DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Tutorium Generale

Wirtschaftsmathematik

Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Einheit VII

In der "Linearen Algebra" behandeln wir Skalare, Vektoren, Matrizen sowie die Möglichkeiten diese miteinander zu verrechnen.

Außerdem lernen wir, wie wir lineare Gleichungssysteme durch Matrixinversion lösen können!

Lineare Algebra

- Skalare vs. Vektoren
- Kreuz- und Skalarprodukt
- Matritzen
- Matrixmultiplikation
- Matrixinversion

VII

Skalare

In der linearen Algebra bezeichnen wir Zahlen aus dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Skalare.

Umgangssprachlich könnten wir den Skalar also als einzelne reelle Zahl definieren.

3, 8, -2, 5.5, π und e sind alles Skalare!

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen	Als Bruch* darstellbar
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen	„Kommazahl“

*Genauer: Ganzzahliger Bruch a/b mit a,b $\in \mathbb{Z}$

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Vektoren

Vektoren bestehen aus einer fest vorgegebenen Anzahl von Skalaren. Abhängig von dieser Anzahl gehören unsere Vektoren zu den Vektorräumen $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ usw.

Wir können Vektoren als Zeilen- oder als Spaltenvektor schreiben. Der Standard in der linearen Algebra ist der Spaltenvektor.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = (15\,,20\,,10)$$

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
$\mathbb{N}_0$	Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, ...\}$
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen	Als Bruch* darstellbar
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen	„Kommazahl"

*Genauer: Ganzzahliger Bruch a/b mit a,b $\in \mathbb{Z}$

Vektoren

Über das Formelzeichen erhalten wir den ganzen Vektor.

Oft wird dabei ein kleiner Pfeil über das Vektorzeichen geschrieben, um zu verdeutlichen, dass wir es mit einem Vektor zu tun haben.

Die einzelnen Skalare im Vektor erhalten wir, indem wir über ein Subskript ein Element des Vektors angeben.

Beispiel: $v_1 + v_2 = 35$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$v_1 = 15$

$v_2 = 20$

$v_3 = 10$

Ganzer Vektor

$$\vec{v} = (15\,,20\,,10)$$

$v_3 = 10$

$v_2 = 20$

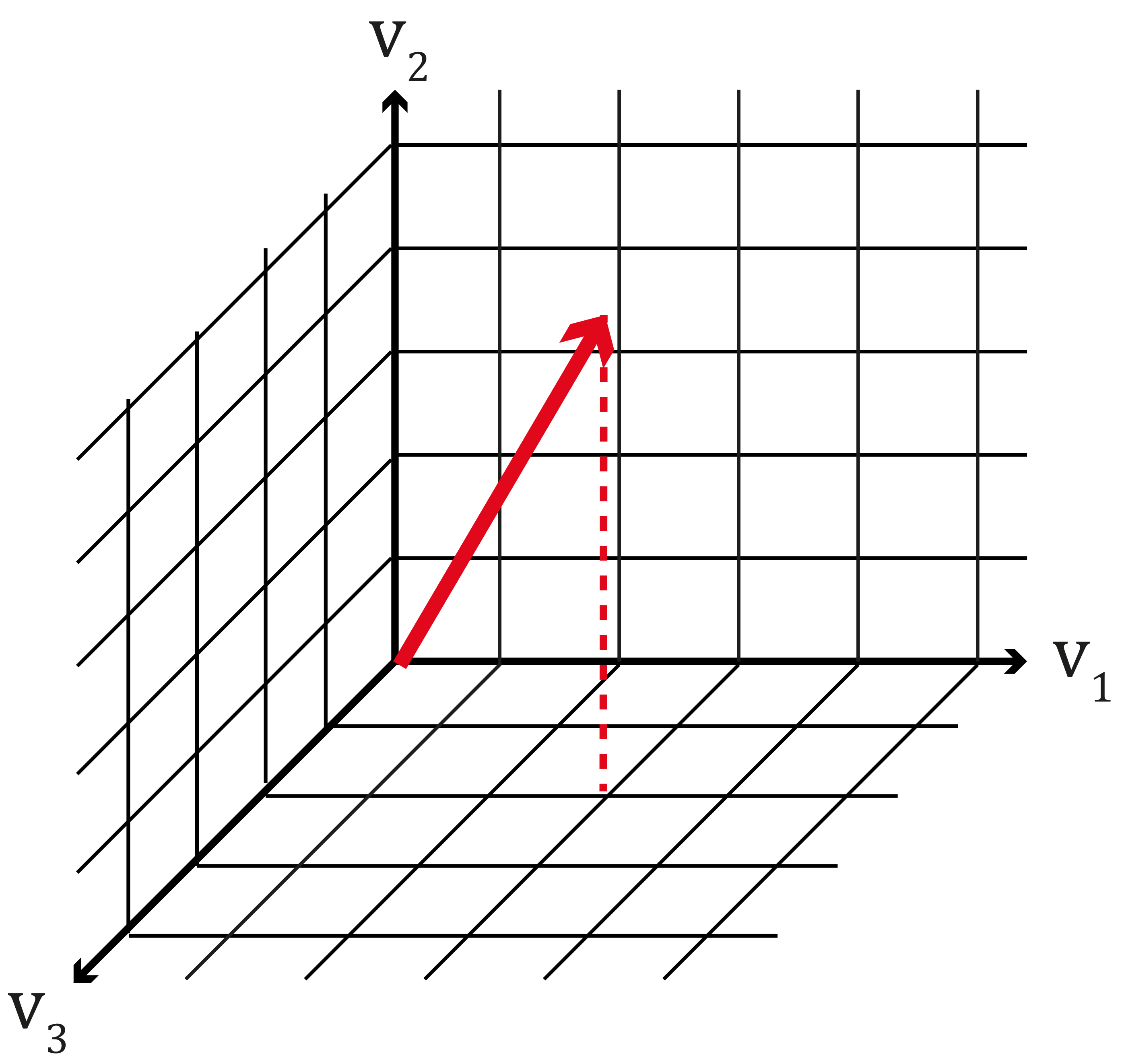
$v_1 = 15$

Ganzer Vektor

Vektoren

Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ können als Punkte oder Pfeile auf einer Fläche bzw. in einem Raum verstanden werden.

Diese Interpretation begegnet uns allerdings eher bei den Ingenieuren und Physikern!

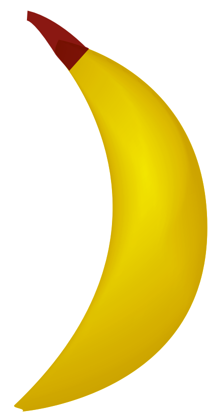


$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{15 nach rechts} \\ \rightarrow \text{20 nach oben} \\ \rightarrow \text{10 nach vorne} \end{array}$$

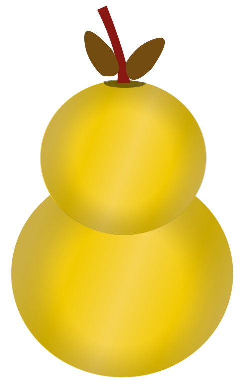
Vektoren

Vektoren können aber auch dazu genutzt werden, um mehrere Merkmale verschiedener Merkmalsträger in einem mathematischen Objekt zusammenzufassen.

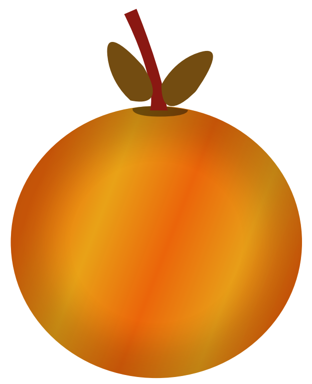
Beispiel: Gehalt verschiedener Vitamine in jeweils 100g einer Obstsorte.



$$\text{Banane} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{15mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{10mg Vitamin C} \end{array}$$



$$\text{Birne} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{40mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{5mg Vitamin C} \end{array}$$



$$\text{Apfel} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 50 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{5mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{5mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{50mg Vitamin C} \end{array}$$

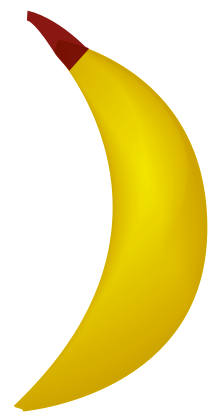
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Rechnen mit Vektoren

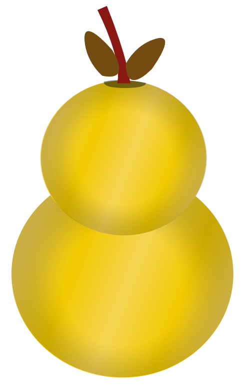
Wir können zwei Vektoren miteinander addieren und subtrahieren, indem wir die Rechenoperation elementweise ausführen.

Beispiel: Vitamingehalt von einer Birne und einem Apfel

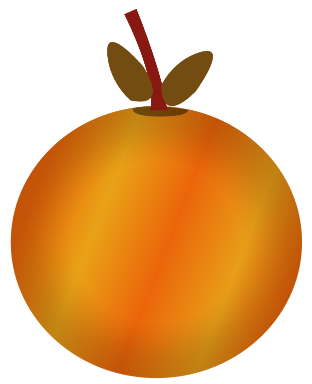
$$\begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 25 \\ 55 \end{pmatrix}$$



$$\text{Banane} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{15mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{10mg Vitamin C} \end{array}$$



$$\text{Birne} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{40mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{5mg Vitamin C} \end{array}$$



$$\text{Apfel} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 50 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{5mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{5mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{50mg Vitamin C} \end{array}$$

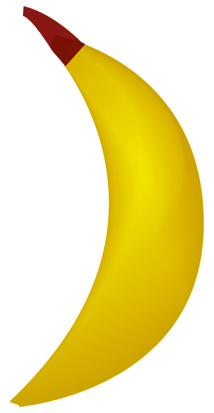
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Rechnen mit Vektoren

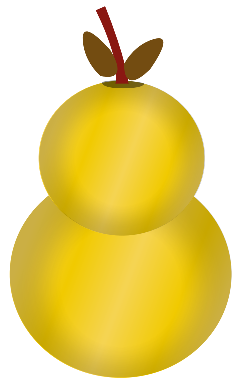
Die Addition oder Subtraktion eines Vektors mit einem Skalar ist in der linearen Algebra nicht definiert.

Es gibt zwar Mathematiksoftware (z. B. R) die in diesem Fall die Addition oder Subtraktion auf alle Elemente des Vektors anwendet. Mathematisch korrekt ist das aber nicht.

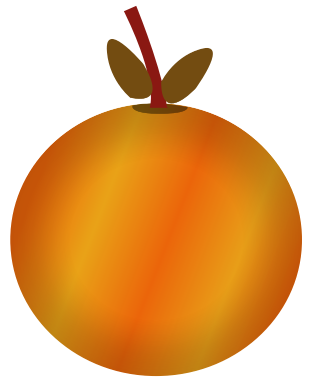
$$\begin{pmatrix}40\\20\\5\end{pmatrix} + 25 = \cancel{\begin{pmatrix}65\\45\\30\end{pmatrix}}$$



$$\text{Banane} = \begin{pmatrix}15\\20\\10\end{pmatrix} \begin{array}{l}\rightarrow \text{15mg Vitamin A}\\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B}\\ \rightarrow \text{10mg Vitamin C}\end{array}$$



$$\text{Birne} = \begin{pmatrix}40\\20\\5\end{pmatrix} \begin{array}{l}\rightarrow \text{40mg Vitamin A}\\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B}\\ \rightarrow \text{5mg Vitamin C}\end{array}$$



$$\text{Apfel} = \begin{pmatrix}5\\5\\50\end{pmatrix} \begin{array}{l}\rightarrow \text{5mg Vitamin A}\\ \rightarrow \text{5mg Vitamin B}\\ \rightarrow \text{50mg Vitamin C}\end{array}$$

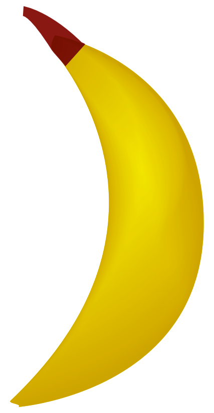
Rechnen mit Vektoren

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar ist dagegen sehr wohl definiert.

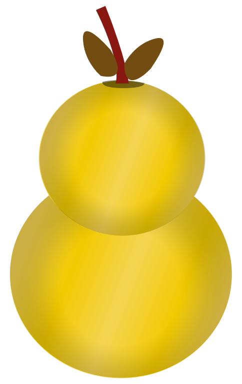
Hier ist es korrekt, die Multiplikation auf jedes Element des Vektors anzuwenden.

Beispiel: Vitamingehalt von 3 Bananen

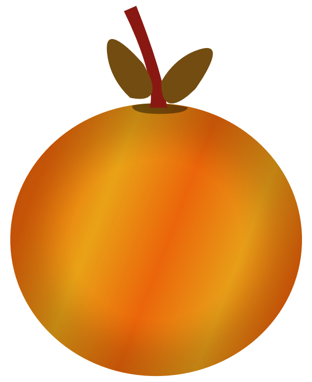
$$3 \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$$



$$\text{Banane} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{15mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{10mg Vitamin C} \end{array}$$



$$\text{Birne} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{40mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{5mg Vitamin C} \end{array}$$



$$\text{Apfel} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 50 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{5mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{5mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{50mg Vitamin C} \end{array}$$

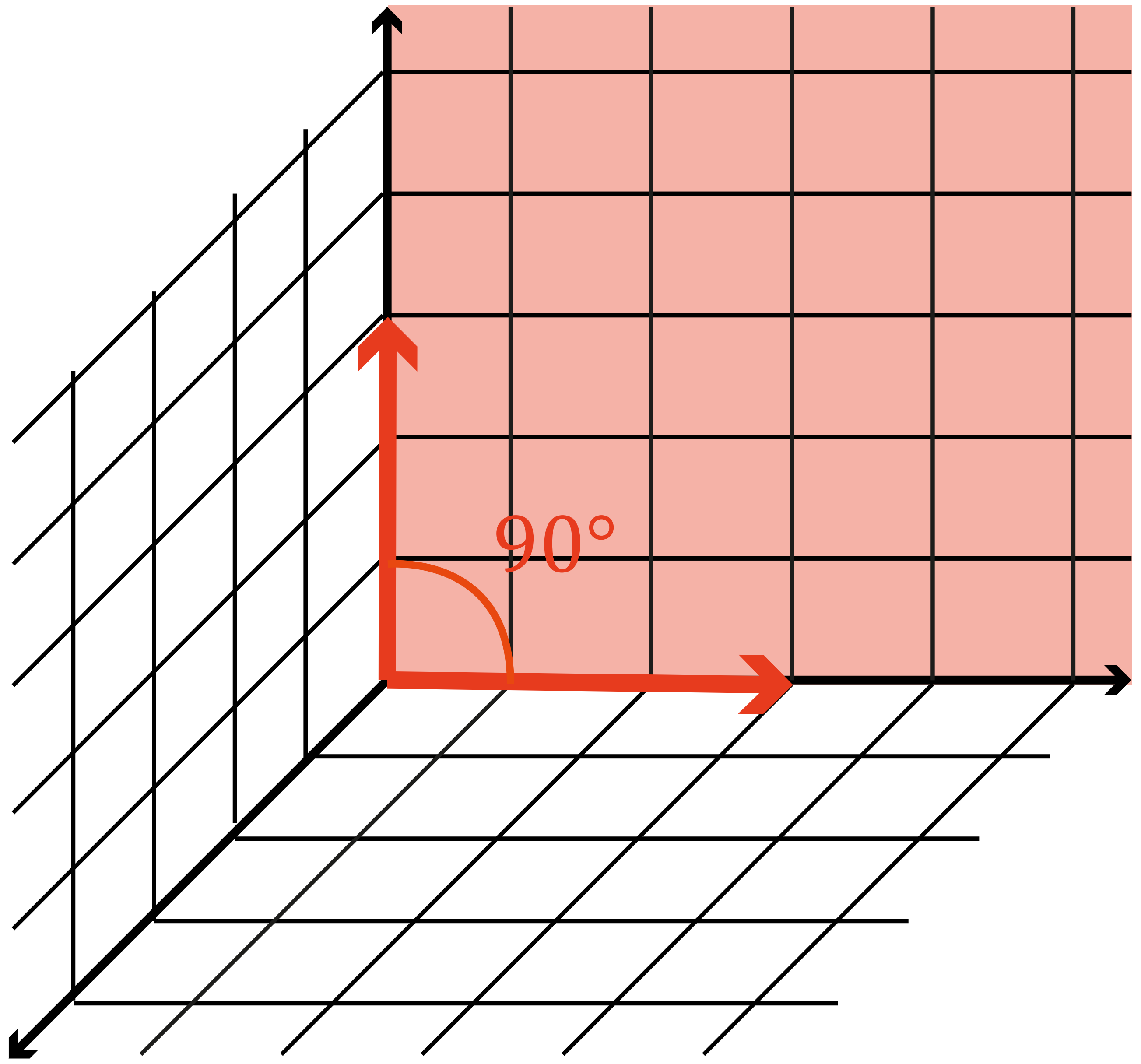
Rechnen mit Vektoren

Bei der Multiplikation von zwei Vektoren unterscheiden wir zwischen dem "Skalarprodukt" und dem "Kreuzprodukt".

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren ist definiert als ...

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Aus dem Skalarprodukt lässt sich der Öffnungswinkel zwischen zwei Vektoren berechnen. Bei 90° ist das Skalarprodukt genau 0.



$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 0$$

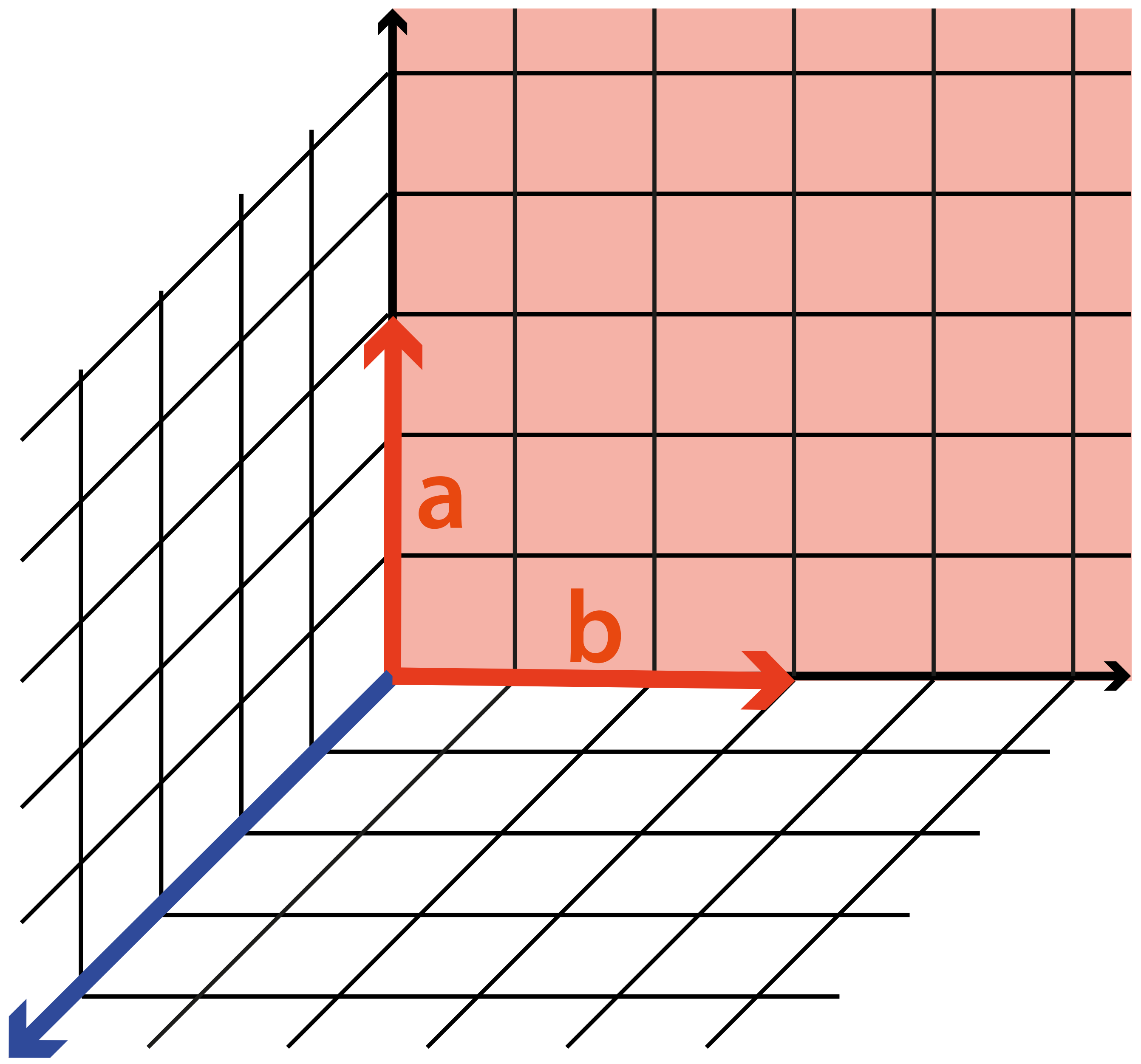
Rechnen mit Vektoren

Bei der Multiplikation von zwei Vektoren unterscheiden wir zwischen dem "Skalarprodukt" und dem "Kreuzprodukt".

Das Kreuzprodukt zwischen zwei Vektoren ist definiert als ...

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Geometrisch betrachtet liefert uns das Kreuzprodukt von a und b einen Vektor, der senkrecht auf diesen beiden steht!



$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 9 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

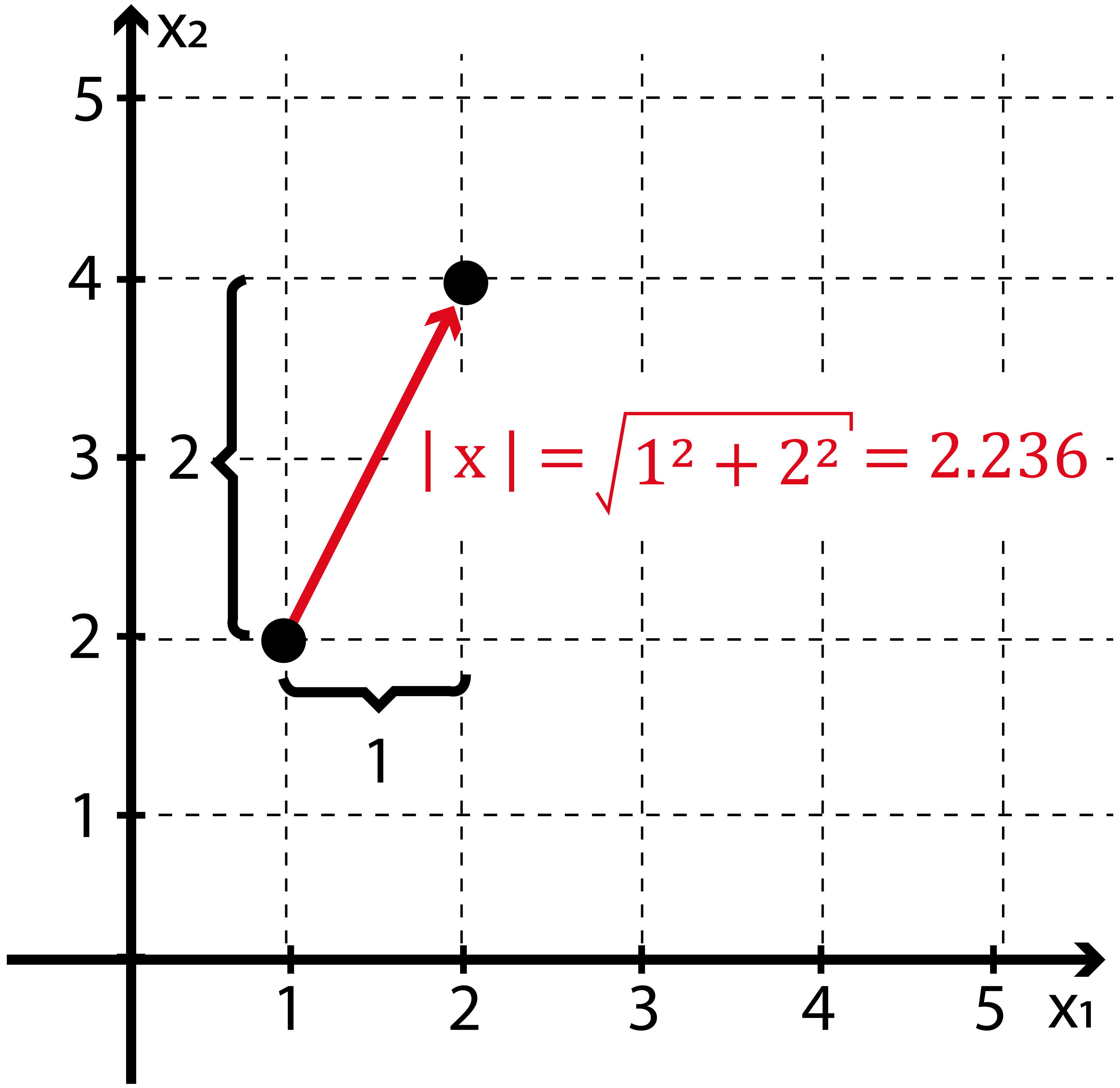
Rechnen mit Vektoren

Eine Norm für einen Vektorraum ist eine Abbildung, die jedem Vektor aus diesem Vektorraum eine reelle Zahl zuordnet.

$$|x| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Für unsere Zwecke verwenden wir die euklidische Norm. Ist x ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$, dann ist die euklidische Norm die "geometrische Länge" des Vektors:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$



Berechne die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} / 2 =$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Matrizen

Matrizen sind eine Erweiterung des Vektors. Statt nur Zeilen oder Spalten zu haben, besitzt die Matrix beides.

Die Anzahl an Zeilen muss nicht zwingend der Anzahl an Spalten entsprechen.

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten wird als m x n Matrix bezeichnet und enthält m · n Elemente.

$$a \in \mathbb{R}^{3x3}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3x3 Matrix
mit 9 Elementen

Matrizen

Das Formelzeichen für ein Element aus einer Matrix ist das Formelzeichen der Matrix plus ein Subskript, in dem zuerst die Zeilennummer und dann die Spaltennummer genannt wird:

$$a_{1,2} = 8 \quad a_{2,2} = 7 \quad a_{3,2} = 2$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3x3 Matrix
mit 9 Elementen

Matrizen

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen gleicher Größe können elementweise addiert werden.

$$a + b = \begin{pmatrix} 1+1 & 8+0 & 0+0 \\ 2+0 & 7\text{-}5 & 5+0 \\ 3+0 & 2+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen können mit Skalaren multipliziert werden. Die Multiplikation wird auf alle Elemente angewendet.

$$2a = \begin{pmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot8 & 2\cdot0 \\ 2\cdot2 & 2\cdot7 & 2\cdot5 \\ 2\cdot3 & 2\cdot2 & 2\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 0 \\ 4 & 14 & 10 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizen

Matrizen können gedreht werden. Bei der sogenannten Transponierung werden Zeilen zu Spalten und umgekehrt.

Tipp: Die Elemente auf der Diagonalen bleiben identisch.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad b^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

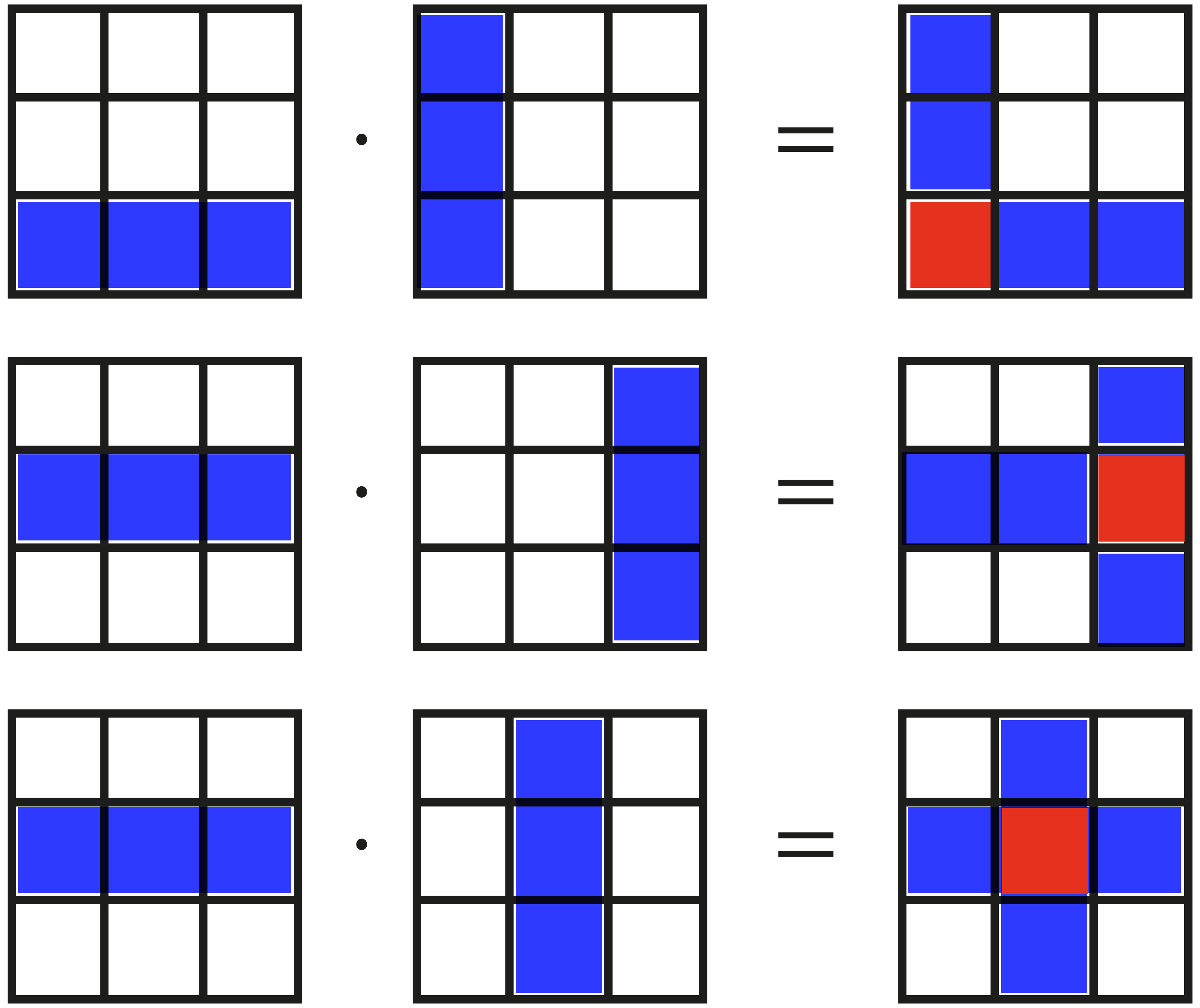
DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Matrizen

Matrizen können mit Matrizen multipliziert werden. Das Produkt ist eine Matrix, deren Größe von den beiden Faktoren abhängt. Die Elemente des Produkts $m_{i,k}$ ergeben sich aus den Skalarprodukten der i-ten Zeile mit der k-ten Spalte.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1{\cdot}5 + 2{\cdot}2 & 1{\cdot}0 + 2{\cdot}2 \\ 3{\cdot}5 + 4{\cdot}2 & 3{\cdot}0 + 4{\cdot}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 23 & 8 \end{pmatrix}$$

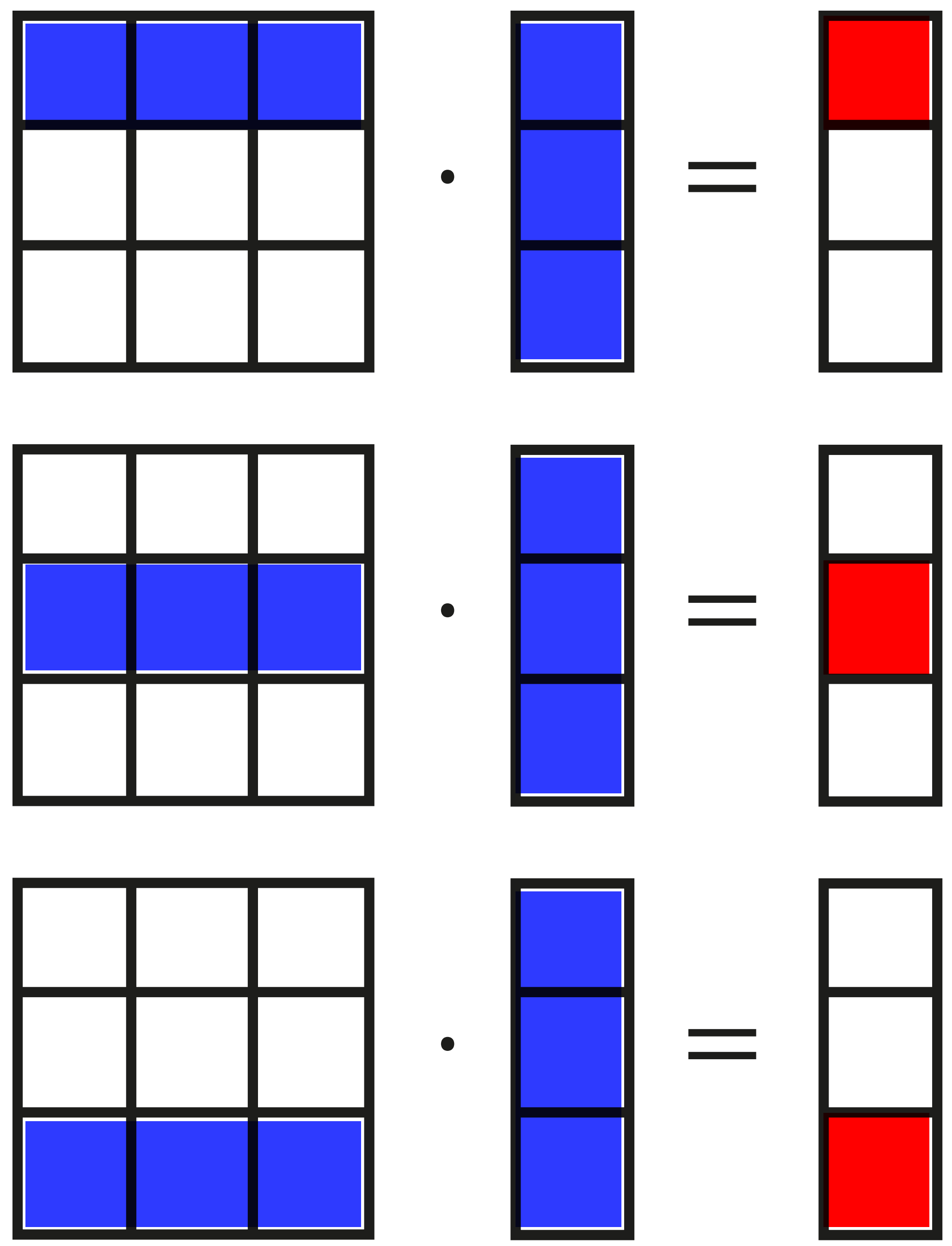


Matrizen

Matrizen können mit Vektoren multipliziert werden. Das Produkt ist ein Vektor, dessen Größe von den beiden Faktoren abhängt. Die Elemente des Produkts $m_{i,k}$ ergeben sich aus den Skalarprodukten der i-ten Zeile mit der k-ten Spalte.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 23 \end{pmatrix}$$



Berechne die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$10 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

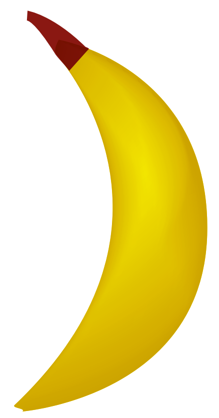
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} =$$

Gauss-Jordan Algorithmus

Angenommen wir suchen eine Kombination aus Obst die uns mit 115mg Vitamin A, 80mg Vitamin B und 220mg Vitamin C versorgt.

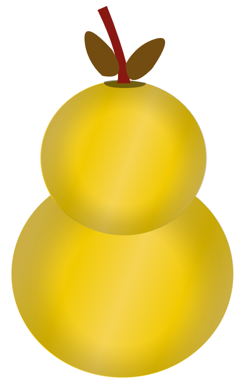
Die Aufgabe entspricht einem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 15\,\text{Banane} + 40\,\text{Birne} + 5\,\text{Apfel} &= 115 \\ 20\,\text{Banane} + 20\,\text{Birne} + 5\,\text{Apfel} &= 80 \\ 10\,\text{Banane} + 5\,\text{Birne} + 50\,\text{Apfel} &= 220 \end{aligned}$$



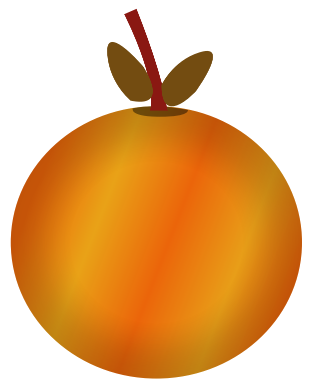
$$\text{Banane} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

15mg Vitamin A
20mg Vitamin B
10mg Vitamin C



$$\text{Birne} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

40mg Vitamin A
20mg Vitamin B
5mg Vitamin C



$$\text{Apfel} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 50 \end{pmatrix}$$

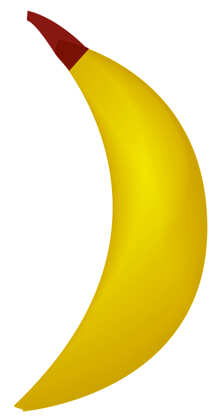
5mg Vitamin A
5mg Vitamin B
50mg Vitamin C

Gauss-Jordan Algorithmus

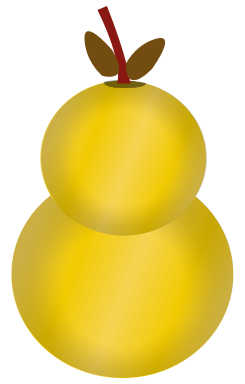
Dasselbe Gleichungssystem in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 15 & 40 & 5 \\ 20 & 20 & 5 \\ 10 & 5 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 \\ 80 \\ 220 \end{pmatrix}$$

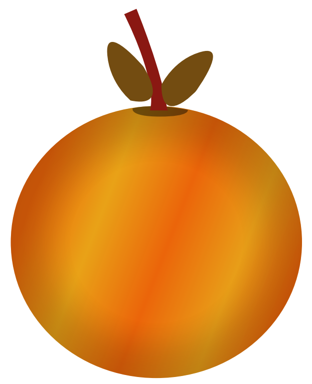
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 40 & 5 & 115 \\ 20 & 20 & 5 & 80 \\ 10 & 5 & 50 & 220 \end{array}\right)$$



$$\text{Banane} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{15mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{10mg Vitamin C} \end{matrix}$$



$$\text{Birne} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{40mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{20mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{5mg Vitamin C} \end{matrix}$$



$$\text{Apfel} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 50 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{5mg Vitamin A} \\ \rightarrow \text{5mg Vitamin B} \\ \rightarrow \text{50mg Vitamin C} \end{matrix}$$

Gauss-Jordan Algorithmus

Beim Gauss-Jordan Algorithmus wenden wir Äquivalenzumformungen auf die Zeilen an.

Das Ziel ist, dass auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht. Haben wir dies geschafft, können wir das Ergebnis auf der rechten Seite ablesen.

START

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 40 & 5 & 115 \\ 20 & 20 & 5 & 80 \\ 10 & 5 & 50 & 220 \end{array}\right)$$

ZIEL

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg

Gauss-Jordan Algorithmus

Um dieses Ziel systematisch und ohne Umwege zu erreichen, gehen wir wie folgt vor:

- Eliminieren der grünen Einträge
- Eliminieren der roten Einträge
- Eliminieren der gelben Einträge
- Eliminieren der blauen Einträge

Der Vorteil dieser Reihenfolge wird klar, wenn wir das Beispiel durchrechnen!

START

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 40 & 5 & 115 \\ 20 & 20 & 5 & 80 \\ 10 & 5 & 50 & 220 \end{array}\right)$$

ZIEL

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Matrixinversion

Bei der Matrixinversion suchen wir eine Matrix M^{-1} für die gilt:

$$M\,M^{-1} = I$$

Die Einheitsmatrix I ist eine Matrix deren Diagonalelemente 1 und deren andere Elemente 0 sind.

Die Lösung unseres Gleichungssystems ist das Produkt aus M^{-1} und Zielvektor.

$$aM = b \Leftrightarrow a = M^{-1}b$$

START

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 40 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 50 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ZIEL

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{39}{955} & \frac{79}{955} & -\frac{4}{955} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{38}{955} & -\frac{28}{955} & -\frac{1}{955} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{955} & -\frac{13}{955} & \frac{20}{955} \end{array}\right)$$

Invertierte Matrix

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg

Matrixinversion

Der Vorteil ist, dass die invertierte Matrix für alle Zielvektoren eingesetzt werden kann.

Der Nachteil ist der höhere Rechenaufwand, den man i. d. R. nicht mehr von Hand auf sich nimmt.

START

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 40 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 50 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ZIEL

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -\frac{39}{955} & \frac{79}{955} & -\frac{4}{955} \\ \frac{38}{955} & -\frac{28}{955} & -\frac{1}{955} \\ \frac{4}{955} & -\frac{13}{955} & \frac{20}{955} \end{matrix}}_{\text{Invertierte Matrix}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$