Tutorium Generale

Wirtschaftsmathematik

Einheit VI

In der "Analysis II" erweitern wir den ersten Teil der Analysis um:

Funktionen mit mehreren Variablen, dem damit verbundenen Konzept der partiellen Ableitung und dem Lagrange Verfahren.

Die Integralrechnung als Gegenstück der Differenzialrechnung.

Analysis II

- Integralrechnung
- Stammfunktionen
- Bestimmte Integrale
- Partielle Integration
- Substitution

VI

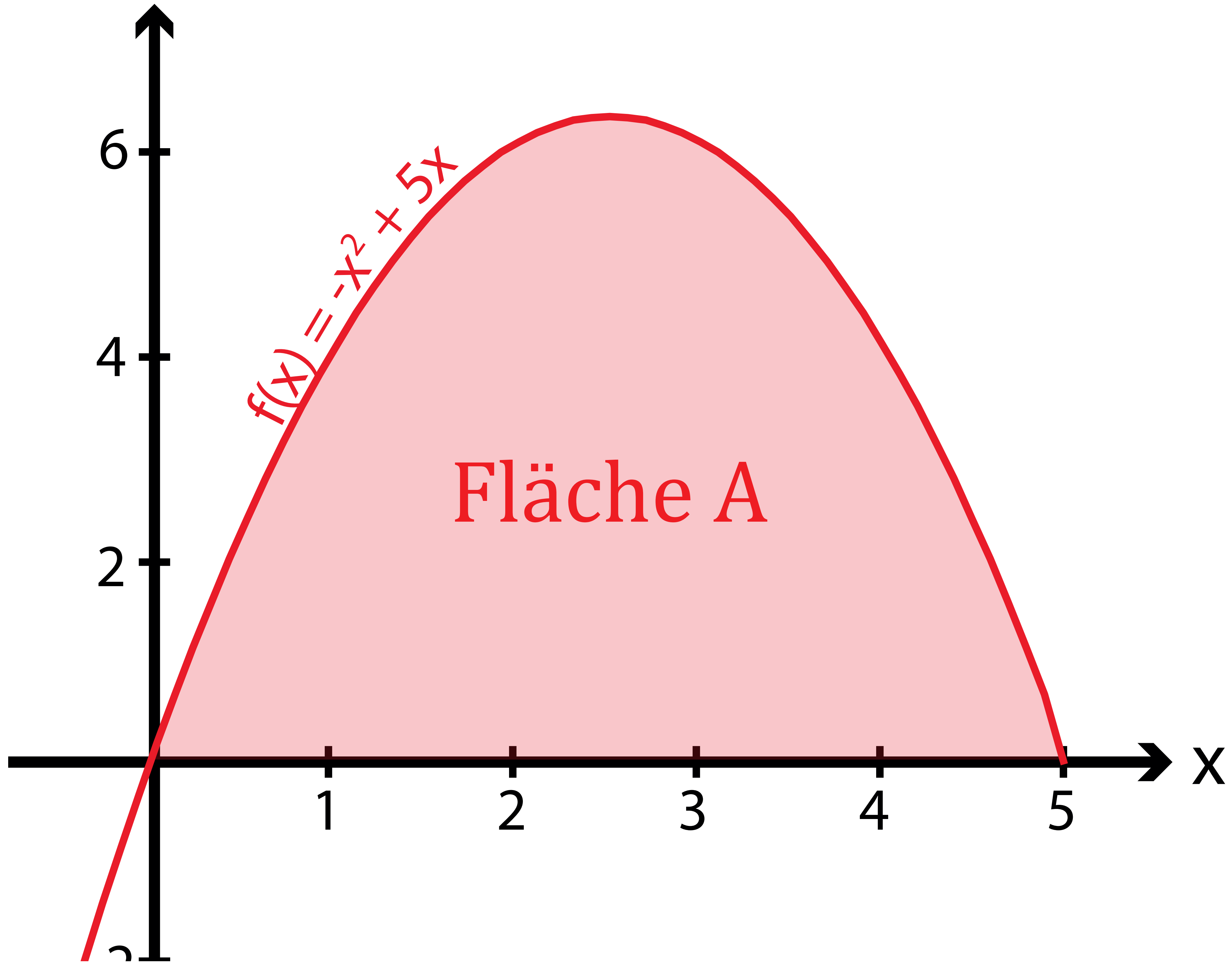
Integralrechnung

Wir wollen die Fläche unter einer Funktion berechnen.

$$f(x) = -x^2 + 5x \text{ auf dem Intervall } [0,5]$$

Wie können wir die Fläche A berechnen?

Für geometrische Formen wie Rechtecke gäbe es Formeln ...



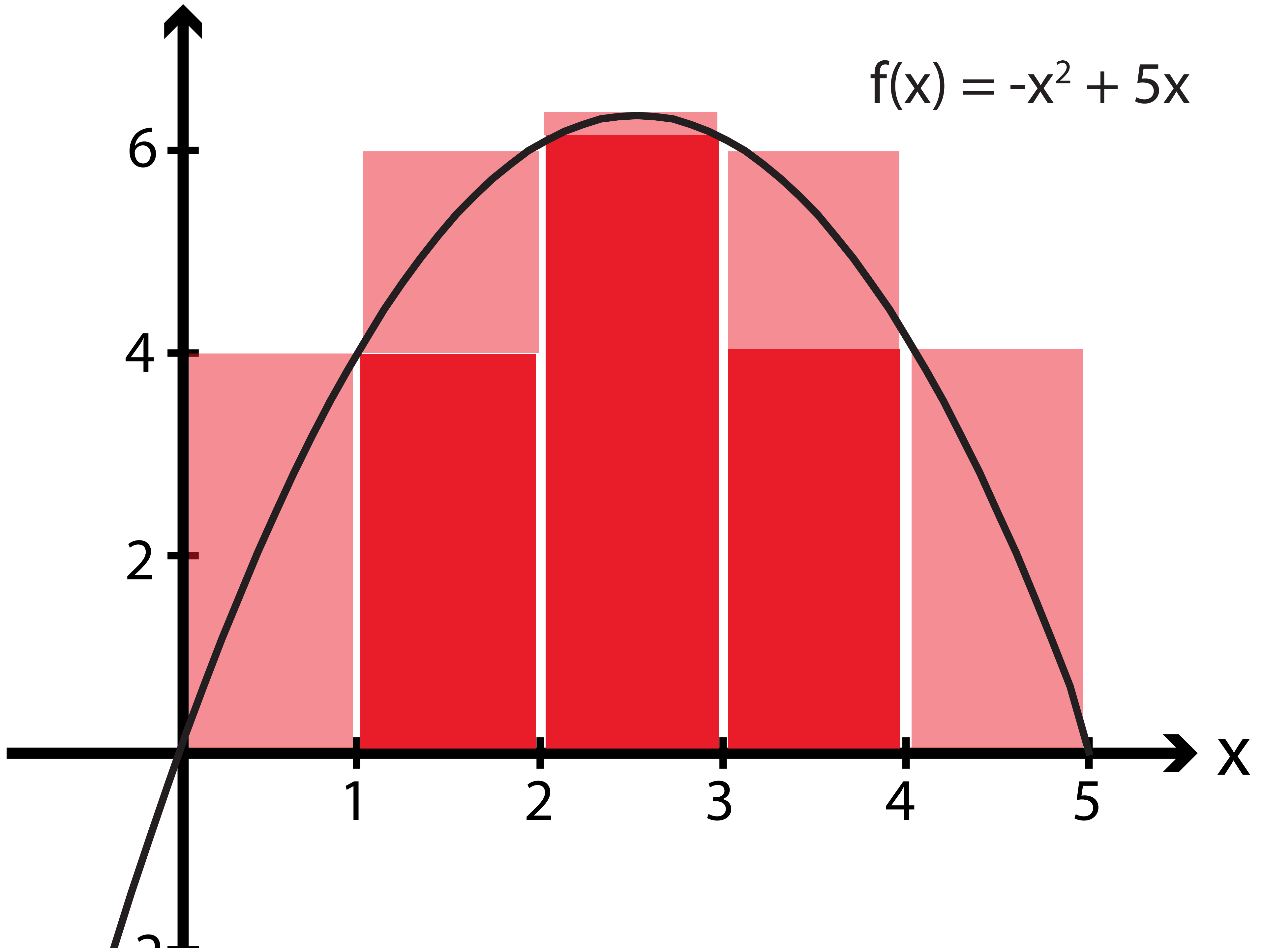
Integralrechnung

... und daher ist folgender Ansatz naheliegend: Wir teilen die Fläche in Rechtecke, auf deren Fläche wir berechnen können!

Die Breite können wir frei wählen. Wählen wir wie rechts gezeigt die Breite 1 teilen wir die Fläche in 5 Rechtecke auf.

Bei der Höhe gibt es zwei Varianten:

- Maximum der Funktion im Bereich (hell- & dunkelrote Flächen)
- Minimum der Funktion im Bereich (nur dunkelrote Flächen)



Integralrechnung

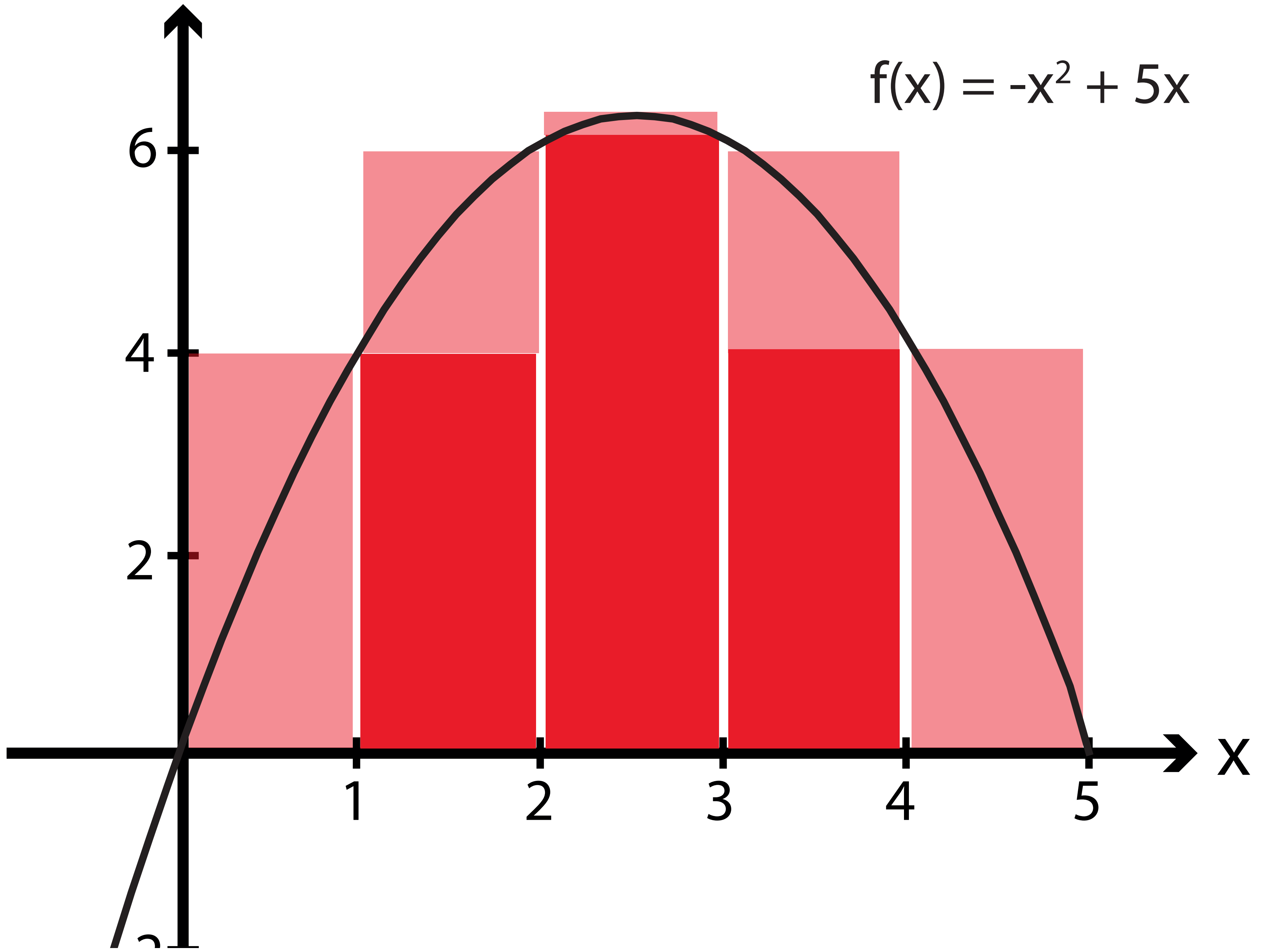
Wir erhalten die folgenden Näherungen:

$$\text{Obersumme } A \approx 4 + 6 + 6.25 + 6 + 4 = 26.25$$

$$\text{Untersumme } A \approx 0 + 4 + 6 + 4 + 0 = 14$$

Die Obersumme überschätzt die wahre Fläche tendenziell, da ihre Flächen über die Kurve hinausragen.

Die Untersumme unterschätzt die wahre Fläche tendenziell, da ihre Flächen die Kurve nicht vollständig ausfüllen.

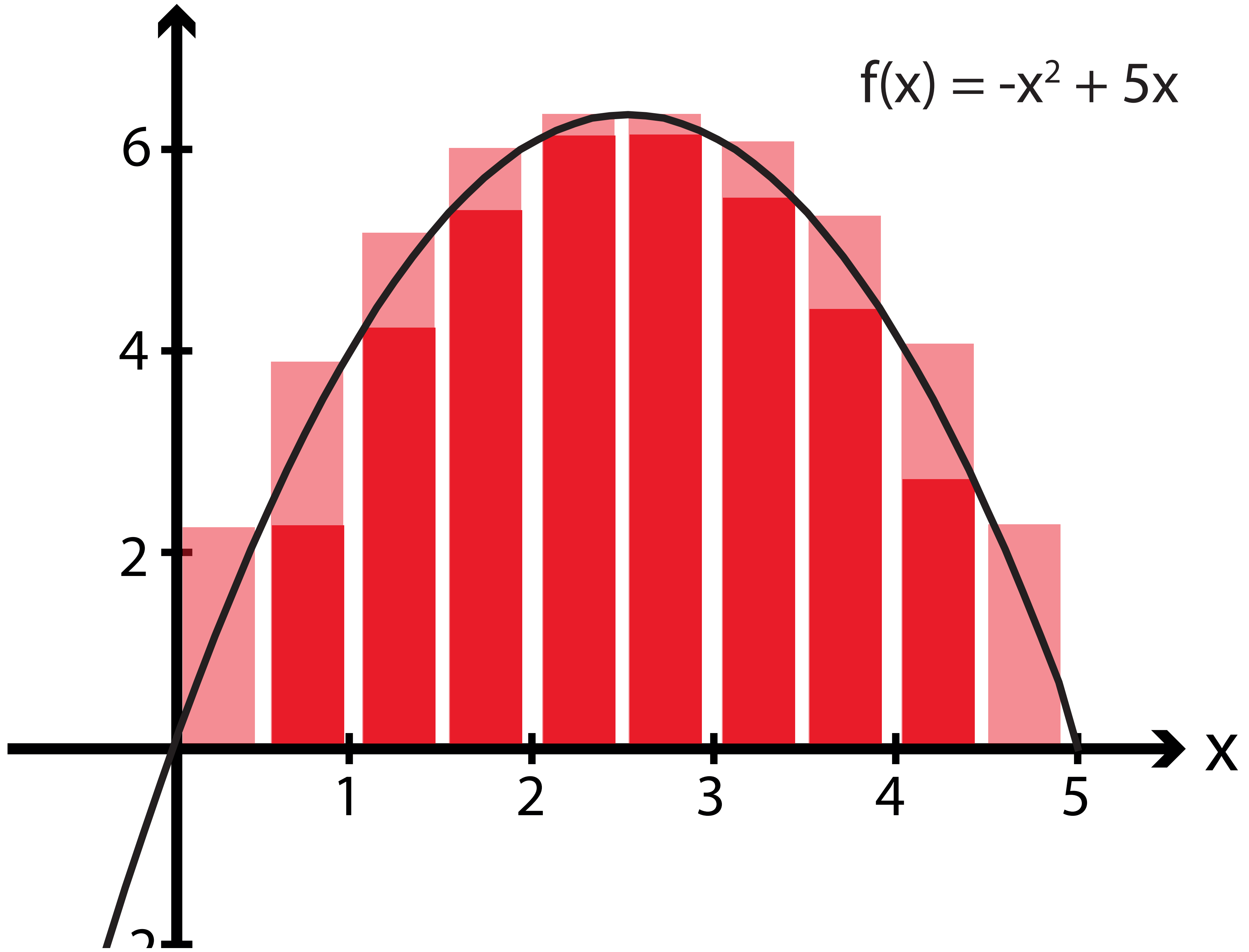


Integralrechnung

Die Näherung wird genauer, wenn wir die Breite der Rechtecke kleiner wählen.

Die Obersumme überschätzt die wahre Fläche weniger, da ihre Flächen weniger über die Kurve hinausragen.

Die Untersumme unterschätzt die wahre Fläche weniger, da ihre Flächen die Kurve vollständiger ausfüllen.



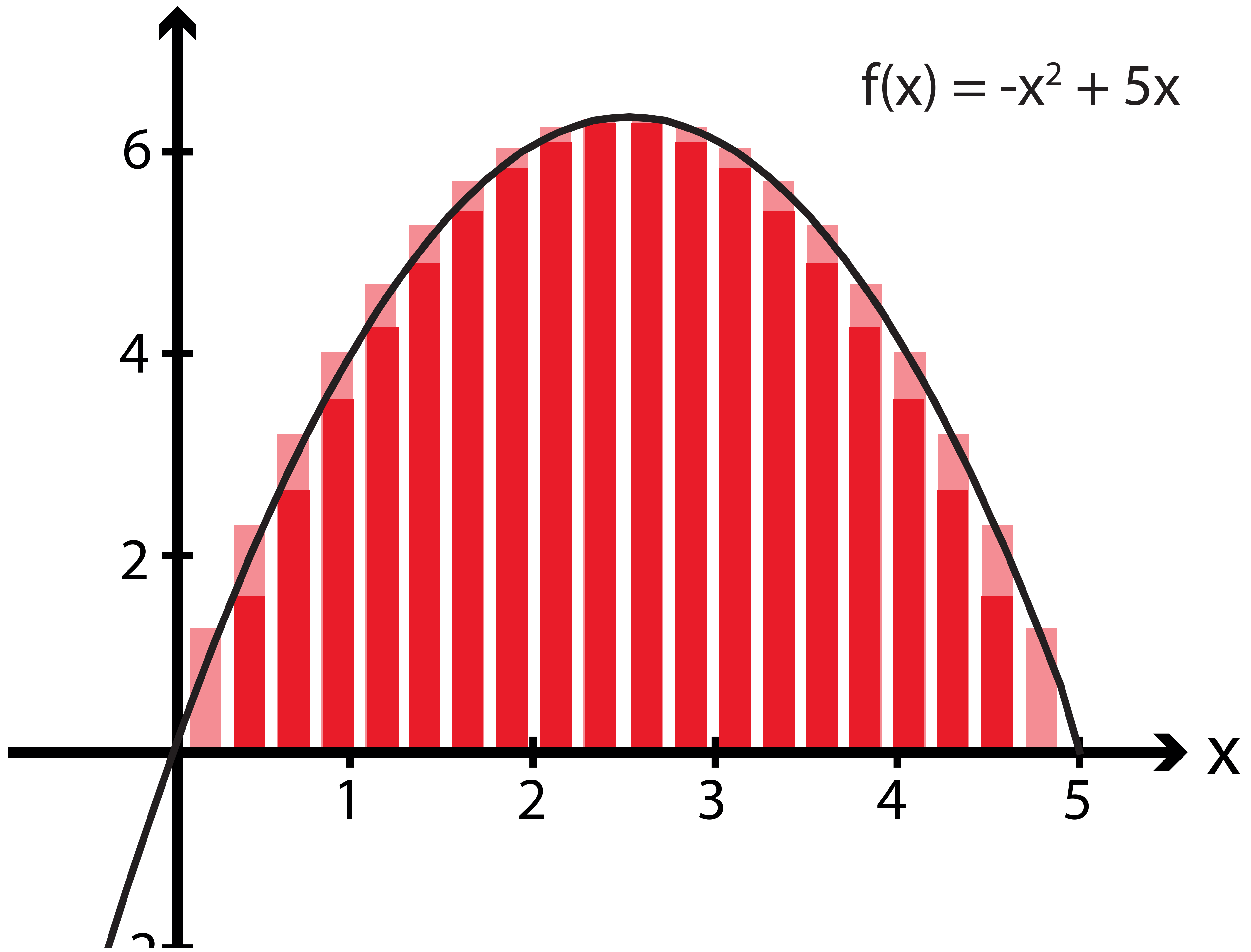
Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Integralrechnung

Wir können für die Breite nicht 0 einsetzen, denn sonst haben wir unendlich viele Rechtecke mit Fläche 0.

Wir können aber untersuchen, gegen welchen Wert die Näherung geht, wenn wir die Breite der Rechtecke gegen 0.

Ähnlich wie bei der Differenzialrechnung berechnen wir diesen Grenzwert nicht jedes Mal von Hand, sondern arbeiten regelbasiert ...



Stammfunktionen

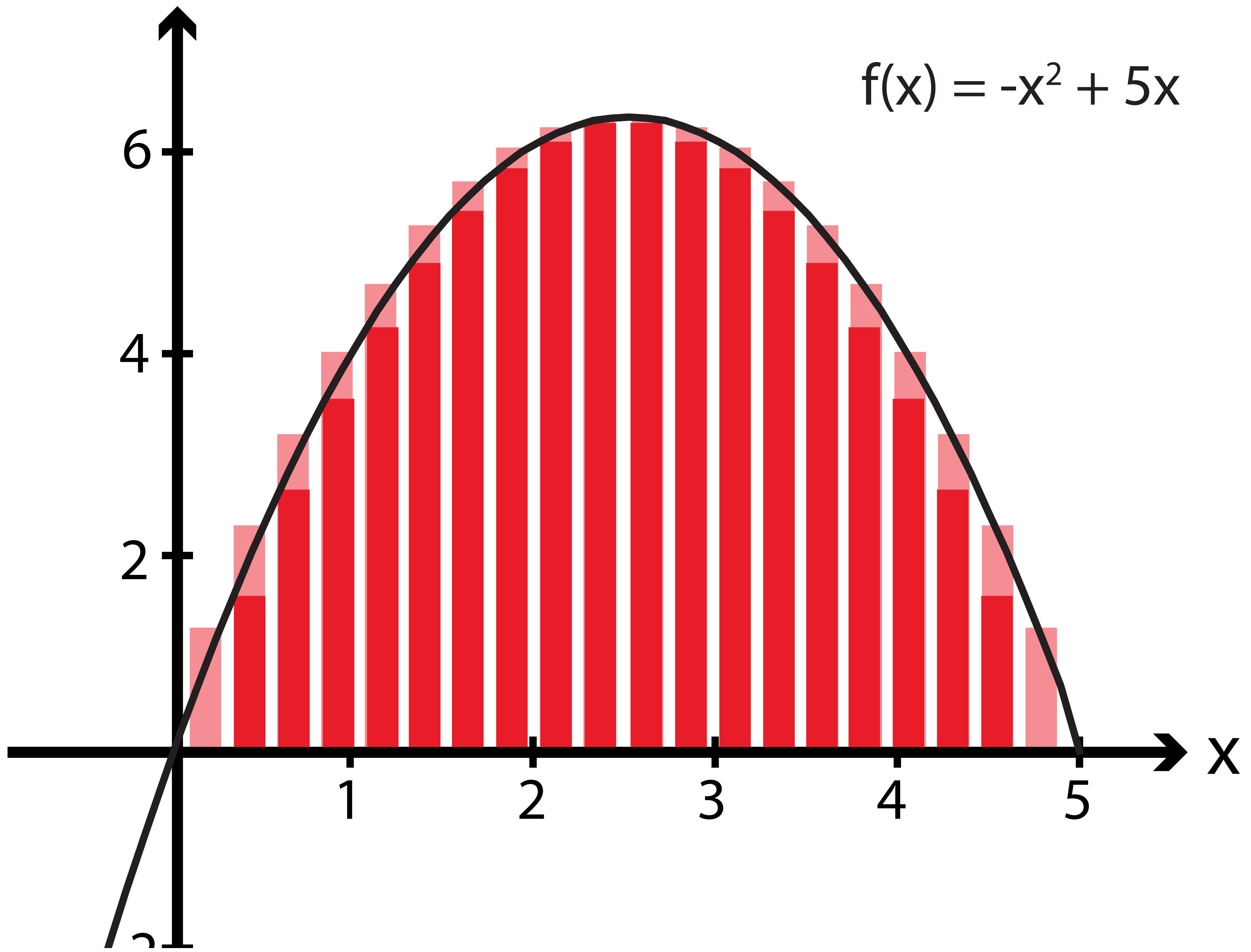
Um die Fläche unter Kurve zu berechnen, benötigen wir eine so-genannte Stammfunktion von f(x).

Wir suchen eine Funktion, deren Ableitung genau f(x) ergibt!

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Wir schreiben die Stammfunktion als:

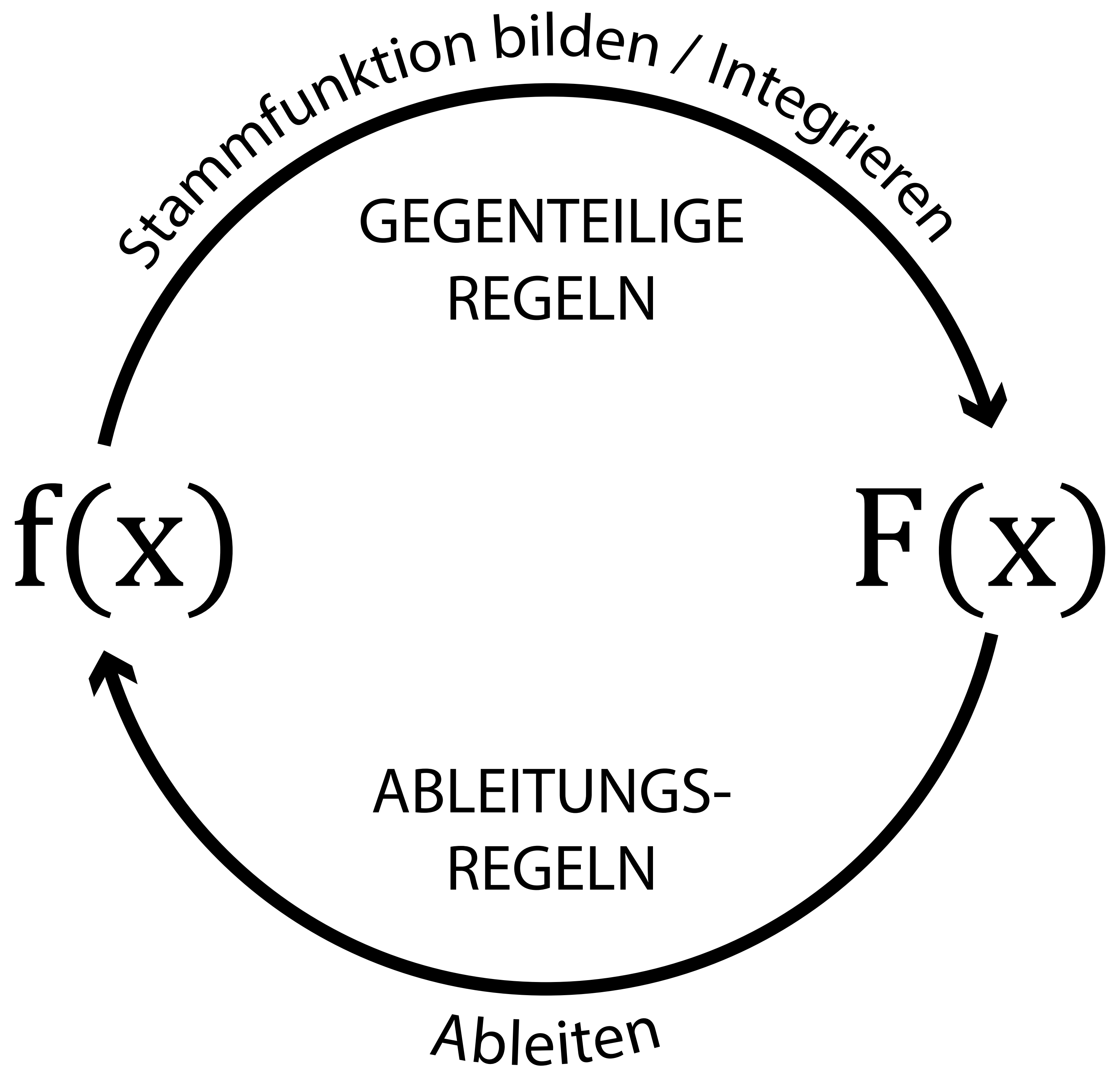
$$F(x) = \int f(x)\, dx$$



Stammfunktionen

Problem Wir wissen, wie wir Funktionen ableiten, aber wie machen wir das Gegenteil davon?

Lösung Wir nehmen unsere Ableitungsregeln und kehren sie ins Gegenteil um.



DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

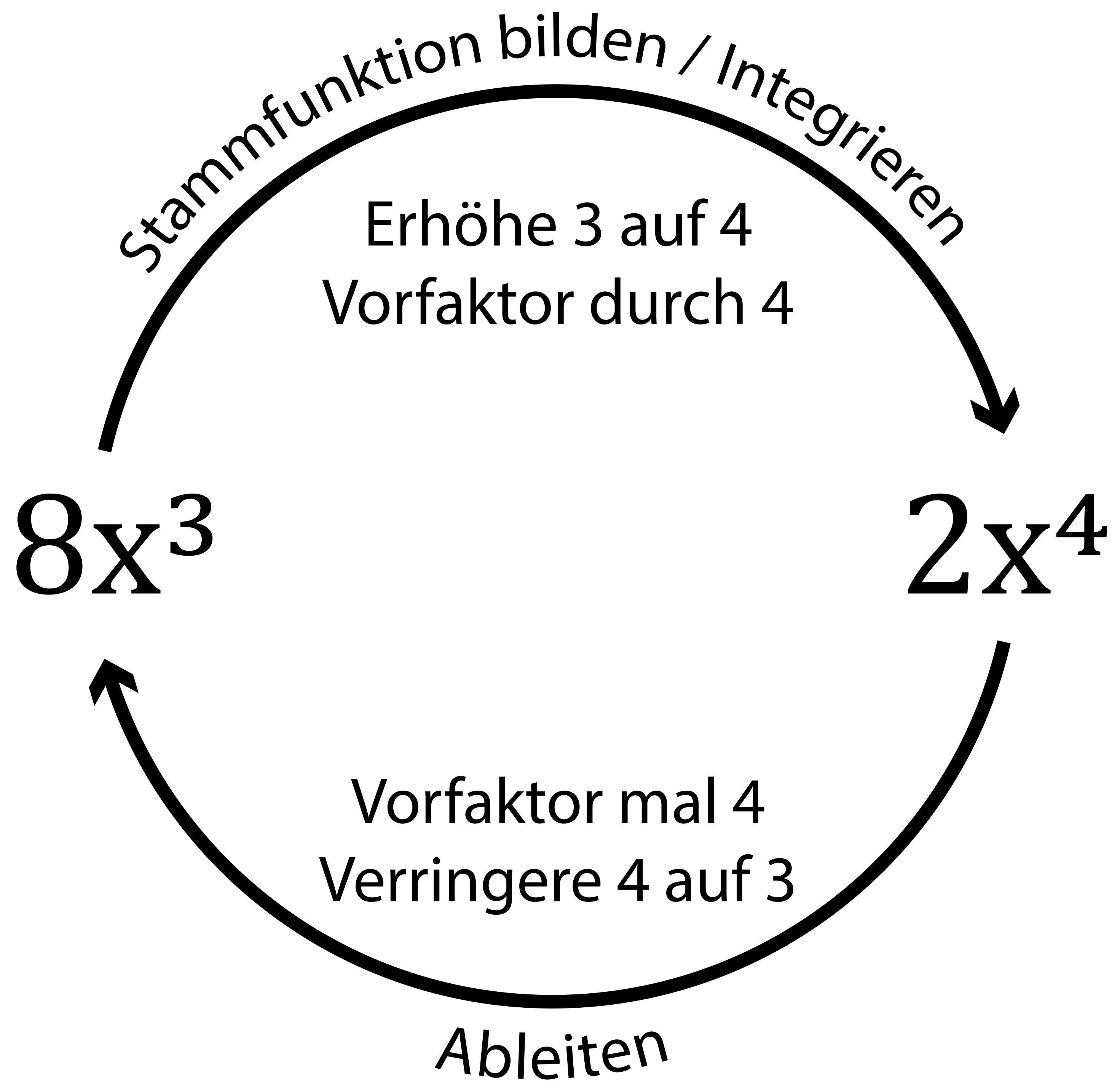
Stammfunktionen

Terme der Form ax^b haben wir mit der Potenzregel abgeleitet. Diese besteht aus zwei Rechenschritten.

- Multipliziere Vorfaktor mit Exponent
- Verringere Exponent um 1

Um Terme der Form ax^b zu integrieren, machen wir genau das Gegenteil in umgekehrter Reihenfolge.

- Erhöhe Exponent um 1
- Teile Vorfaktor durch den Exponenten

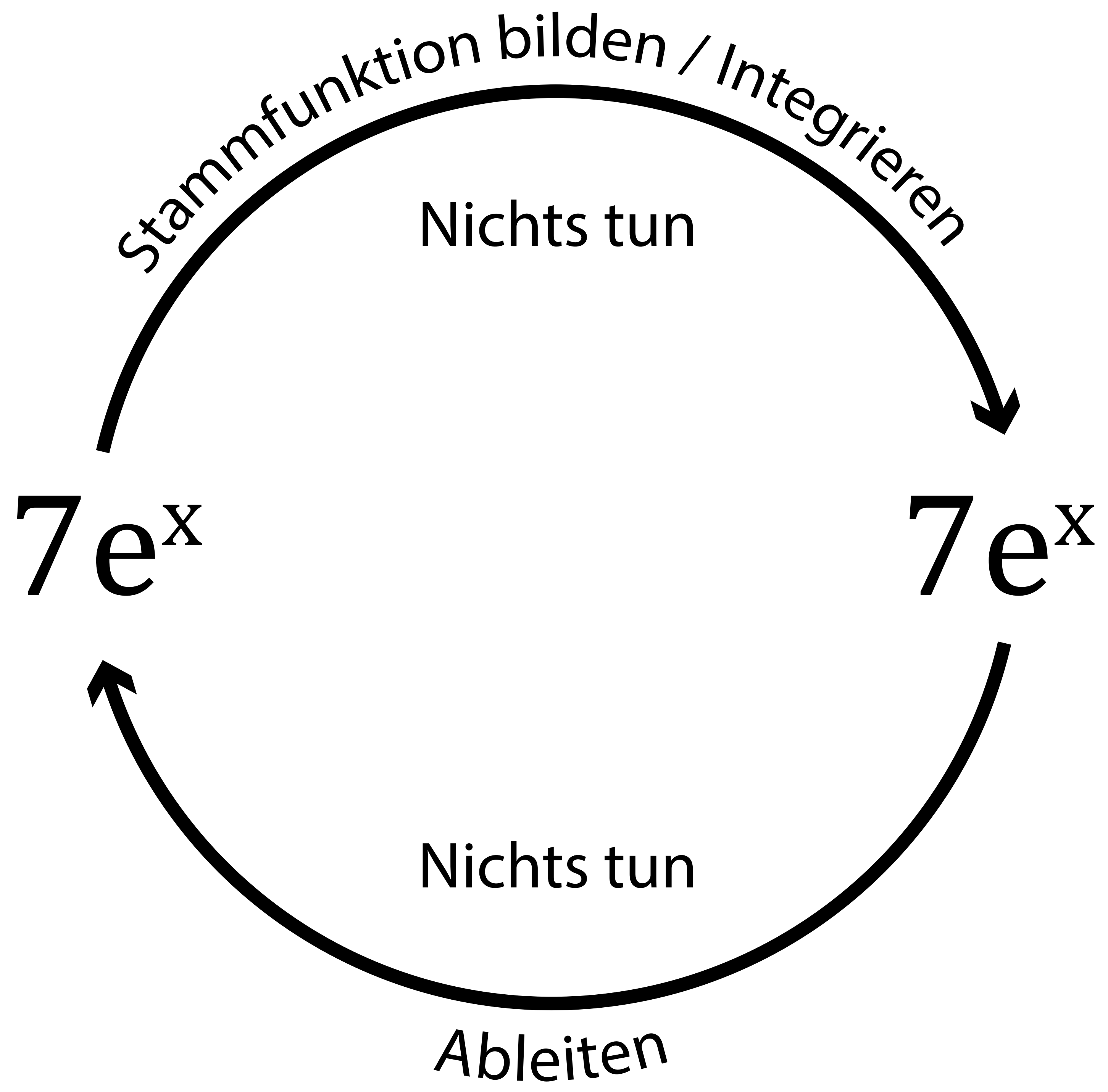


DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Stammfunktionen

Den Term ae^x haben wir bei der Ableitung unverändert gelassen.

Das Gegenteil von Nichtstun ist hier tatsächlich Nichtstun. Um den Term ax^b zu integrieren, lassen wir ihn ebenfalls unverändert.

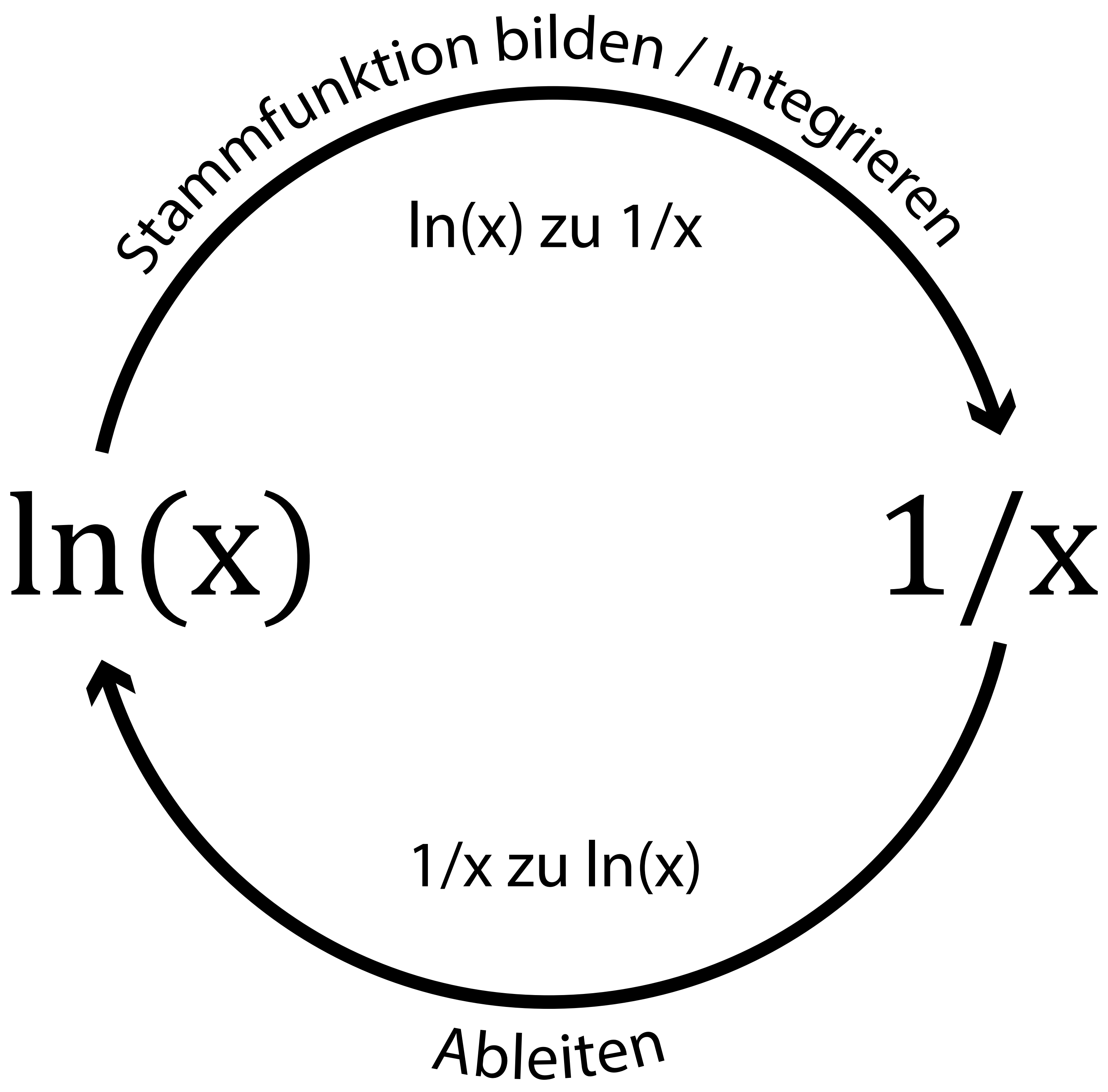


Stammfunktionen

Aus dem Logarithmus ln(x) wurde bei der Ableitung 1/x.

Wir können daraus zwar nicht auf die Stammfunktion von ln(x) schließen, aber wir finden folgende gegenläufige Regel:

Die Stammfunktion von 1/x ist ln(x).

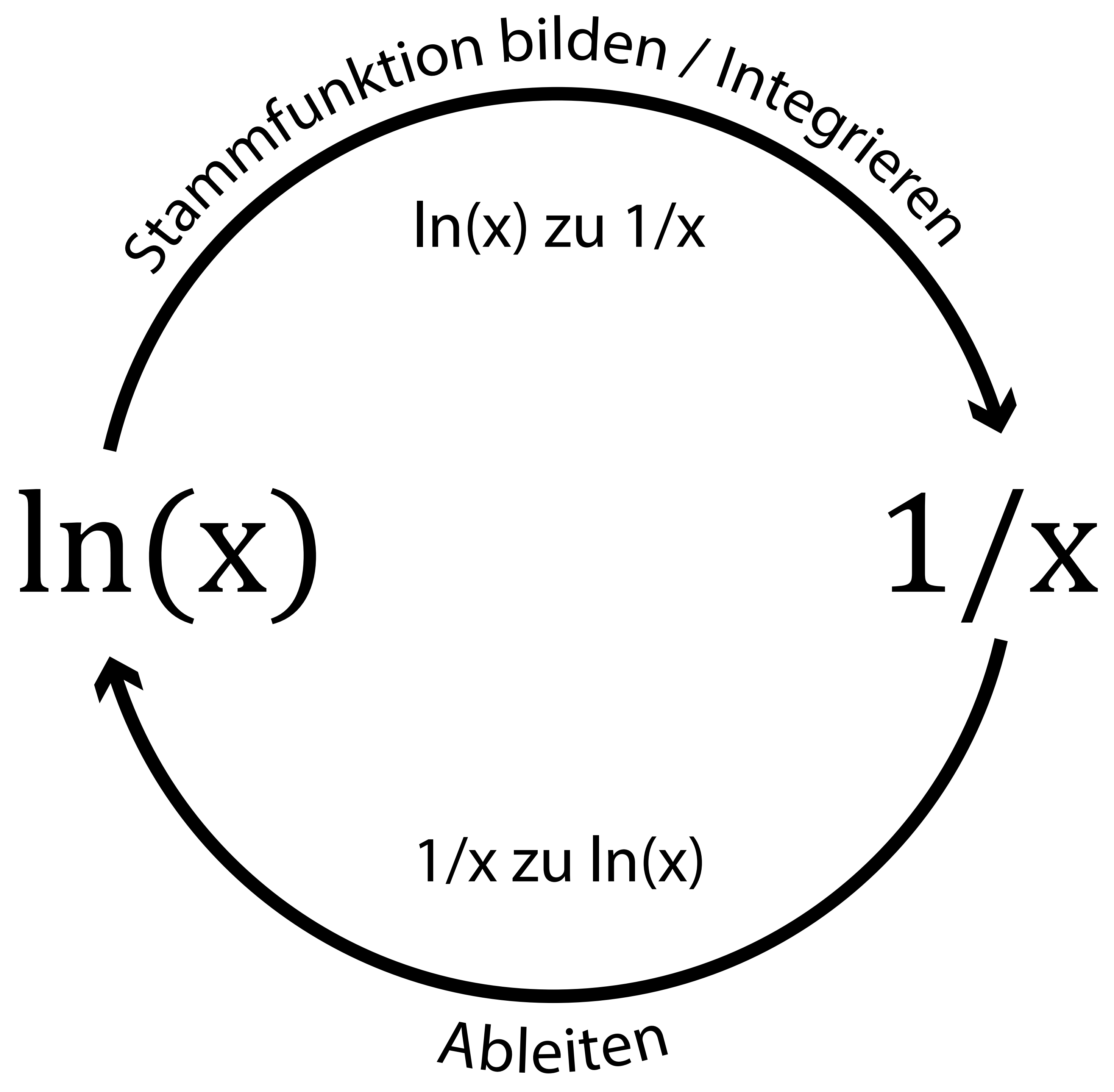


Stammfunktionen

Da stimmt etwas nicht! Der Term 1/x ist doch eine Potenz und sollte somit mit der ins Gegenteil verkehrten Potenzregel integriert werden:

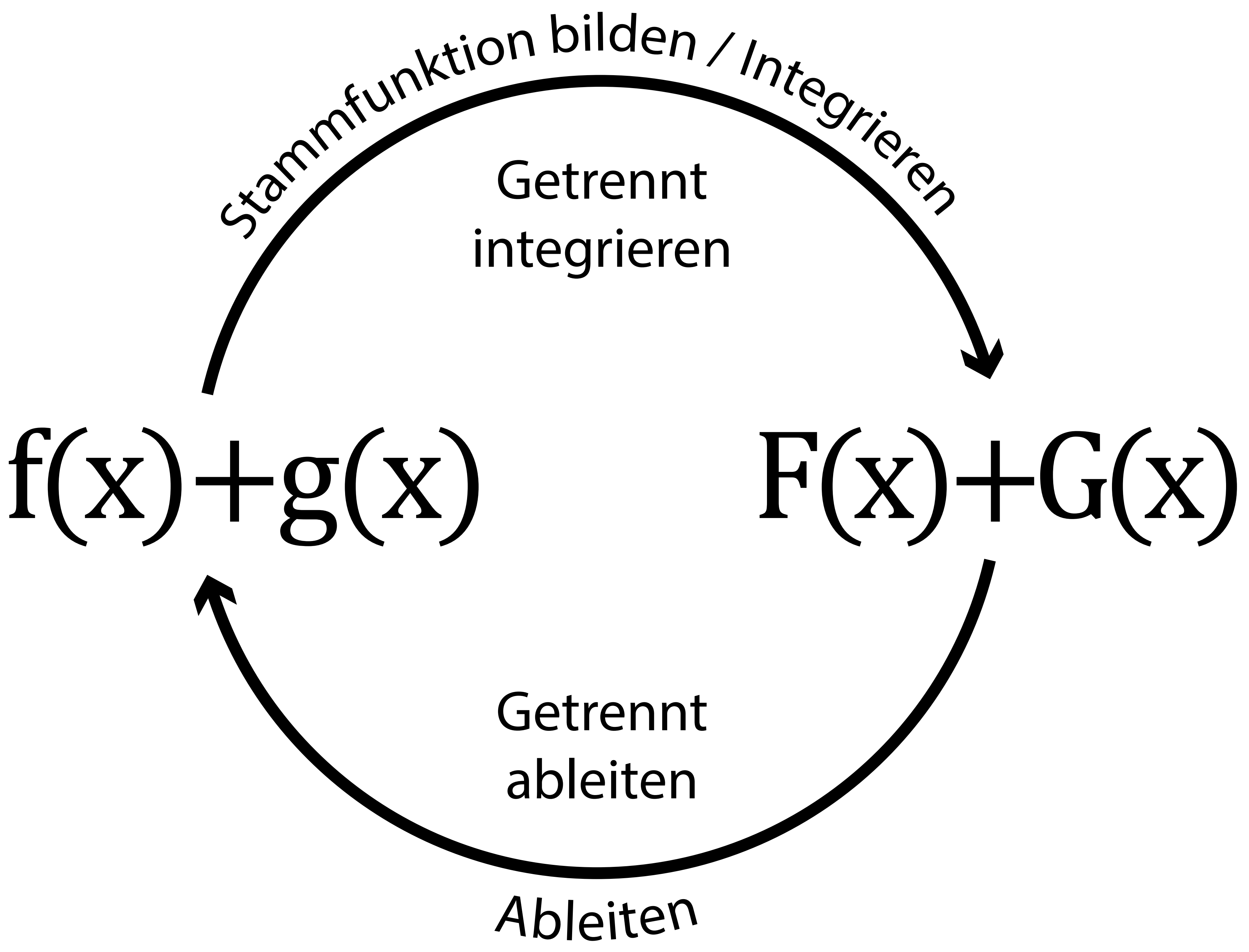
- Erhöhe Exponent um 1
- Teile Vorfaktor durch den Exponenten

Tatsächlich ist 1/x eine Ausnahme, bei der diese Regel durch 0 teilen und damit versagen würde!



Stammfunktionen

Die Summenregel lässt sich auch umkehren. Da wir mit ± verbundene Terme getrennt ableiten müssen, wir auch getrennt integrieren.



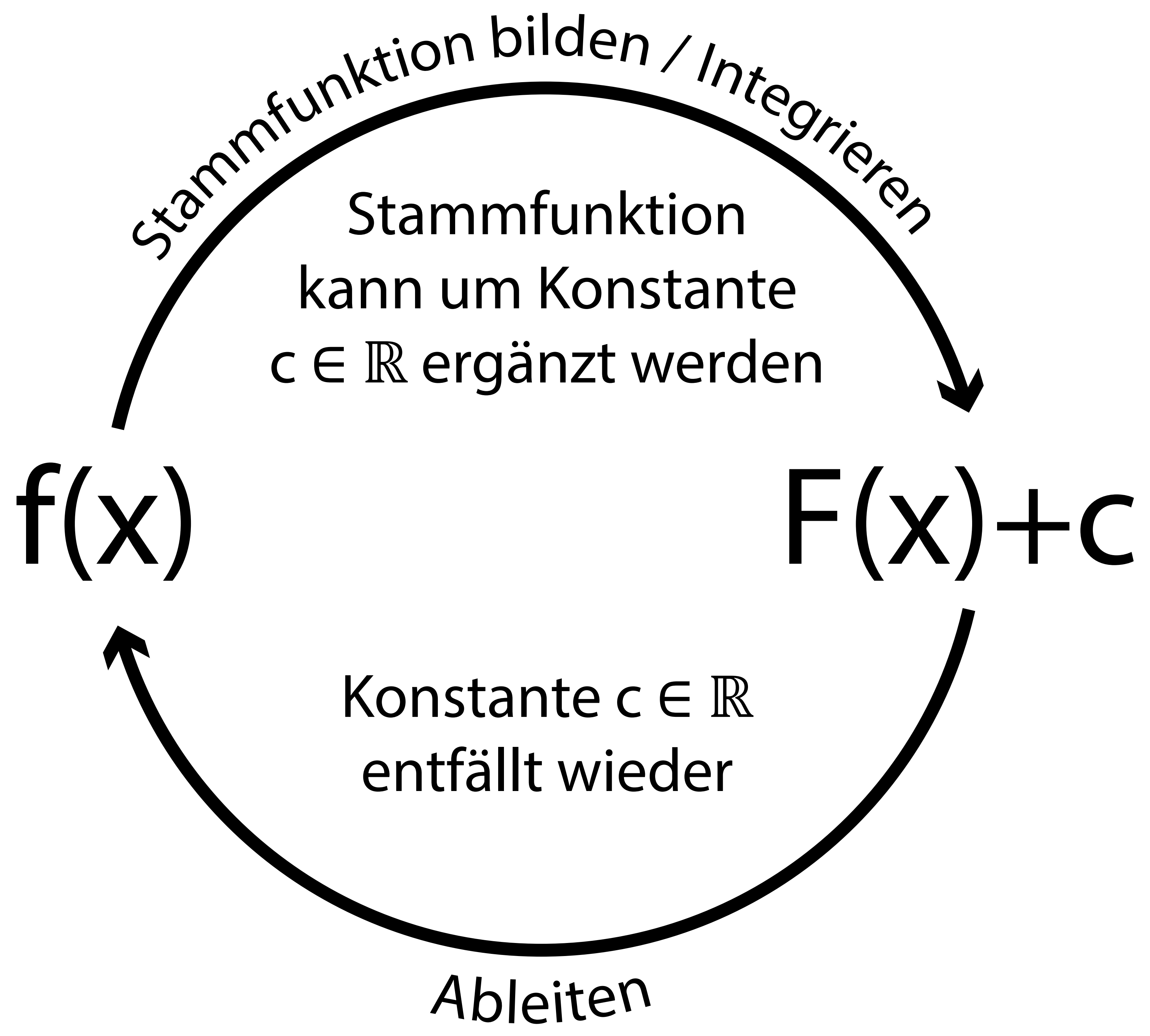
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Stammfunktionen

Unabhängig davon wie f(x) aussieht, können wir die Stammfunktion F(x) um eine frei wählbare Konstante ergänzen.

Beim Ableiten fällt diese Konstante wieder weg, sodass das Kriterium f(x) ist Ableitung von F(x) nicht verletzt wird.

Bei der Berechnung der Fläche unter der Kurve nimmt die Konstante ebenfalls keinen Einfluss.



Berechne die Stammfunktionen der folgenden Funktionen

$f(x) = x^2 + 5e^x - 2$

$g(x) = 4x^7 - \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}$

$h(x) = 3x^2 e^{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$

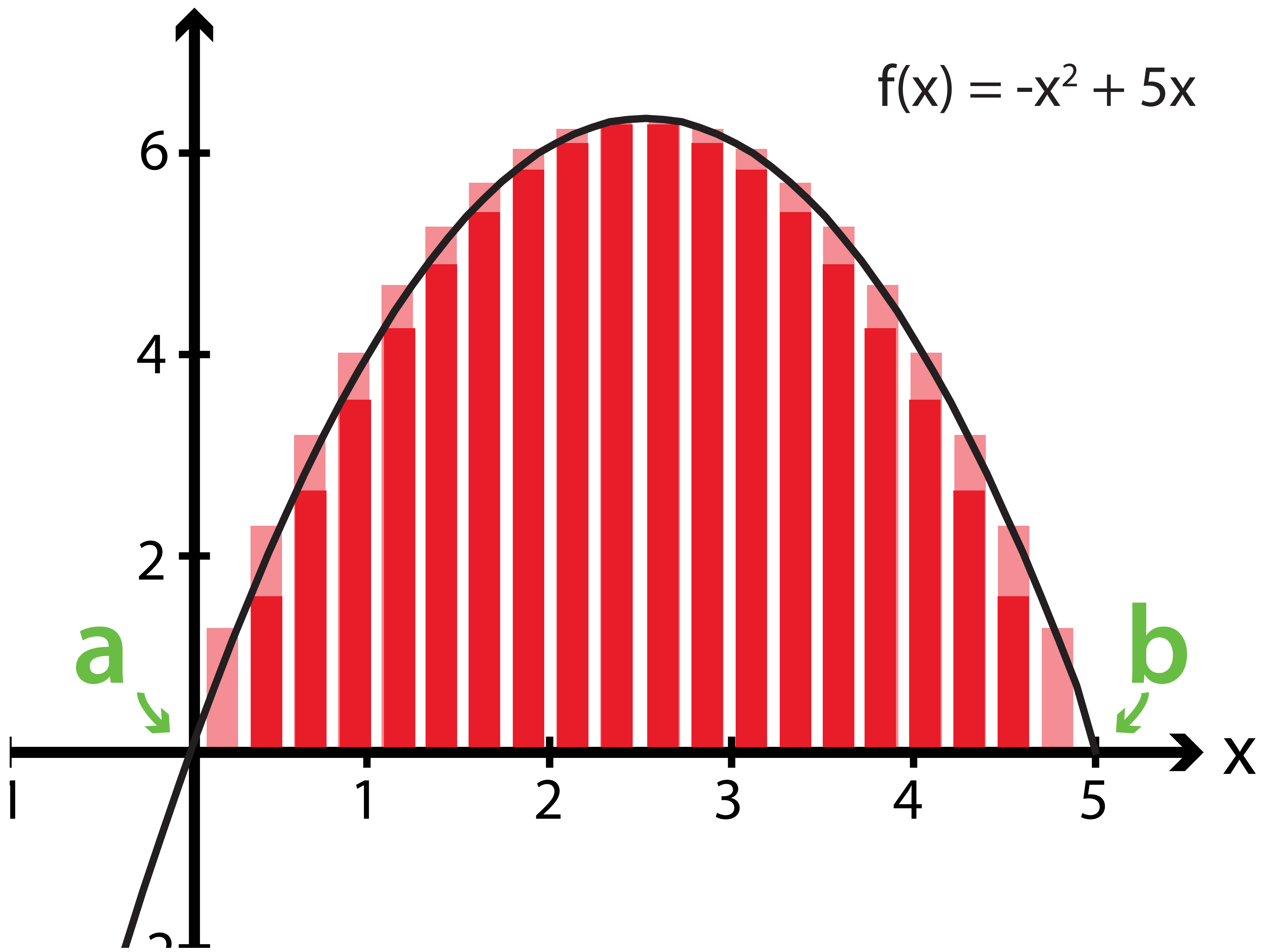
Bestimmte Integrale

Zurück zur ursprünglichen Frage nach der Fläche unter $f(x) = -x^2+5x$.
Die Stammfunktion ist noch kein Flächeninhalt!

$$F(x) = \int -x^2 + 5x \, dx = -\frac{1}{3}x^3 + 2.5x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Um die Fläche zu berechnen, müssen wir die Stammfunktion an zwei Stellen auswerten.

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$



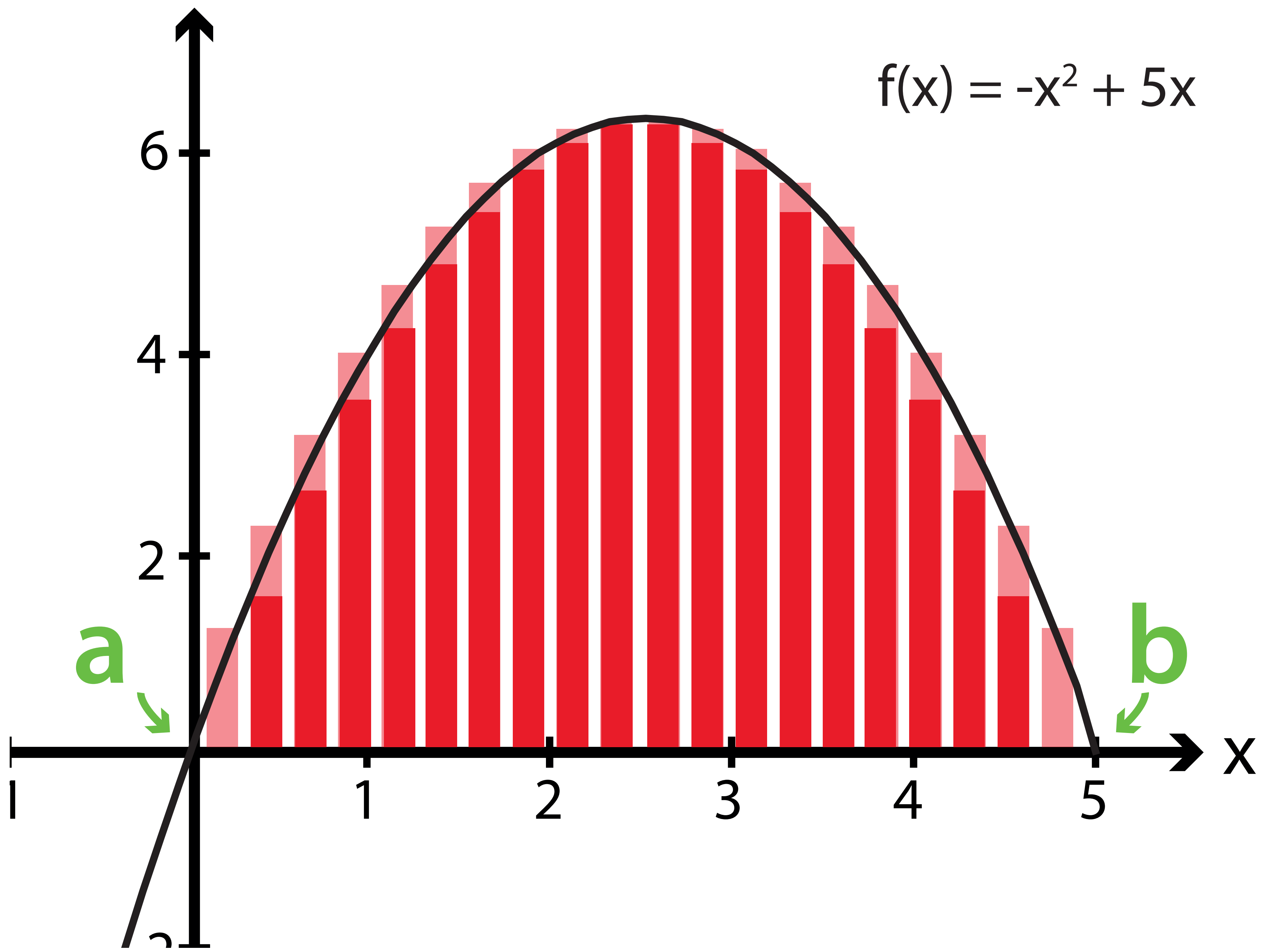
Bestimmte Integrale

Die Konstante c kann dabei weggelassen werden. Ihr Wert spielt keine Rolle:

$$A = \int_0^5 -x^2 + 5x \, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2.5x^2 + c\right]_0^5$$

$$= \left[-\frac{1}{3}5^3 + 2.5 \cdot 5^2 + c\right] - \left[-\frac{1}{3}0^3 + 0 \cdot 5^2 + c\right]$$

$$= 20.83$$



Berechne die Werte folgender bestimmter Integrale

$$\int_0^2 x^3 + 2x \, dx =$$

$$\int_1^2 5x^4 - 10 \, dx =$$

$$\int_1^e 1 + \frac{1}{x} \, dx =$$

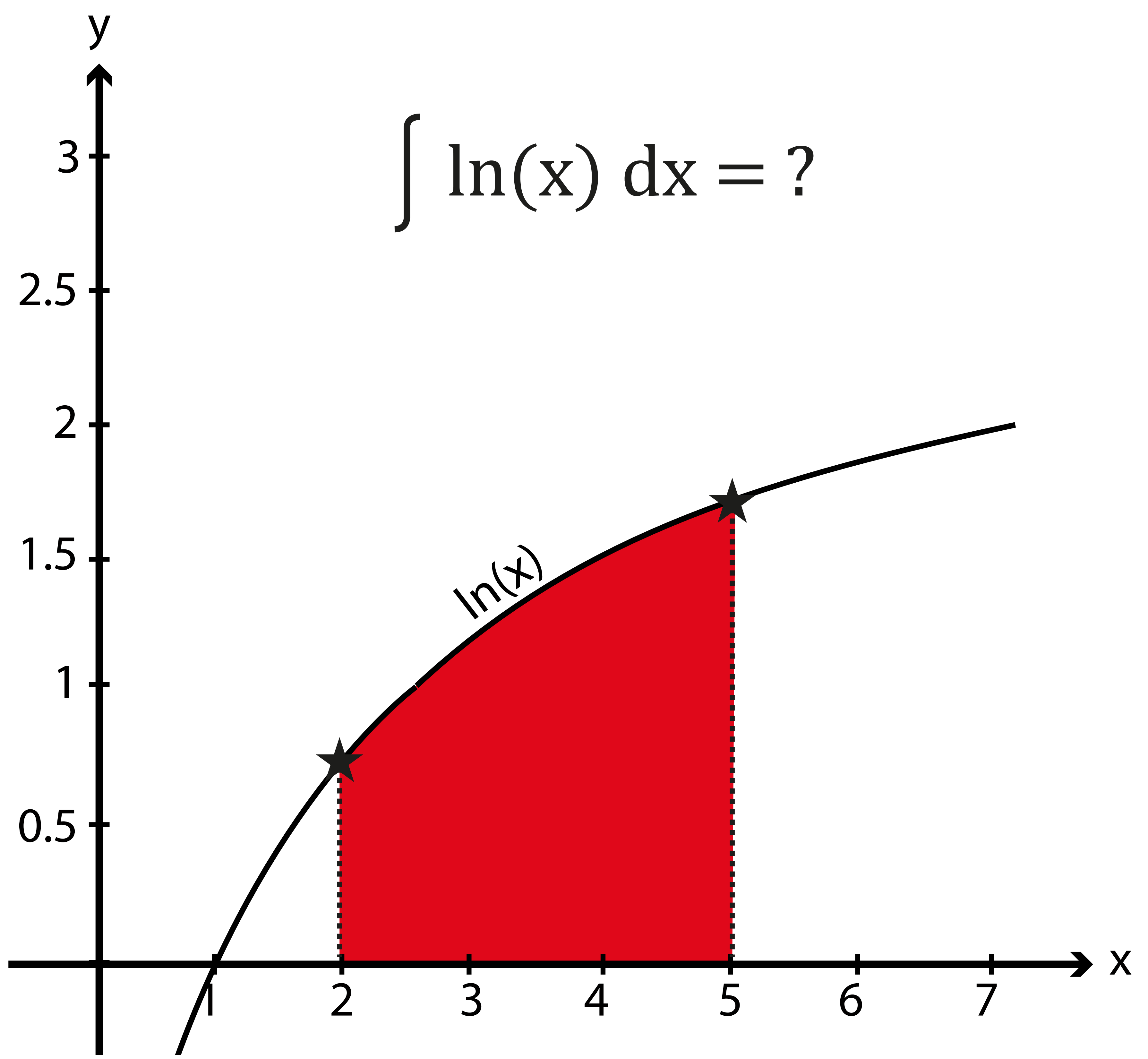
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Partielle Integration

Viele Stammfunktionen lassen sich nur mit diversen Tricks berechnen. Zu den wichtigsten zählen die partielle Integration und die Substitution.

Die partielle Integration hilft, wenn wir über ein Produkt von zwei Funktionen integrieren, bei denen wir nur von einer die Stammfunktion kennen:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx = \Big[f(x) \cdot g(x) \Big] - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx$$



Partielle Integration

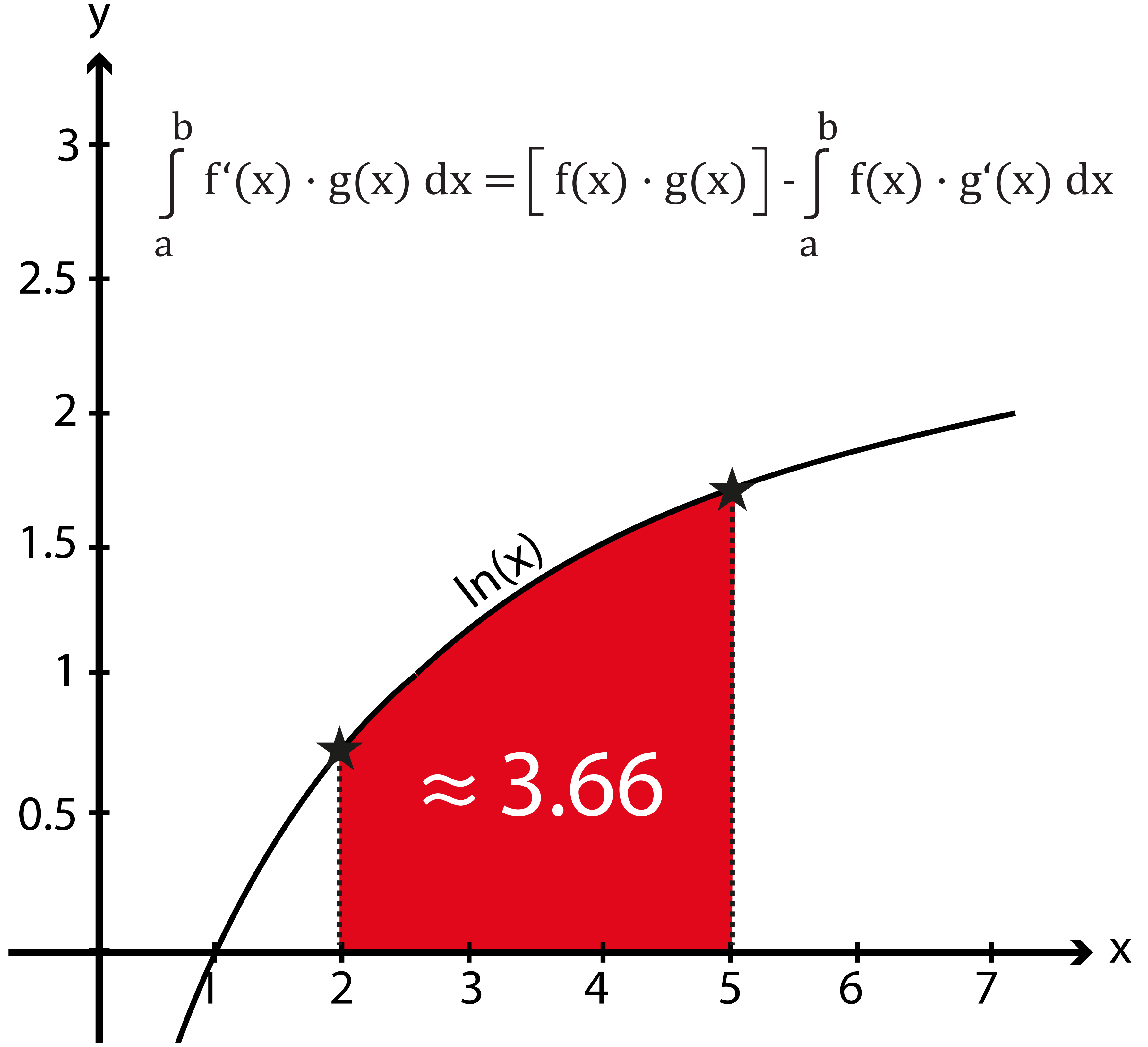
Mit der partiellen Integration können wir den Logarithmus integrieren!

$$h(x) = \ln(x) = \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}$$

$$H(x) = \left[x \cdot \ln(x)\right] - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = \left[x \cdot \ln(x)\right] - \int dx$$

$$= x \cdot \ln(x) - x$$

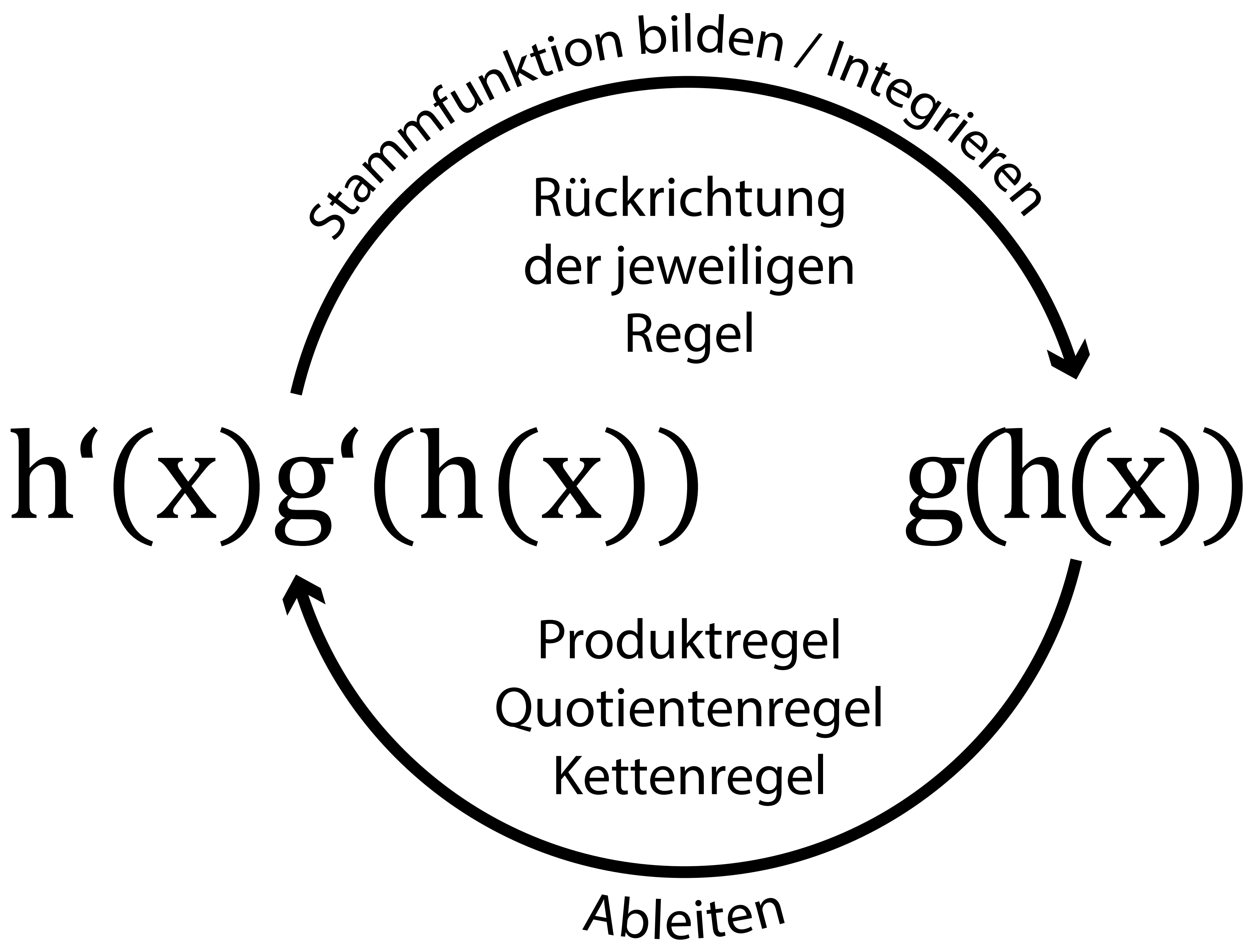
$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx = \left[f(x) \cdot g(x)\right] - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx$$



Integration durch Substitution

Bei der Integration durch Substitution kehren wir die Kettenregel der Ableitung um:

$$\int_{a}^{b} f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$



DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Integration durch Substitution

Substitution: $$\int \underbrace{2x}_{g'(x)}\underbrace{(x^2+1)^5}_{f(g(x))}\,dx = \int 2x\,(u)^5\,\frac{du}{2x} = \int u^5\,du = \frac{1}{6}\,u^6$$

Nebenrechnung: $$u = g(x) = x^2 + 1 \qquad \frac{du}{dx} = 2x \iff dx = \frac{du}{2x}$$

Rücksubstitution: $$\frac{1}{6}\,u^6 = \frac{1}{6}\,(x^2+1)^6$$

Nutze partielle Integration und Substitution um die Stammfunktionen zu bestimmen!

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx =$$

$$\int \ln(\sqrt{x})\,dx =$$

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx = \Big[\, f(x) \cdot g(x) \,\Big] - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx$$