

## Substitutionsverfahren

$$2,5x_1 + 5x_2 = 10 \quad | -2,5x_1$$

$$\Leftrightarrow 5x_2 = 10 - 2,5x_1 \quad | :5$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 2 - 0,5x_1$$

$$u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

$$u(x_1) = x_1 (2 - 0,5x_1) = 2x_1 - 0,5x_1^2$$

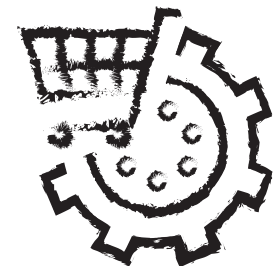
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2 - x_1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_1^* = 2$$

$$x_2^* = 2 - 0,5x_1^* = 1$$

Gegebene Gleichungen

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x_1, x_2) = x_1 x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2.5x_1 + 5x_2 = 10 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1$$



$$\begin{aligned} \max u(x_1, x_2) &= x_1 \cdot x_2 \\ \text{s.t. } 2.5x_1 + 5x_2 &= 10 \quad | -10 \\ \Leftrightarrow 2.5x_1 + 5x_2 - 10 &= 0 \quad | \cdot \lambda \\ \Leftrightarrow \lambda(2.5x_1 + 5x_2 - 10) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda) &= x_1 \cdot x_2 + \lambda(2.5x_1 + 5x_2 - 10) \\ &= x_1 \cdot x_2 + 2.5\lambda x_1 + 5\lambda x_2 - 10\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= x_2 + 2.5\lambda \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x_2 + 2.5(-0.2x_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_2 - 0.5x_1 = 0 \Leftrightarrow \underline{x_2 = 0.5x_1} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 5\lambda \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = -0.2x_1} \quad \lambda = -0.4$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 2.5x_1 + 5x_2 - 10 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2.5x_1 + 5(0.5x_1) - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2.5x_1 + 2.5x_1 - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x_1 = 10 \\ &\Rightarrow x_1^* = 2 \end{aligned}$$

$$x_2^* = 1$$

### 1. Zielfunktion (ZF) identifizieren

Was wollen wir minimieren/maximieren? ✓

### 2. Nebenbedingung (NB) identifizieren

Was schränkt uns dabei ein? ✓

### 3. Nebenbedingung umformen

Auf einer Seite muss 0 stehen ✓

### 4. Nebenbedingung mit $\lambda$ multiplizieren

Griechischer Buchstabe „Lambda“ ✓

### 5. Den entstehenden Term zur ZF addieren

Dadurch entsteht die Lagrangefunktion! ✓

### 6. Alle partiellen Ableitungen berechnen

Inklusive dem  $\lambda$  ✓

### 7. Alle partiellen Ableitungen nullsetzen

Dadurch entsteht ein Gleichungssystem ✓

### 8. Gleichungssystem lösen



Ansatz mit 2. Gossenschen Gesetz

$$MRS_{1,2} = \frac{P_1}{P_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{2,50}{5,00}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} = 0,5 \Leftrightarrow x_2 = 0,5x_1$$

$$2,5x_1 + 5x_2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 2,5x_1 + 5(0,5x_1) = 10$$

$$\Leftrightarrow 5x_1 = 10 \Rightarrow \underline{x_1^* = 2}$$

$$\Rightarrow x_2^* = 1$$

Gegebene Gleichungen

$$\max u(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

$$\text{s.t. } 2.5x_1 + 5x_2 = 10$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1$$



**Beispielaufgabe 1** angelehnt an Kollege Fischer. „Ein Unternehmen auf einem Markt mit vollständiger Konkurrenz weist folgende kurzfristige Gesamtkostenfunktion auf:

$$K(x) = 25 + 5x + x^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 5 + 2x$$

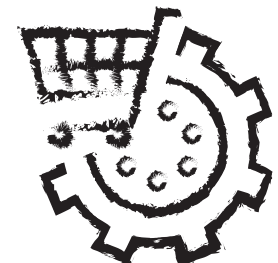
- a) Wie lautet die Grenzkostenfunktion dieses Unternehmens?  
 b) Bestimmen Sie die gesamten und die variablen Durchschnittskosten als Funktion des Outputs.  
 → c) Wie viel produziert das Unternehmen bei einem Preis von  $p=35$  kurzfristig?  
 d) Wie hoch muss der Marktpreis sein, damit das Unternehmen kurzfristig weiterproduziert?

$$\begin{aligned}\pi(x) &= 35x - K(x) \\ &= \underline{35}x - 25 - \underline{5}x - x^2 \\ &= 30x - 25 - x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial x} &= 30 - 2x \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow x^* &= 15\end{aligned}$$

$$P = MC(x)$$

$$\begin{aligned}35 &= 5 + 2x && | -5 \\ \Leftrightarrow 30 &= 2x && | :2 \\ \Rightarrow x^* &= 15\end{aligned}$$



Gegeben:

Nachfragefunktion

$$q(p)=14-2p$$

Preis-Absatz Funktion

$$p(q)=7-0.5q$$

Kostenfunktion

$$c(q)=q+0.5q^2$$

Grenzkostenfunktion

$$MC(q)=1+q$$

Ziel: Suche optimale Menge  $q^*$   
für einen Monopolisten

$$\pi(q) = p(q) \cdot q - c(q)$$

$$= (7 - 0.5q)q - q - 0.5q^2$$

$$= 7q - 0.5q^2 - q - 0.5q^2$$

$$= 6q - q^2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = 6 - 2q \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow q^* = 3 \quad p^* = 7 - 0.5 \cdot 3 = 5.5$$





Varianle 1

$$\pi(q) = p(q) \cdot q - c(q)$$

$$= (7 - 0,5q)q - q - 0,5q^2$$

$$= \underline{7q} - \underline{0,5q^2} - \underline{q} - \underline{0,5q^2}$$

$$= 6q - q^2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = 6 - 2q \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow q^* = 3 \quad p^* = 7 - 0,5 \cdot 3 = 5,5$$

Varianle 2

$$\begin{aligned} \text{Umsatz : } p(q) \cdot q &= (7 - 0,5q)q \\ &= 7q - 0,5q^2 \end{aligned}$$

$$\text{Kosten : } q + 0,5q^2$$

$$\text{Grenzümsatz } MR(q) = 7 - q$$

$$\text{Grenzkosten } MC(q) = 1 + q$$

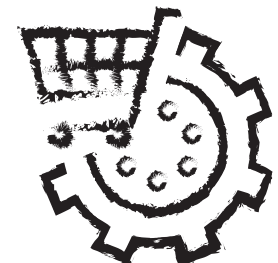
$$\text{Setze } MR(q) \stackrel{!}{=} MC(q)$$

$$7 - q \stackrel{!}{=} 1 + q \quad | +q$$

$$\Leftrightarrow \underline{7} = 1 + 2q \quad | -1$$

$$\Leftrightarrow 6 = 2q$$

$$\Rightarrow q^* = 3$$



## Gefangenendilemma

	Verbrecher 2 sagt nichts	Verbrecher 2 gesteht
Verbrecher 1 sagt nichts	-3, -3	-10, 0
Verbrecher 1 gesteht	0, -10	-8, -8

Nash-Gleichgewicht

