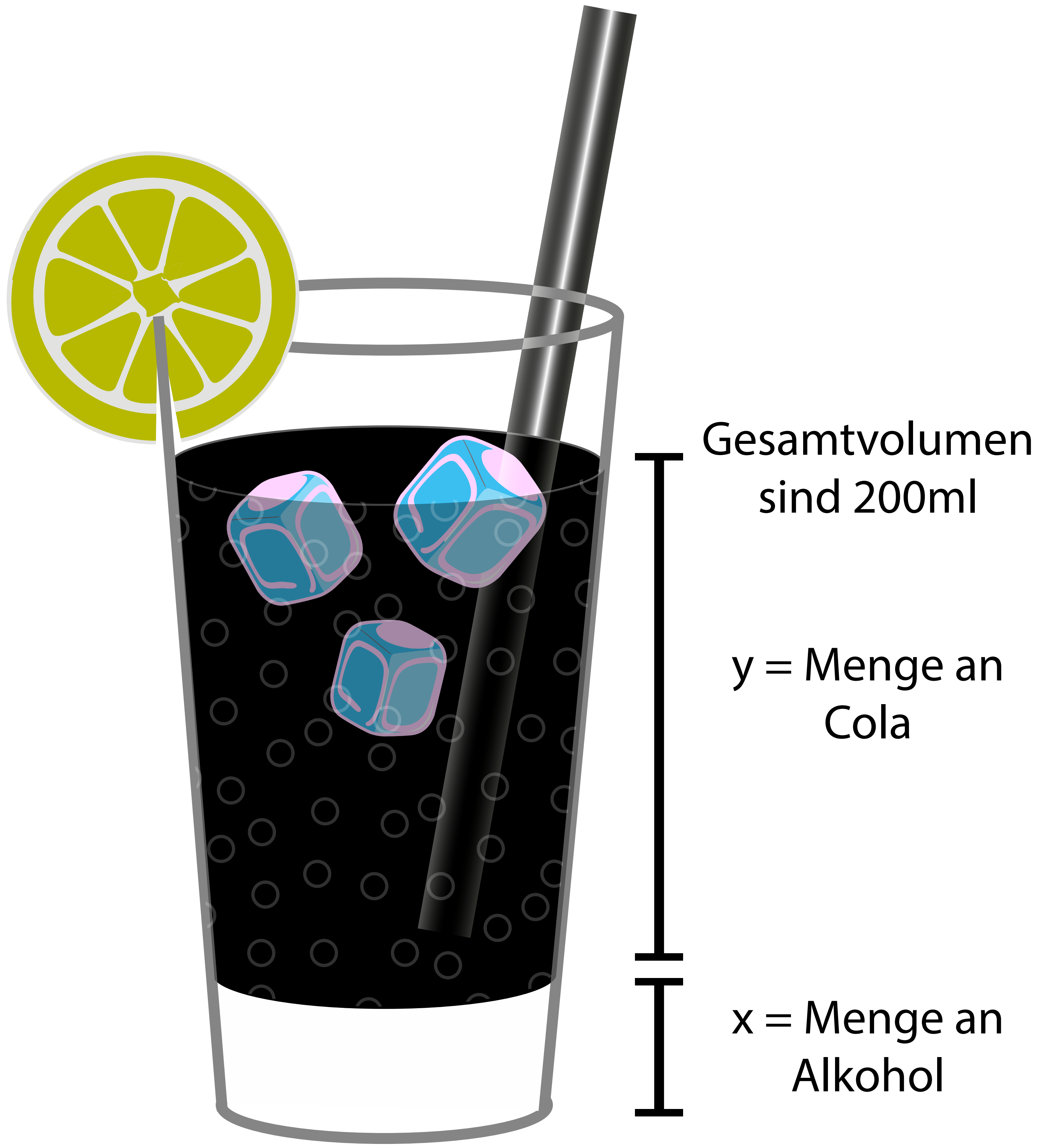
DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Lagrange Verfahren

Die Funktion u(x,y) weiß nichts von der Bedingung, dass nur 20 cl in das Glas passen.

Bei den partiellen Ableitungen wird diese Bedingung folglich auch nicht berücksichtigt und daher kann es auch kein Maximum geben.

Ohne Berücksichtigung der Bedingung kann der Student theoretisch immer noch mehr und noch mehr von beiden Flüssigkeiten in sein Glas gießen.



DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Lagrange Verfahren

Mit dem Lagrange Verfahren können wir die Zielfunktion, die wir maximieren/minimieren möchten mit einer Nebenbedingung verknüpfen.

Suche das Maximum/Minimum einer Funktion, gegeben dieser Einschränkung!

Wir durchlaufen dabei die rechts gezeigten Schritte!

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda"

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

Lagrange Verfahren

Die ersten beiden haben wir in Gedanken bereits mit der Aufgabenstellung abgearbeitet. Wir müssen sie nur noch mathematisch notieren:

$$\begin{array}{ll} \max & f(x,y) = xy^3 \\ \text{s.t.} & x + y \leq 20 \end{array}$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda“

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Lagrange Verfahren

Beim dritten Schritt bringen wir die 20 auf die linke Seite, damit rechts die gewünschte 0 steht.

$$\max \quad f(x,y) = xy^3$$

$$\text{s.t.} \quad x + y \leq 20 \quad | -20$$

$$\Leftrightarrow \quad x + y - 20 \leq 0$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda“

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Lagrange Verfahren

Beim vierten Schritt multiplizieren wir beide Seiten der Nebenbedingung mit dem griechischen Buchstaben "Lambda". Da rechts eine Null steht, ändert sich dort nicht.

$$\max \quad f(x,y) = xy^3$$

$$\text{s.t.} \quad x + y \leq 20 \quad | -20$$

$$\Leftrightarrow \quad x + y - 20 \leq 0 \quad | \cdot\lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda(x + y - 20) \leq 0$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda"

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Lagrange Verfahren

Jetzt addieren wir den Term auf der linken Seite auf unsere Zielfunktion. Dadurch entsteht die sogenannte Lagrangefunktion, in der die Nebenbedingung berücksichtigt wird!

$$
\begin{array}{lll}
\max & f(x,y) = xy^3 & \\
\text{s.t.} & x + y \leq 20 & \mid -20 \\
\Leftrightarrow & x + y - 20 \leq 0 & \mid \cdot\lambda \\
\Leftrightarrow & \underbrace{\lambda(x + y - 20)} \leq 0 &
\end{array}
$$

+

$$L(x,y,\lambda) = xy^3 + \lambda(x + y - 20)$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda"

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Lagrange Verfahren

Im sechsten Schritt berechnen wir alle partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion.

$$L(x,y,\lambda) = xy^3 + \lambda(x + y - 20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y^3 + \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 3xy^2 + \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 20$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda"

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Lagrange Verfahren

Im siebten Schritt setzen wir alle partiellen Ableitungen gleich 0 und erhalten dadurch ein Gleichungssystem!

$$L(x,y,\lambda) = xy^3 + \lambda(x + y - 20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y^3 + \lambda \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 3xy^2 + \lambda \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 20 \overset{!}{=} 0$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda"

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

8. Gleichungssystem lösen

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Lagrange Verfahren

$$L(x,y,\lambda) = xy^3 + \lambda(x + y - 20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y^3 + \lambda \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 3xy^2 + \lambda \overset{!}{=} 0$$

$$y^3 + \lambda = 3xy^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow y^3 = 3xy^2$$

$$\Rightarrow y = 3x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 20 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow x + 3x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 4x = 20$$

$$\Rightarrow x = 5\,,\, y = 15$$

1. Zielfunktion (ZF) identifizieren
Was wollen wir minimieren/maximieren?

2. Nebenbedingung (NB) identifizieren
Was schränkt uns dabei ein?

3. Nebenbedingung umformen
Auf einer Seite muss 0 stehen

4. Nebenbedingung mit λ multiplizieren
Griechischer Buchstabe „Lambda“

5. Den entstehenden Term zur ZF addieren
Dadurch entsteht die Lagrangefunktion!

6. Alle partiellen Ableitungen berechnen
Inklusive dem λ

7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen
Dadurch entsteht ein Gleichungssystem

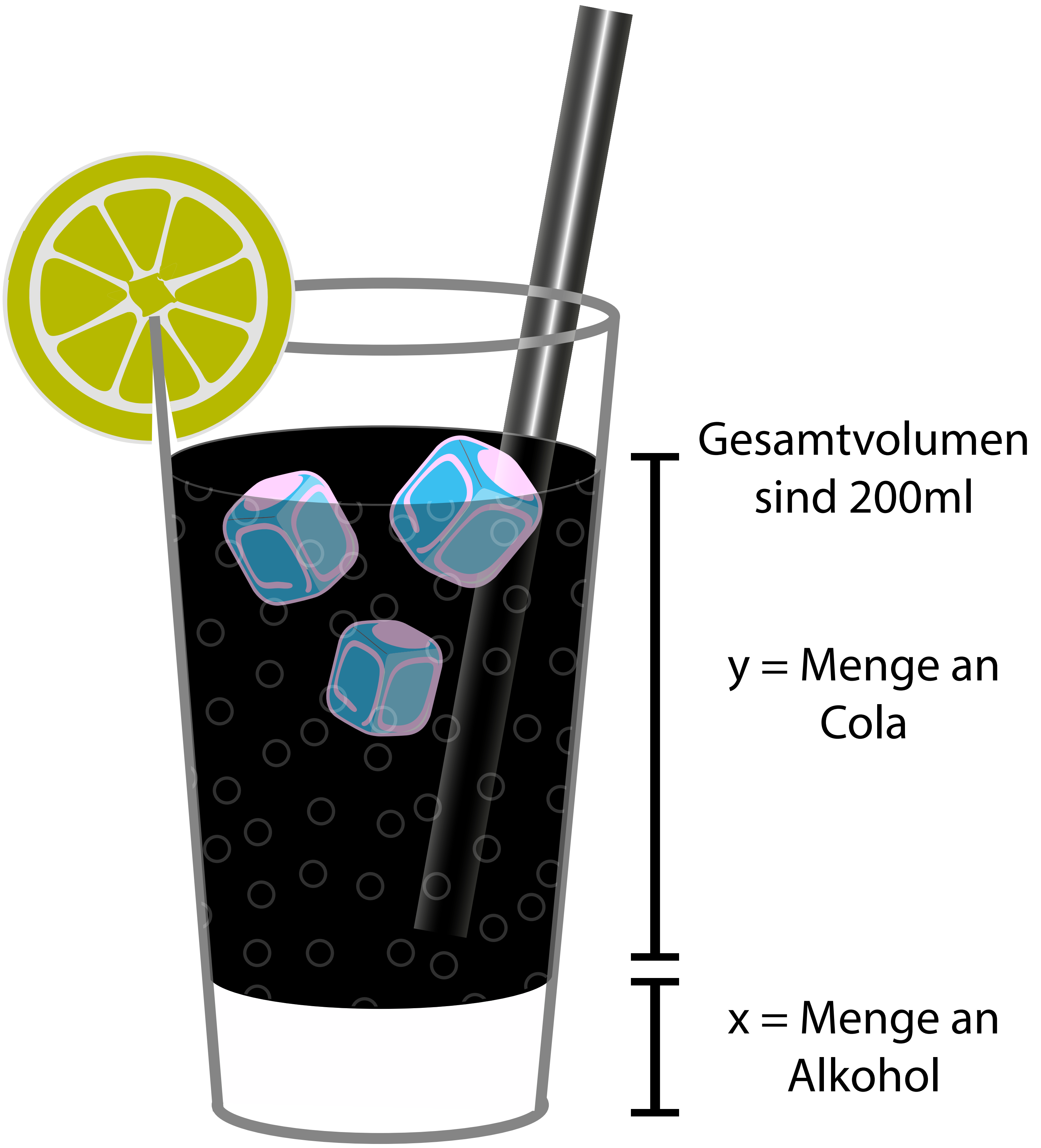
8. Gleichungssystem lösen

Lagrange Verfahren

Beispiel Ein Student möchte ein Glas Mische bestehend aus x cl Alkohol und y cl Cola trinken. Seine Nutzenfunktion wird durch $u(x,y) = xy^3$ beschrieben und in sein Glas passen 20cl.

Welche Mischung gibt ihm den höchsten Nutzen?

Unter Berücksichtigung der Nebenbedingung liegt das Nutzen-maximum bei 5cl Alkohol und 15cl Cola.



Finde das Maximum der Funktion $u(x,y) = xy$ unter der Nebenbedingung $x + 2y \leq 30$